



# Relativitetsteori (ii)

*Einstein roder rundt med rum og tid*

Mogens Dam  
Niels Bohr Institutet

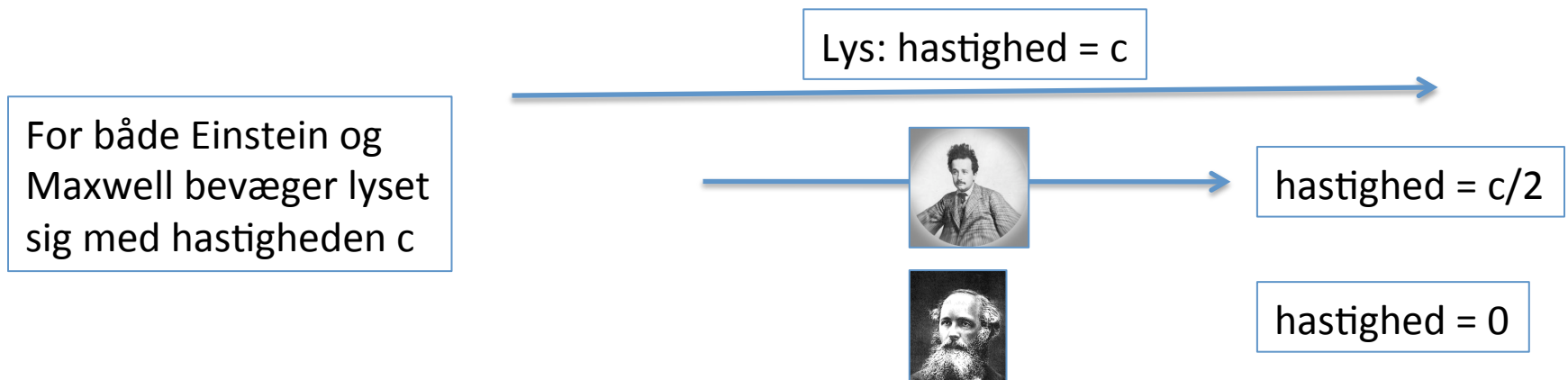
# Einsteins relativitetsprincip (1905)

Einsteins postulater:

**1. Alle inertialsystemer er ligeværdige for udførelse af samtlige fysiske forsøg:**

- ✓ meningsløst at spørge, hvem der er i hvile, og hvem, der bevæger sig;  
**al bevægelse er relativ**

**2. I det tomme rum har lys samme hastighed,  $c$ , for enhver iagttager**



# Samme lyshastighed for enhver iagttager?



150 km/t



40 km/t

Hastighed af bil **i forhold til** cykel:  
 $v = (150 - 40) \text{ km/t} = 110 \text{ km/t}$

=> Hastigheder lægges sammen  
(trækkes fra hinanden), som  
normale tal

lysstråle

300.000 km/s



100.000 km/s

Hastighed af lysstråle **i forhold til** Einstein er uanset hans bevægelse:  $v = 300.000 \text{ km/s}$

=> Hastigheder lægges *ikke* sammen, som normale tal...

# Samme lyshastighed for alle

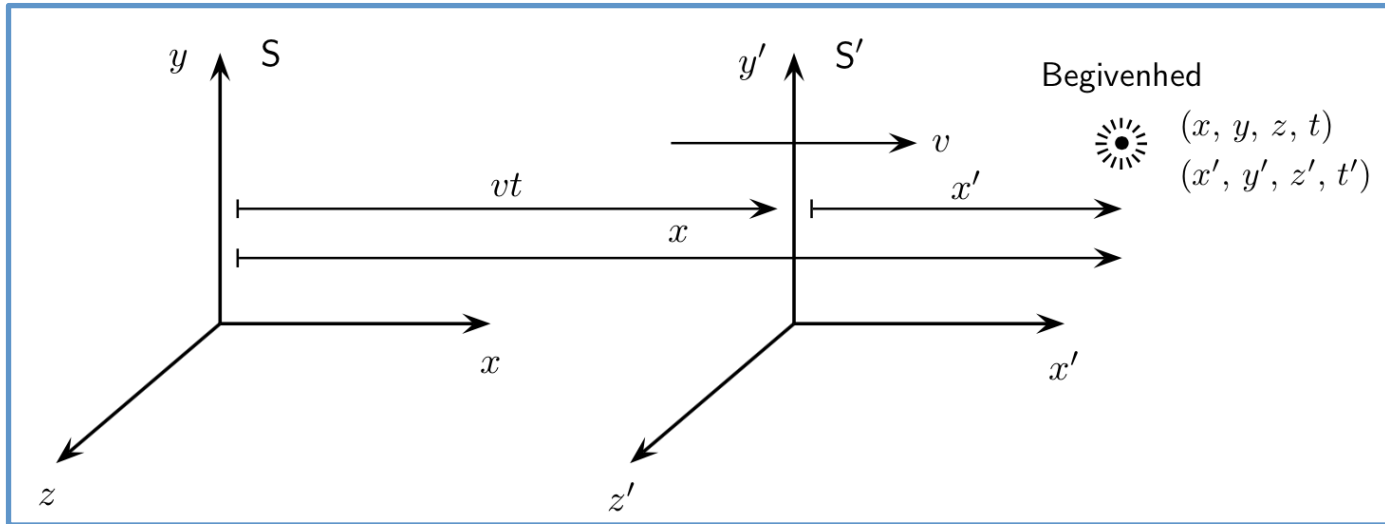
Strukturen af rum + tid er anderledes end, hvad vores hverdagserfaring fortæller os.

# Vigtige begreber for udforskning af rum og tid

- **Begivenhed**: Øjeblikkelig hændelse i et specifikt punkt i rummet;
- **Referencesystem**: Et system for tilordning af koordinater til begivenhed. Enhver begivenheds koordinater *aflæses lokalt*: Ingen forsinkelse p.g.a. endelig udbredelseshastighed lys/signaler;
- **Inertialsystem**: Referencesystem, hvori Newtons love gælder;
- **lagttager**: Et individ, som observerer begivenheder fra et givet referencesystem.

# Ikke-relativistisk: Galilei-transformationenen

To inertialsystemer i relativ bevægelse med hastighed  $v$ :



Galileitransformationen: Ligningsystem, der sammenknytter en begivenheds koordinater i de to inertialsystemer  $S$  og  $S'$ :

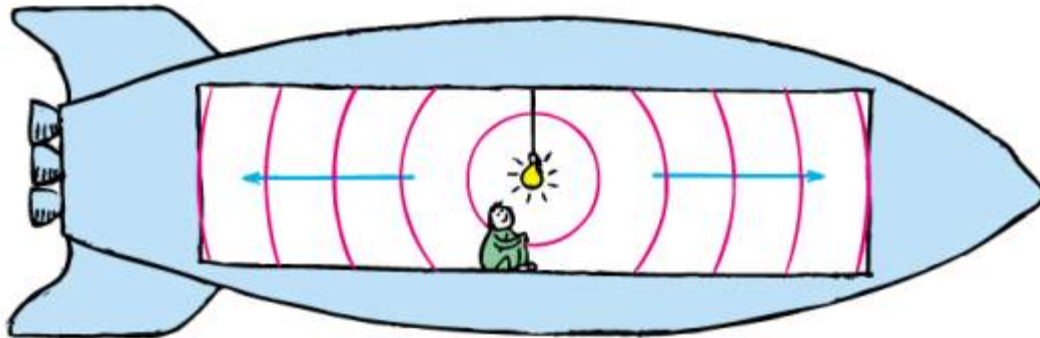
$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t,\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}u'_x &= u_x - v, \\u'_y &= u_y, \\u'_z &= u_z,\end{aligned}$$

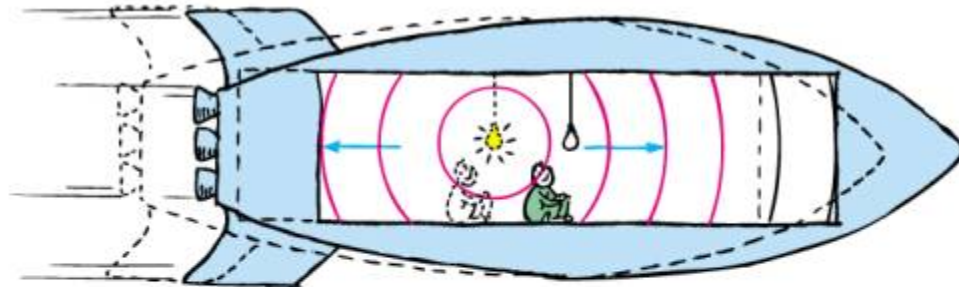
Hastigheder er noget man lægger sammen/trækker fra hinanden

# Revision af fundamentale begreber: Samtidighed



Hewlett, *Conceptual Physics*, Ninth Edition.  
Copyright © 2002 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley. All rights reserved.

En iagttager i rumskibet ser, at et lysglimt udsendt fra midten af rumskibet rammer kabinens to ender til samme tid.



For en iagttager, der ser rumskibet passere forbi, medfører betingelsen om den samme lyshastighed i alle retninger *i sit eget system*, at de to begivenheder ikke vil være samtidige. Lysglimtet vil først ramme bagvæggen, dernæst forvæggen.

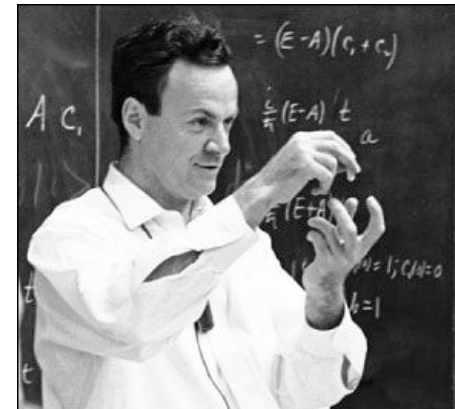
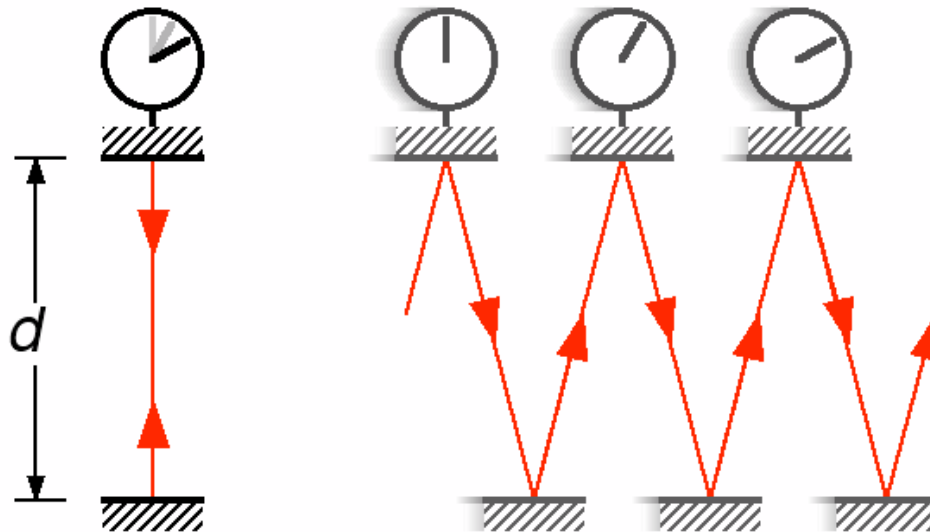


Hewlett, *Conceptual Physics*, Ninth Edition.  
Copyright © 2002 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley. All rights reserved.

Samtidighed er relativ, ikke absolut !

# Revision af fundamentale begreber: Tid

- Et ur, der bevæger sig, tikker langsommere.
- Dette kan anskueliggøres direkte v.h.j.a. et såkaldt lysur.
- Lysvejen i det bevægede ur er længere; altså tikker det langsommere



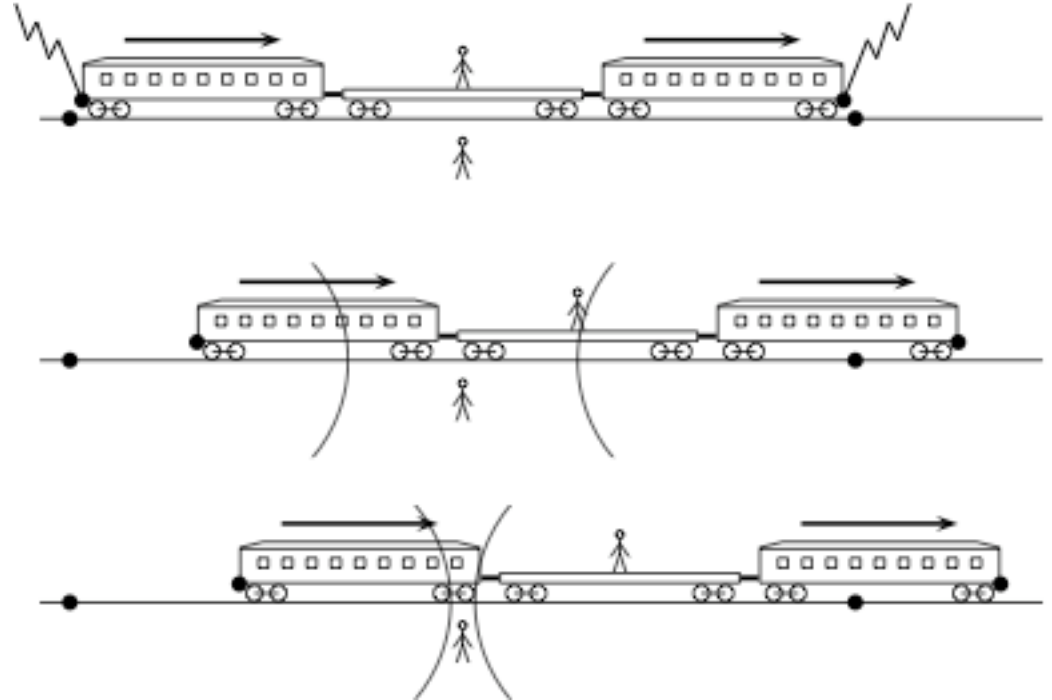
Hver gang lyset rammer det øvre spejl, tikker uret én gang

- Ethvert ur må gå langsommere, hvis det er i bevægelse i forhold til iagttageren => **Tidsforlængelse**



# Revision af fundamentale begreber: Længde

Måling af længden af et legeme i bevægelse:  
Afstand mellem to mærker afsat *samtidig* ved legemets for- og bagende.



Idet to iagttagere i relativ bevægelse er uenige om samtidigheden af de to begivenheder, vil de også være uenige om længden af legemet.

Et legeme er kortere, når det iagttages fra et system i hvilket det bevæger sig.  
**Længdeforkortning**

Her, to lynnedslag, der er samtidige i skinnesystemet. Afstanden mellem mærkerne på skinnerne repræsenterer togets længde i skinnesystemet. I togsystemet slår lynet ved forenden ned først, dernæst ved bagenden. Afstanden mellem mærkerne på skinnerne må da være kortere end togest længde i togsystemet.

# De relativistiske effekter

- **Længdeforkortning**

- Længde af legeme i system, hvor legemet er i hvile: **Hvilelængden**:  $L_0$
- I ethvert andet system er legemet kortere:

$$L = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

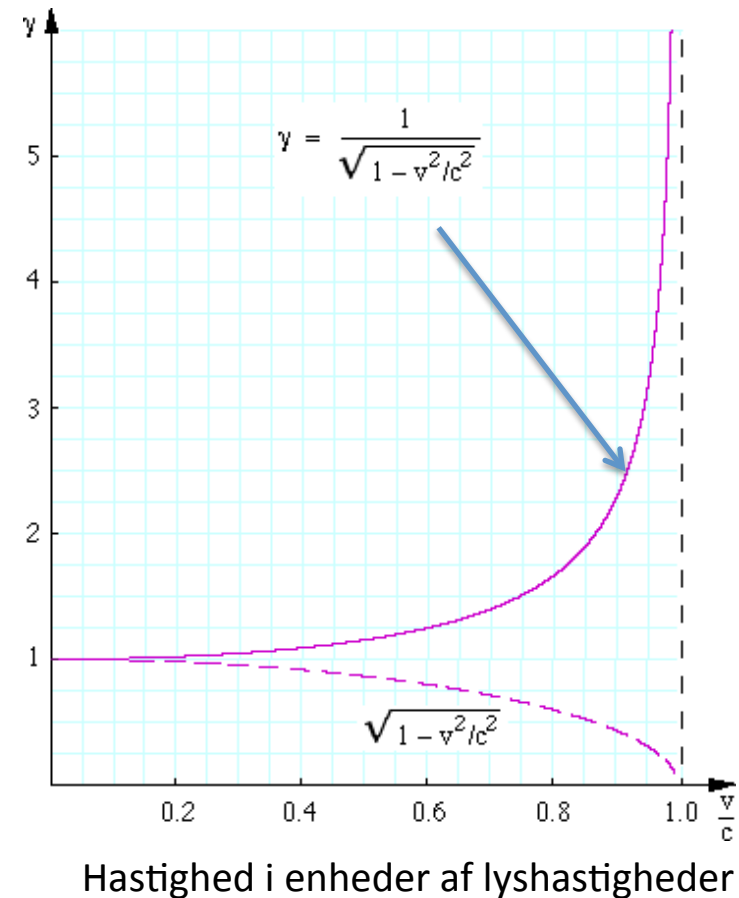
- **Tidsforlængelse**

- Varighed af process i system, hvor start og slut sker i samme punkt: **Egentiden**:  $T_0$
- I ethvert andet system er varigheden større:

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

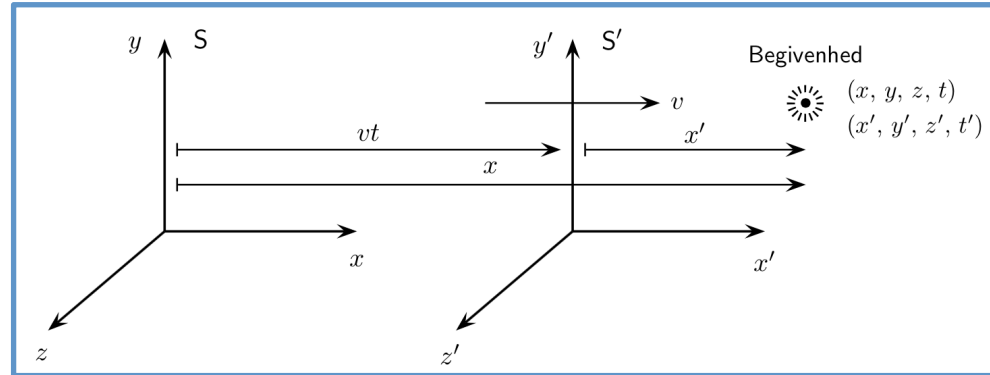
$\gamma$ -funktionen  
(mål for hvor relativistisk  
problemstillingen er)

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



# Lorentz-transformationenen

En begivenhed betragtes fra to inertialsystemer S og S':



Klassisk: Galilei-transformationenen

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t,\end{aligned}$$

Relativistisk: Lorentz-transformationenen

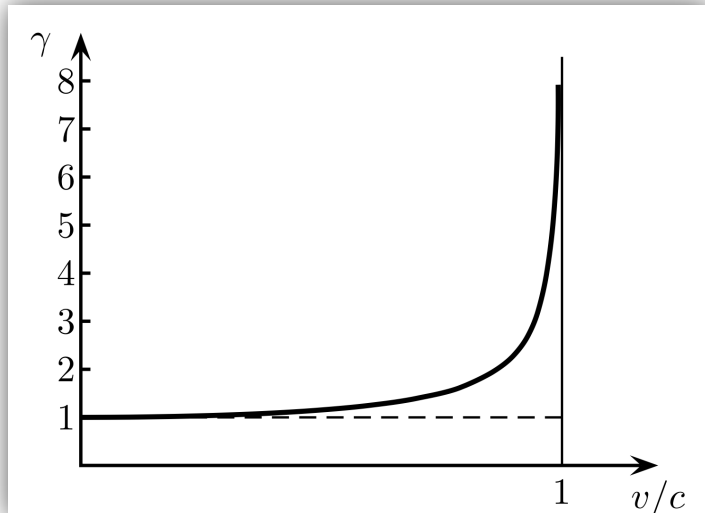
$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma (t - vx/c^2).\end{aligned}$$

$$\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

## Galilei-transformationenen

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t,\end{aligned}$$

- a)  $v$  arbitrær
- b) Tid separat fra rum



## Lorentz-transformationenen

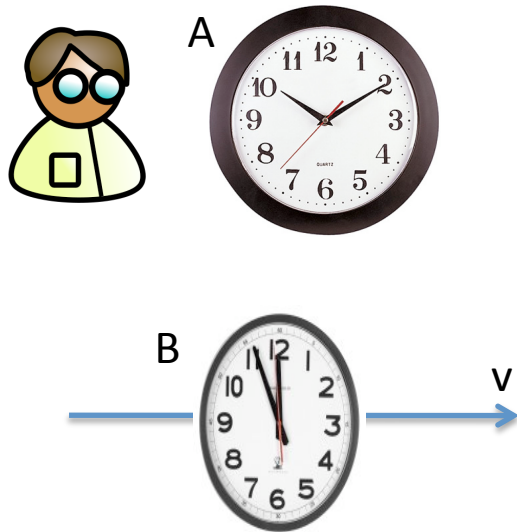
$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma (t - vx/c^2).\end{aligned}$$

- a)  $v$  mindre end  $c$ . Ellers  $\gamma$  uendelig/  
imaginær
- b) Sammenblanding af rum og tid
- c) Går over i Galilei-transf. for  $v/c \ll 1$
- d) Symmetri  $x \leftrightarrow ct$

$$\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

# Relativistiske effekter går (selvfølgelig!) begge veje

Set fra A-systemet

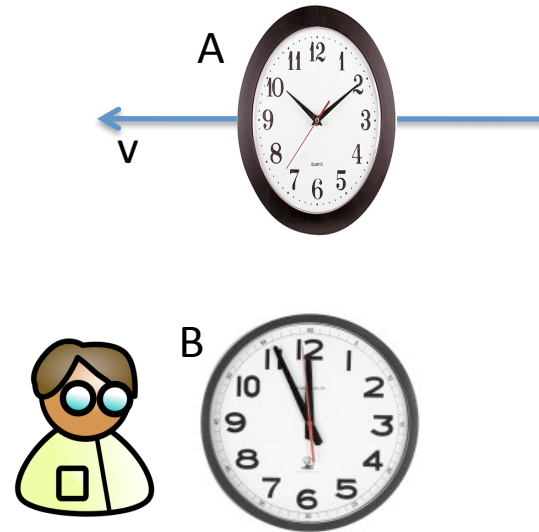


- A stationært
- B mod højre med farten  $v$

$$T_A = T_B * \gamma$$

1 sek på B ta'r  $\gamma$  sek målt på A

Set fra B-systemet



- B stationært
- A mod venstre med farten  $v$

$$T'_B = T'_A * \gamma$$

1 sek på A ta'r  $\gamma$  sek målt på B

De to systemer er ligeberettigede => tidsforlængelse og længdeforkortning går begge veje

# Hold dig ung – rejs!!!

- Et ur i bevægelse tikker langsommere.
  - Gælder (selvfølgelig) også biologiske ure
- Rejs ud til vores nærmeste stjerne og tilbage med 80% af lyshastigheden:
  - I alt  $2 * 4$  lysår = 8 lysår. Altså tager det  $(8 \text{ år}/0.80 =)$  10 år set fra Jorden.
  - Set fra raketsystemet tager det  $2 * 3$  år, altså 6 år.
  - Når du kommer hjem, er du 4 år yngre end din tvillingebror!!!
- Men hov, skulle tidsforlængelsen ikke gå begge veje? Kunne man ikke lige så godt argumentere, at søsteren er den ældste?
  - Nej, de to bevægelser er ikke ligeberettigede:
    - Bror: konstant i ikke-accelereret bevægelse
    - Søster: acceleration i del af bevægelsen (start/vend/stop) (men det er ikke accelerationen i sig selv, der er årsag til aldersforskellen...)



# Hvorfor ingen relativistiske effekter i hverdagen

- Vi bevæger os bare sååååå langsomt, at tidsforlængelse og længdeforkortning ikke observeres i hverdagen
  - 30 m/s på motorvej har  $v/c = 10^{-7}$ 
    - $\gamma = 1.0000000000000005$
  - 30.000 m/s Jorden omkring Solen har  $v/c = 10^{-4}$ 
    - $\gamma = 1.000000005$
    - lille, men præcise målinger kan sagtens måle dette



Ultrapræcis atomur:  
præcision  $2 \times 10^{-15}$



# Lyshastigheden som højeste hastighed

- $\gamma$ -funktionen er kun defineret for hastigheder  $v < c$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Intet par af iagttagere kan bevæge sig med lyshastigheden eller hurtigere i forhold til hinanden.
- Ingen fysisk partikel kan bevæge sig i forhold til en iagttagere med lyshastigheden, eller hurtigere.
- Kan generelt vise, at *intet informations-bærende signal* kan bevæge sig hurtigere end lyshastigheden.
  - Ved signaler med overlyshastigheder bryder årsag/virknings-sammenhænge sammen. Meningsløst!
- Kun abstrakte punkter kan bevæge sig med overlyshastighed.



# Sammensætning af hastigheder

Lad os vende tilbage til udgangspunktet. Hvad er der sket siden?

- Sammensætning af hastigheder  $u'$  og  $v$ :

Klassisk:  $u = u' + v$

Relativistisk:

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}$$

Eksempel:

Sammensæt to hastigheder, der er lige store ( $u' = v$ ):

• Fra bil 100 km/t kastes bold fremad med 100 km/t :

- Klassisk: 100 km/t + 100 km/t = 200 km/t

- Relativistisk?

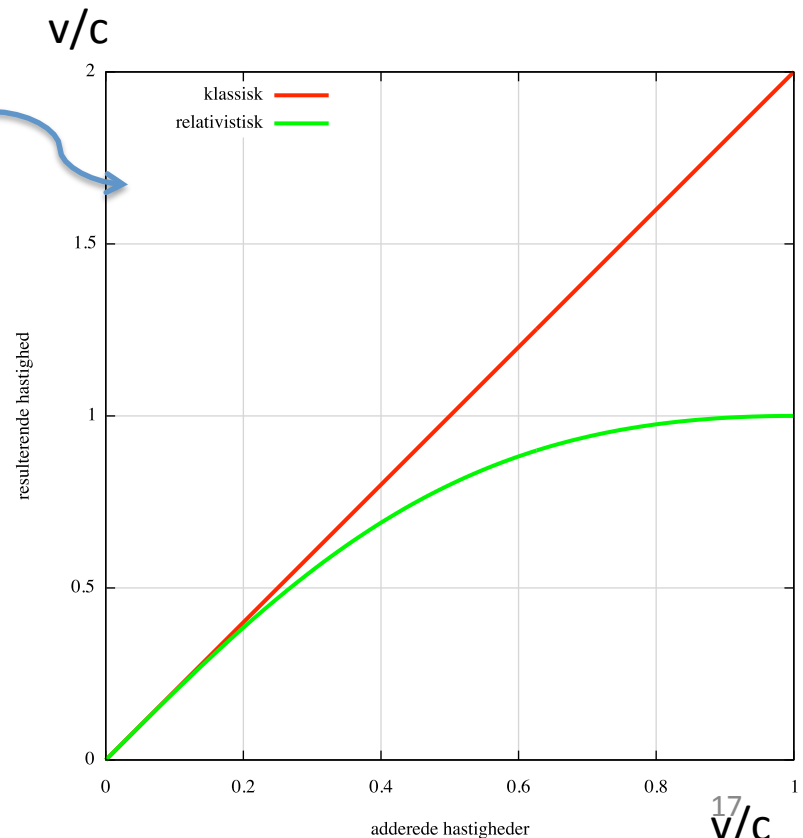
•  $0.5c + 0.5c = ?$

•  $c + c = ?$

Sammensætning af to underlyshastigheder

=> underlyshastighed

For hastigheder  $< 0.1c$  ikke stor forskel på ikke-relativistisk og relativistisk sammensætning



# Rum + tid = Rumtid

- I relativitetsteorien sker en *sammenblanding af tid og rum*.
  - Transformationsligninger fra én iagttager til en anden i relativ bevægelse med hastighed  $v$

To begivenheder 1 og 2:  $\Delta x = x_2 - x_1$ , etc....

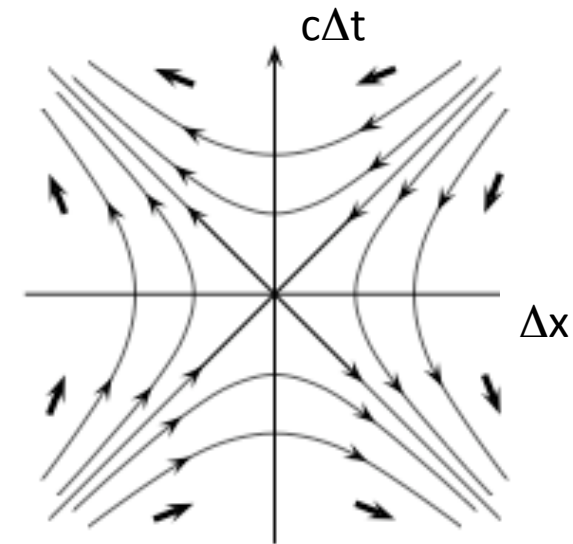
$$\begin{aligned}\Delta x' &= \Delta x \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z \\ \Delta t' &= \Delta t\end{aligned}$$

Klassisk



$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma (\Delta x - v\Delta t), \\ \Delta y' &= \Delta y, \\ \Delta z' &= \Delta z, \\ \Delta t' &= \gamma (\Delta t - v\Delta x/c^2).\end{aligned}$$

Relativistisk



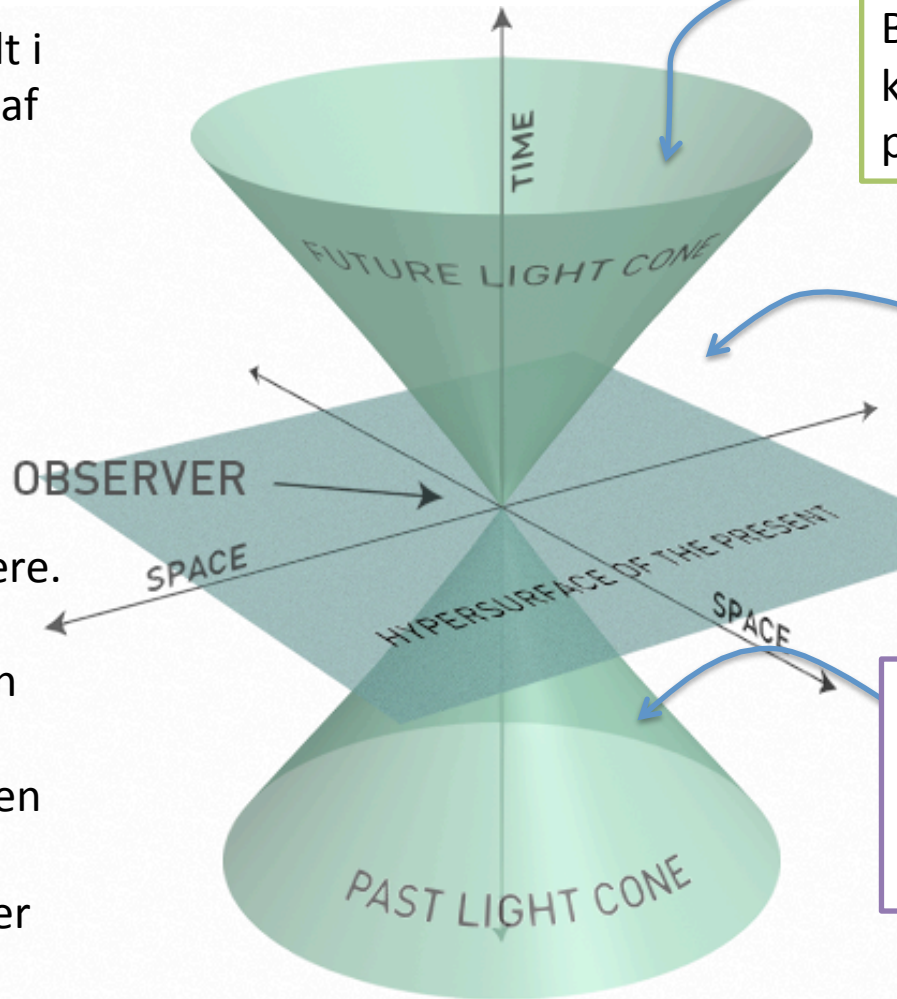
- Rum og tid sammenblandes.  
Rum og tid er sammenknyttede => **rum + tid = rumtid**
  - 3 + 1 = 4 dimensionel verden

# Rumtiden og lyskegler

Rumtiden er opdelt i distinkte områder af lyskegler.

I området udenfor lyskeglen kan begivenheders rækkefølge være forskellig for forskellige iagttagere.

Begivenheder i den kausale fortid (fremtid) ligger i den kausale fortid (fremtid) for enhver iagttager.



## Kausal fremtid:

Begivenheden i origo kan have indflydelse på begivenheder her

## Ikke-kausalt område:

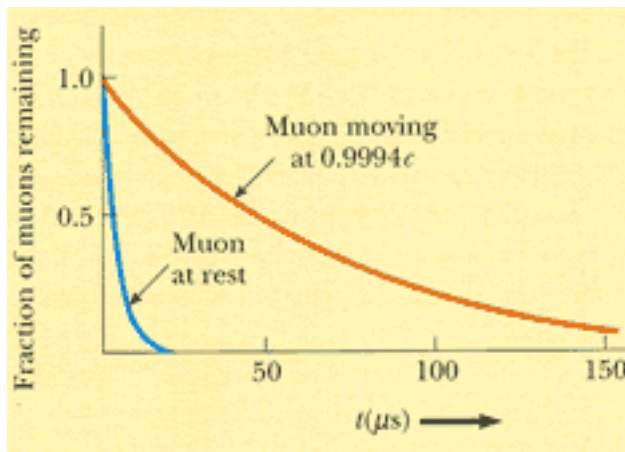
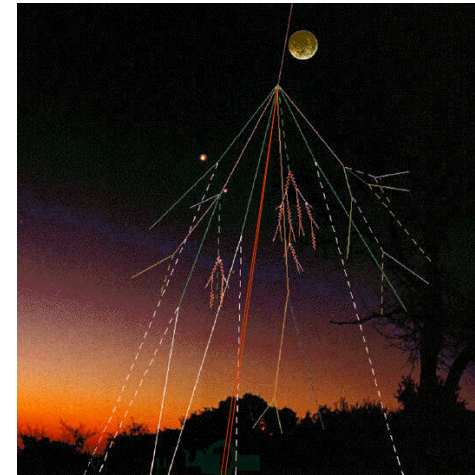
Begivenheder uden for lyskeglen kan ikke have årsagssammenhæng med begivenheden i origo

## Kausal fortid:

Begivenheder her kan have indflydelse på begivenheden i origo

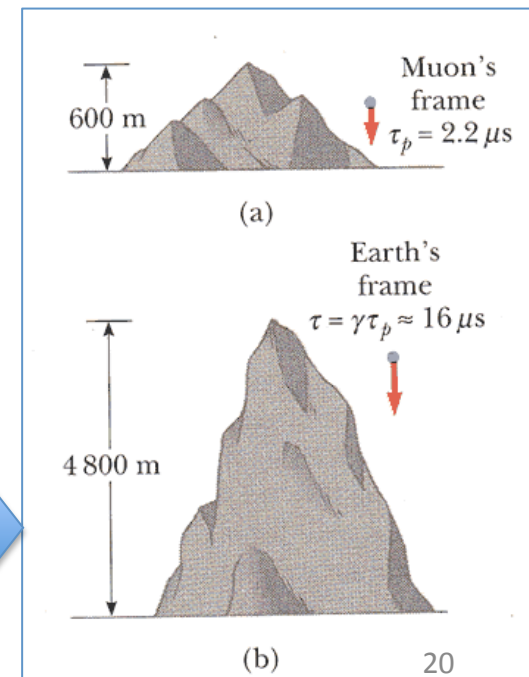
# Tidsforlængelse i "hverdagen" – kosmiske stråler

- Mange sub-atomare partikler har endelige levetider.
- Eksempel: myonen:  $\tau_{\mu} = 2.2 \mu\text{sek}$ .
  - med højest mulige hastighed,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , tilsvarende dette vejlængden  $d = c * \tau_{\mu} = 660 \text{ m}$
- Myoner skabes i den øvre atmosfære, typisk 10 km, ved kollision af kosmiske stråler med atmosfæren.
- Hvordan kommer da myonerne ned til jordoverfladen i stort antal (10.000 pr.  $\text{m}^2$  pr. sekund)?
  - Levetiden  $2.2 \mu\text{sek}$  er i myonen hvilesystem.
  - I "laboratoriesystemet" er tiden forlænget:  $\tau = \gamma * 2.2 \mu\text{sek}$



- $\gamma$ -faktoren kan være stor: 1-10.000
- Altså kan myonene bevæge sig adskillige km

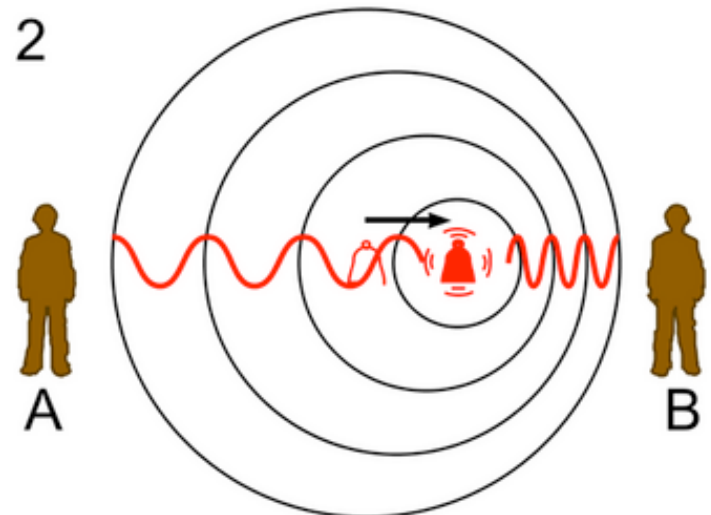
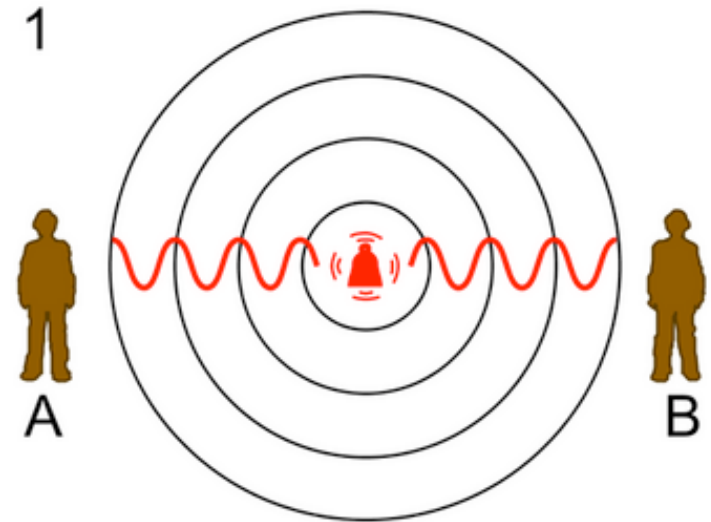
I myon-systemet synes vejlængden kortere:  
**længdeforkortning**



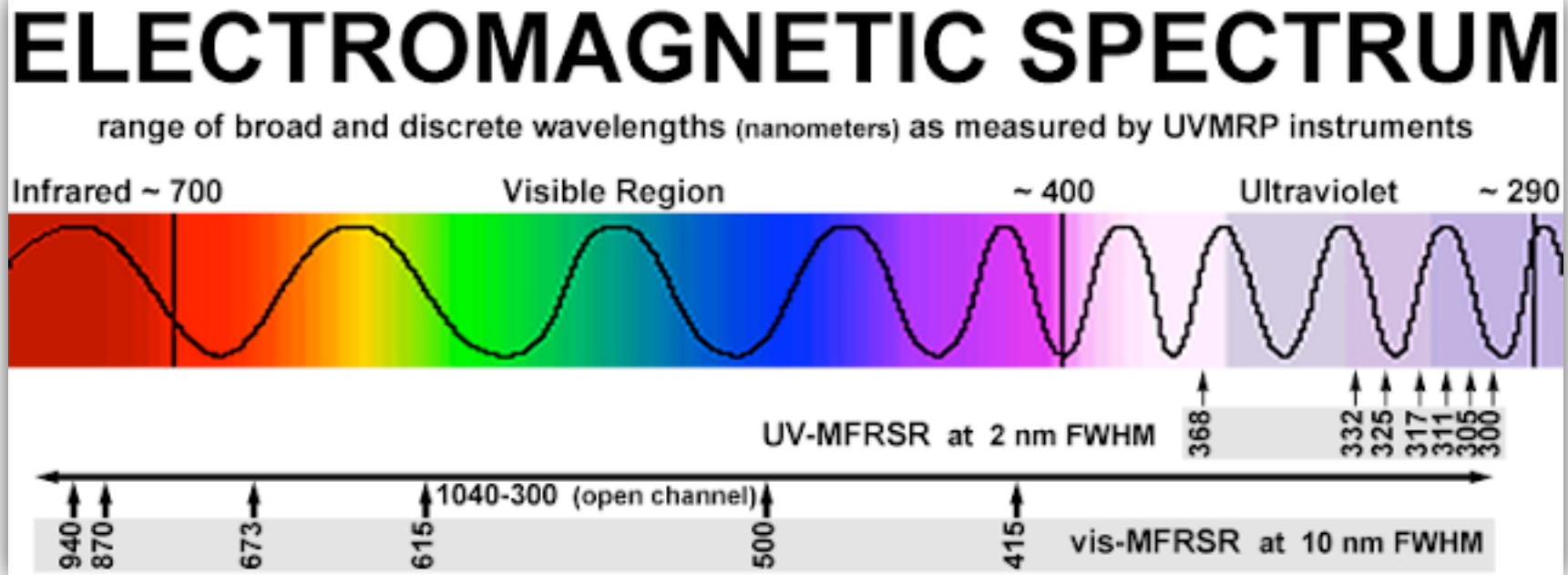
# Doppler-effekten

Klassisk effekt, som vi kender bedst fra lyd:

1. Lydkilde statisk relativ til to iagtagere A og B
  - ✓ Samme frekvens observeret af A og B
2. Lydkilde bevæger sig fra A mod B:
  - ✓ A observerer højere bølgelængde (lavere frekvens) end udsendt
  - ✓ B observerer lavere bølgelængde (højere frekvens) end udsendt



# Lys: Sammenhæng mellem bølgelængde og farve



Rød: Lang bølgelængde / lav frekvens  
Blå: Kort bølgelængde / høj frekvens

Bølgebevægelse:  
hastighed = bølgelængde \* frekvens  
For lys:  $c = \lambda * \nu$

# Relativistisk Doppler-effekt

Udledes analogt til den klassiske Doppler-effekt.

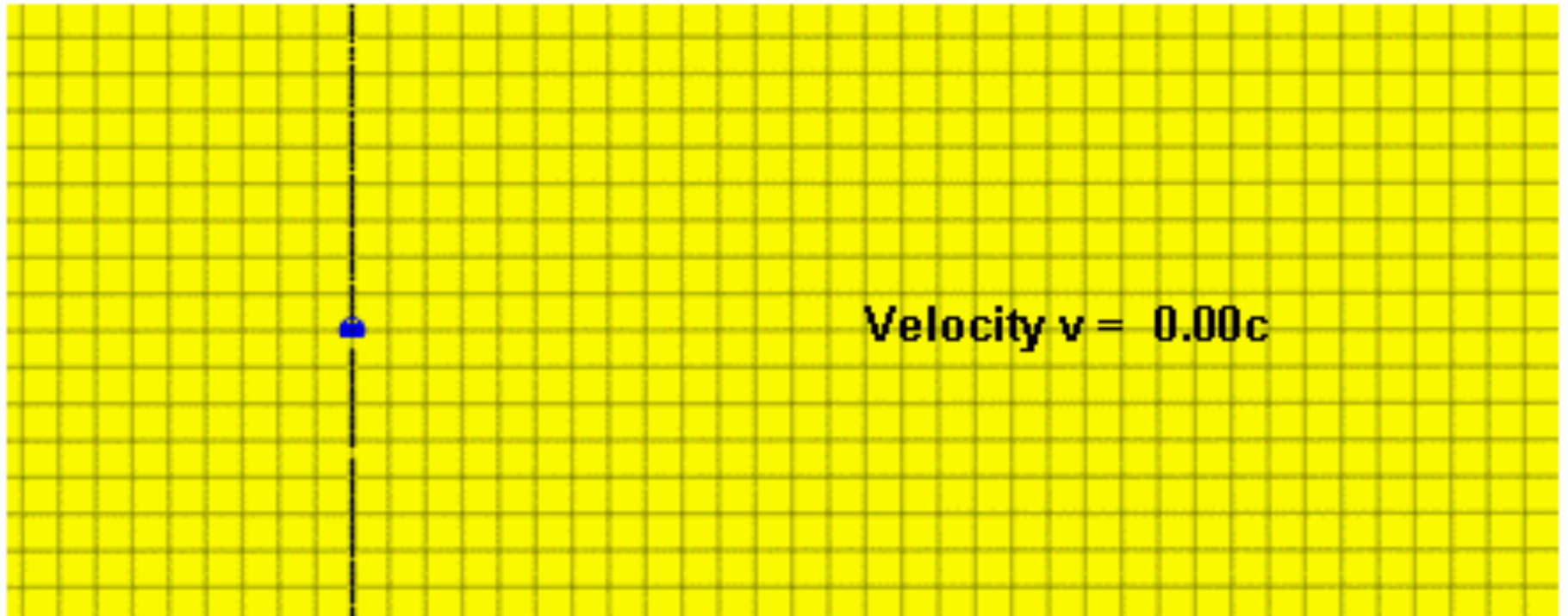
Men én kvalitativ vigtig forskel:

- Klassisk Doppler-effekt afhænger af **både kildens og iagttagerens hastighed i forhold til udbredelsesmediet**
- Relativistisk Doppler-effekt afhænger (selvfølgelig!) udelukkende **af den relative hastighed af iagttager i forhold til kilde.**
  - Kilde og iagttager fjerner sig med hinanden med hastigheden  $u$ :

$$\frac{\nu_{\text{rel}}}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}$$

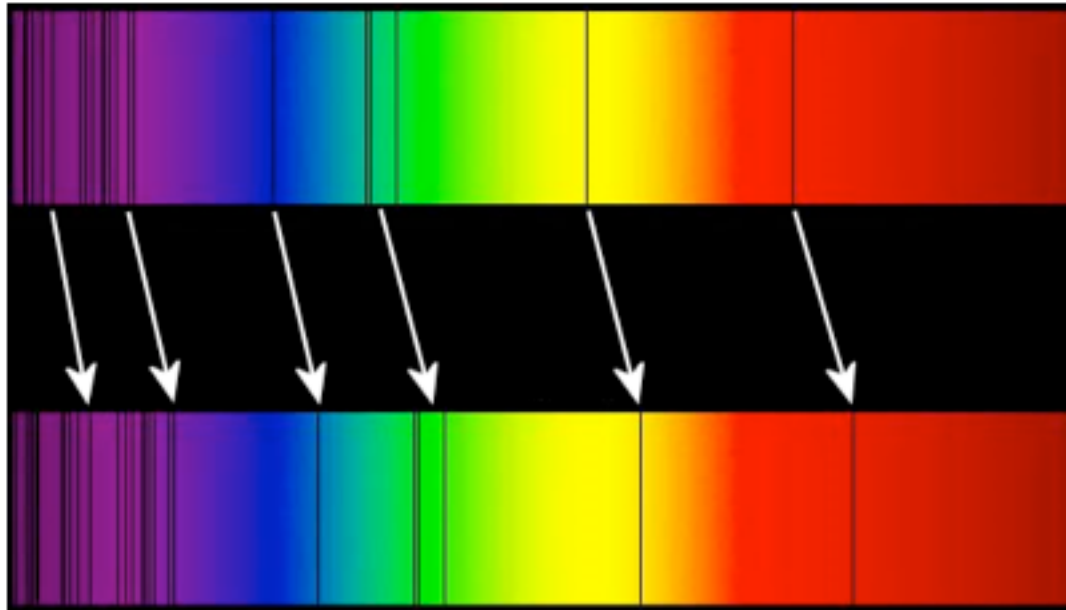
Fjerner sig ( $u > 0$ ): Lavere frekvens iagttages: **Rødforskydning**  
Nærmer sig ( $u < 0$ ): Højere frekvens iagttages: **Blåforskydning**

# Aberration og Doppler-effekt





# Doppler-skift af spektrallinjer



Fra laboratoriet kender vi spektrallinjernes bølgelængde.  
Ved at observere spektrallinjer fra stjerner, kan vi ved at måle  
Doppler-skiftet bestemme stjernernes hastighed i forhold til Jorden.