



Relativitetsteori (iii)

Einstein roder rundt med rum og tid

Mogens Dam
Niels Bohr Institutet

Udgangspunktet: Einsteins relativitetsprincip

Einsteins postulater:

- 1. Alle inertialsystemer er ligeværdige for udførelse af samtlige fysiske forsøg:**
 - ✓ meningsløst at spørge, hvem der er i hvile, og hvem, der bevæger sig;
al bevægelse er relativ
- 2. I det tomme rum har lys samme hastighed, c , for enhver iagttager**

Relativistiske effekter

- **Længdeforkortning**

- Længde af legeme i system, hvor legemet er i hvile: **Hvilelængden**: L_0
- I ethvert andet system er legemet kortere:

$$L = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

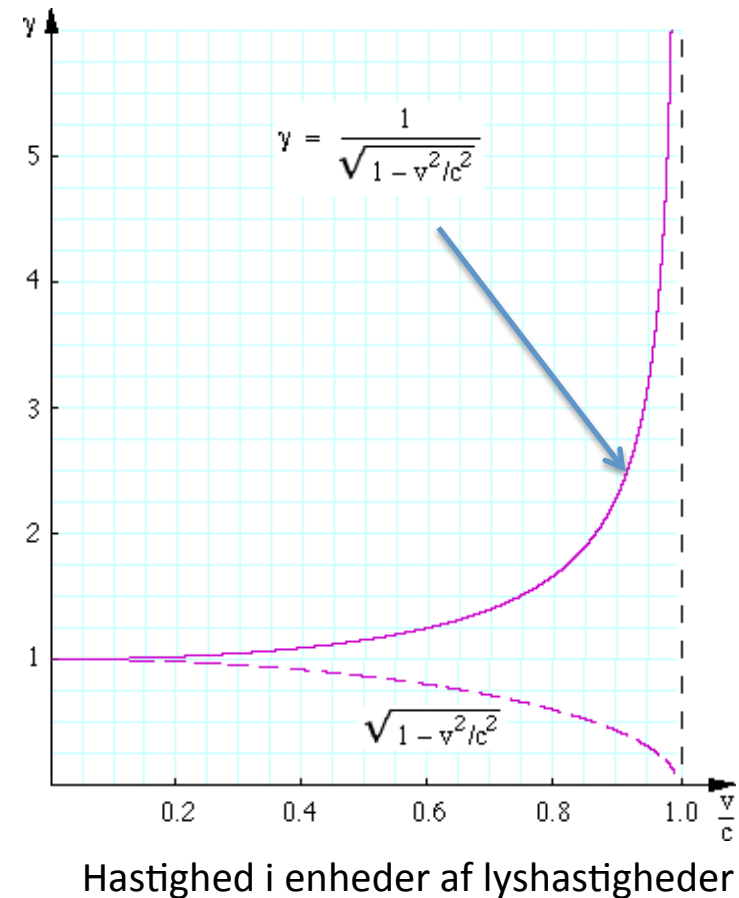
- **Tidsforlængelse**

- Varighed af process i system, hvor start og slut sker i samme punkt: **Egentiden**: T_0
- I ethvert andet system er varigheden større:

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

γ -funktionen
(mål for hvor relativistisk
problemstillingen er)

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



Klassisk:
Galilei-transformationen

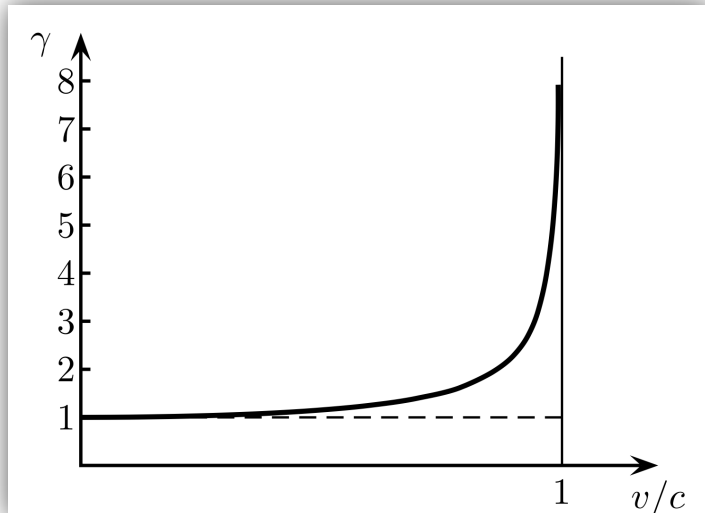
$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t,\end{aligned}$$

- a) v arbitrær
- b) Tid separat fra rum

Relativistisk:
Lorentz-transformationen

$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma (t - vx/c^2).\end{aligned}$$

- a) v mindre end c . Ellers γ uendelig/
imaginær
- b) Sammenblanding af rum og tid
- c) Går over i Galilei-transf. for $v/c \ll 1$
- d) Symmetri $x \leftrightarrow ct$



$$\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

Noget om rumtiden

Samme lyshastighed for enhver iagttager!

- Et kugleformet lysudbredelse vil være kugleformet for enhver iagttager!

Inertialsystem S:

$$r = ct$$

$$r^2 = c^2t^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

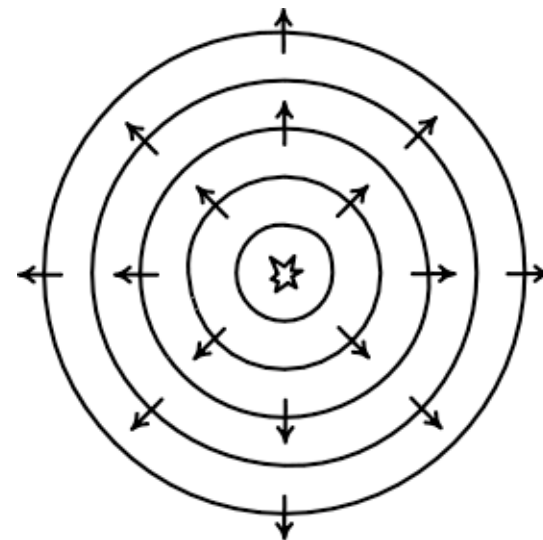
Inertialsystem S':

$$r' = ct'$$

$$r'^2 = c^2t'^2$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$



Generelt kan man vise, at følgende sammenhæng altid gælder:

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Størrelsen $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ er **invariant**: Samme værdi i ethvert inertialsystem.

Bemærk de forskellige fortegn: s^2 kan være positiv ($s^2 > 0$),
nul ($s^2 = 0$), eller
negativ ($s^2 < 0$).

Invarians i det normale rum

Vi kender begrebet invarians fra rummet.

Lad os betragte et 2D eksempel.

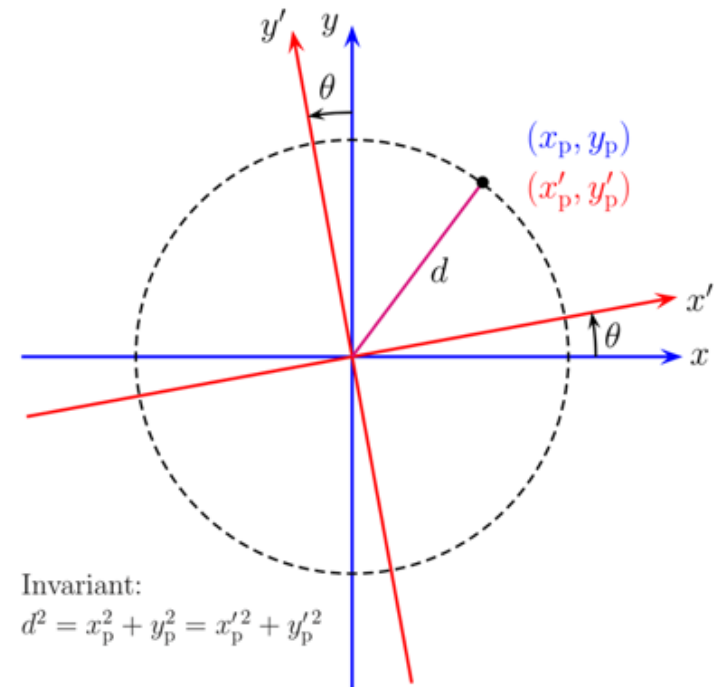
Her to orienteringer af koordinataksene.

Vi ved, at afstanden d af et punkt fra origo er invariant overfor rotation af koordinatsystemet (har samme værdi uanset orienteringen):

$$d^2 = x_p^2 + y_p^2 = x_p'^2 + y_p'^2$$

Ligningen $d^2 = x_p^2 + y_p^2$ beskriver en cirkel med radius d .

Samtlige punkter i samme afstand fra origo ligger altså generelt på en cirkel.



Invarians i rumtiden

Lad os betragte et 2D eksempel.

Her koordinaterne ct og x . [Vi tænker os, at $y=z=0$.]

Vi ved da, at størrelsen

$$s^2 = c^2 t_p^2 - x_p^2$$

er invariant: Samme værdi fra ethvert inertialsystem

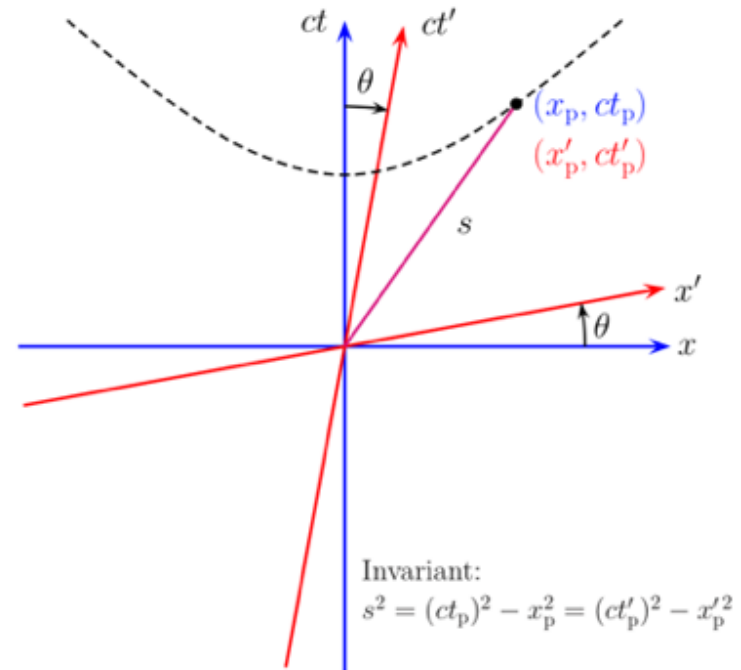
Vigtig forskel m.h.t. rummet: Vi har et **relativt minustegn** på tids- og rum-komponenterne.

Begivenheder (punkter i rumtiden) med samme "afstand" fra origo ligger da ikke på en cirkel, men på en hyperbel.

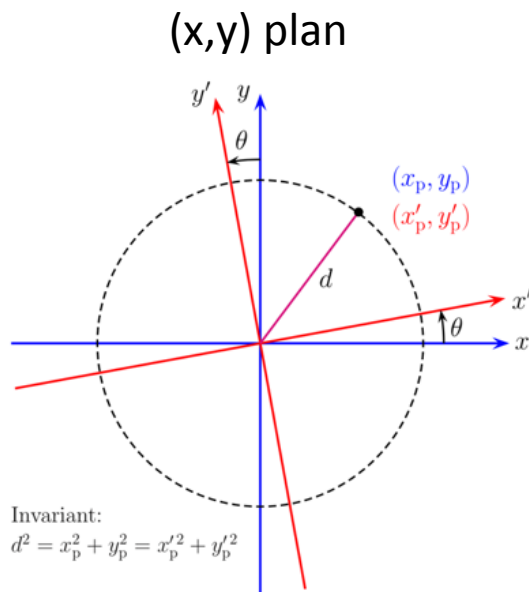
Specielt, hvis $s^2 > 0$ er hvor τ er egentiden.

$$s^2 = c^2 t_p^2 - x_p^2 = c^2 \tau^2$$

Man ældes altså lige meget ved rejse fra origo til ethvert punkt på hyperblen.



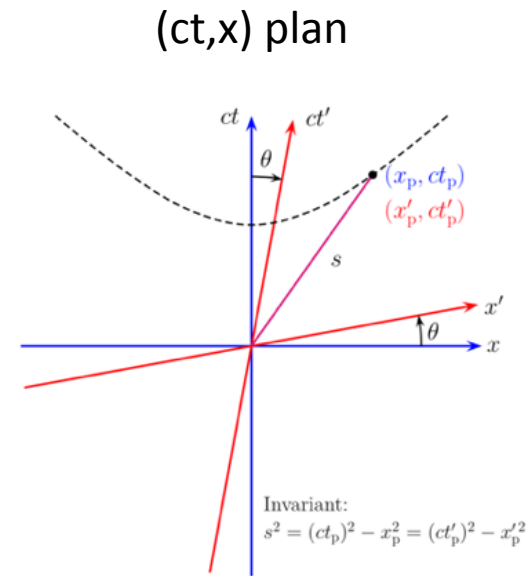
Rotation versus Lorentz-transformation



$$d^2 = x^2 + y^2$$

Punkter i samme afstand
fra origo ligger på cirkel

Ved rotation
sammenblandes x- og y-
koordinaterne

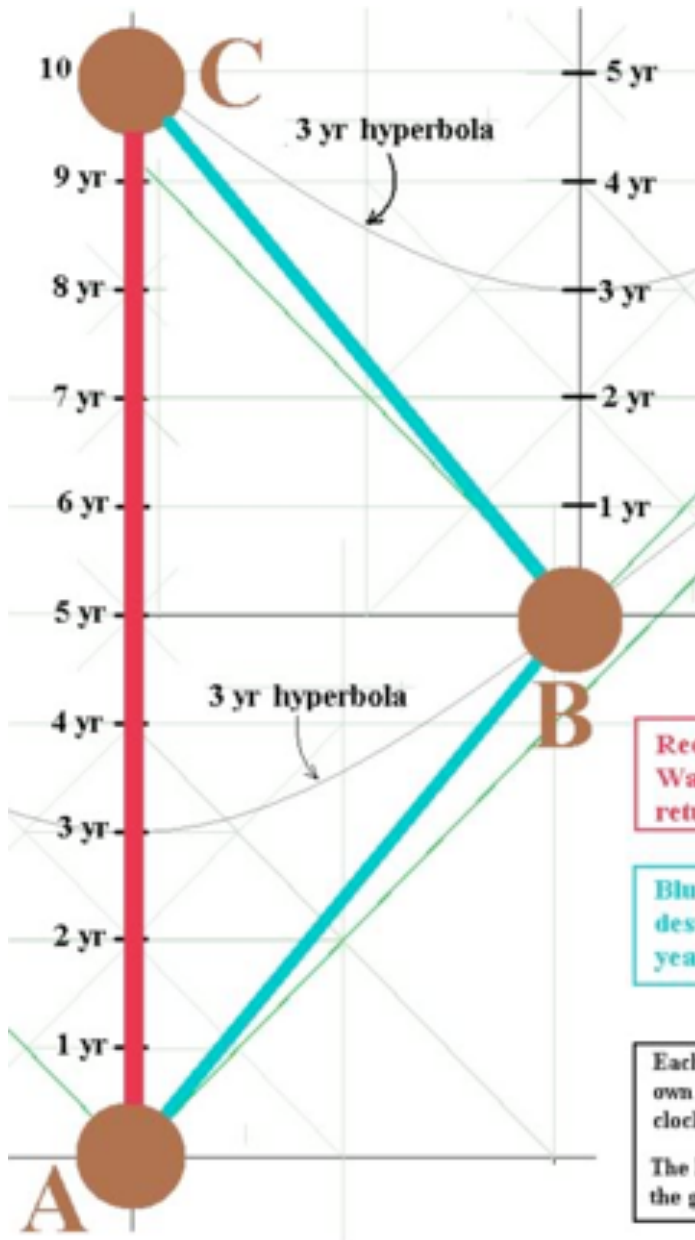


$$s^2 = (ct)^2 - x^2$$

Rumtids-punkter (begivenheder) i
samme afstand fra origo ligger på
hyperbel

Ved Lorentz-transformation
(relativ bevægelse)
sammenblandes ct- og x-
koordinaterne.

Gensyn med tvillinge-”paradokset”



Einstein-Lorentz-Minkowski Geometry
Triangular Inequality

$$AC > AB + BC$$

Red twin remains on earth at rest.
Waits 10 years for Blue twin to return to earth.

Blue takes 3 years to get to destination, then takes another 3 years for a return trip to earth.

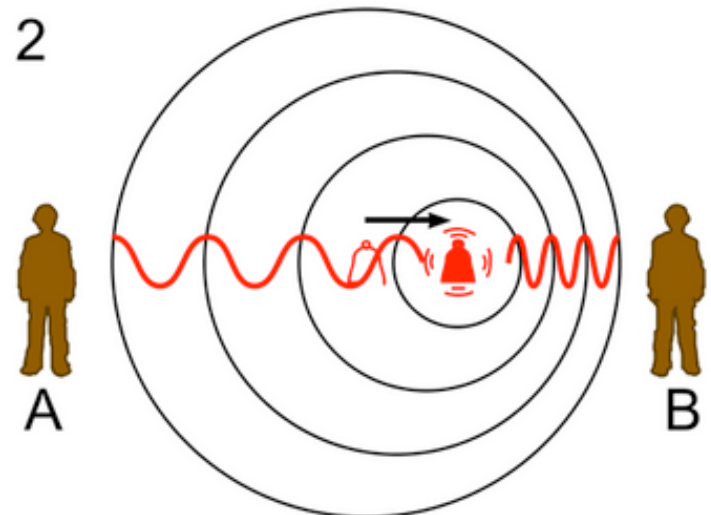
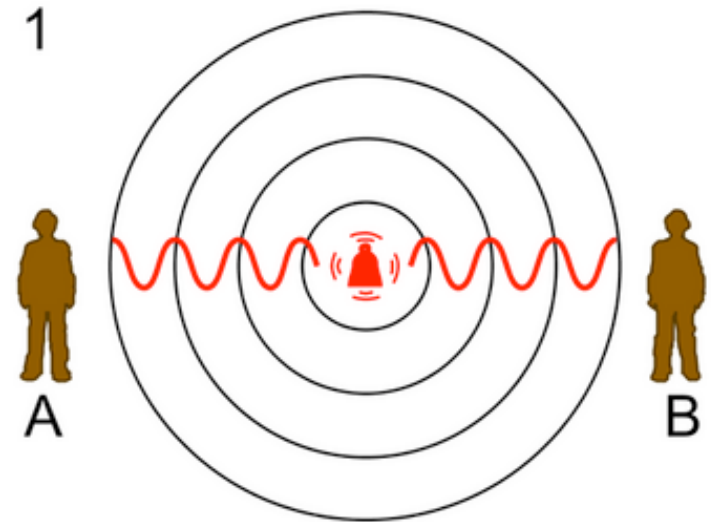
Each twin measures his own time with his own clock in his own inertial system. Both clocks are measuring proper time.

The hyperbolas calibrate proper time on the graph.

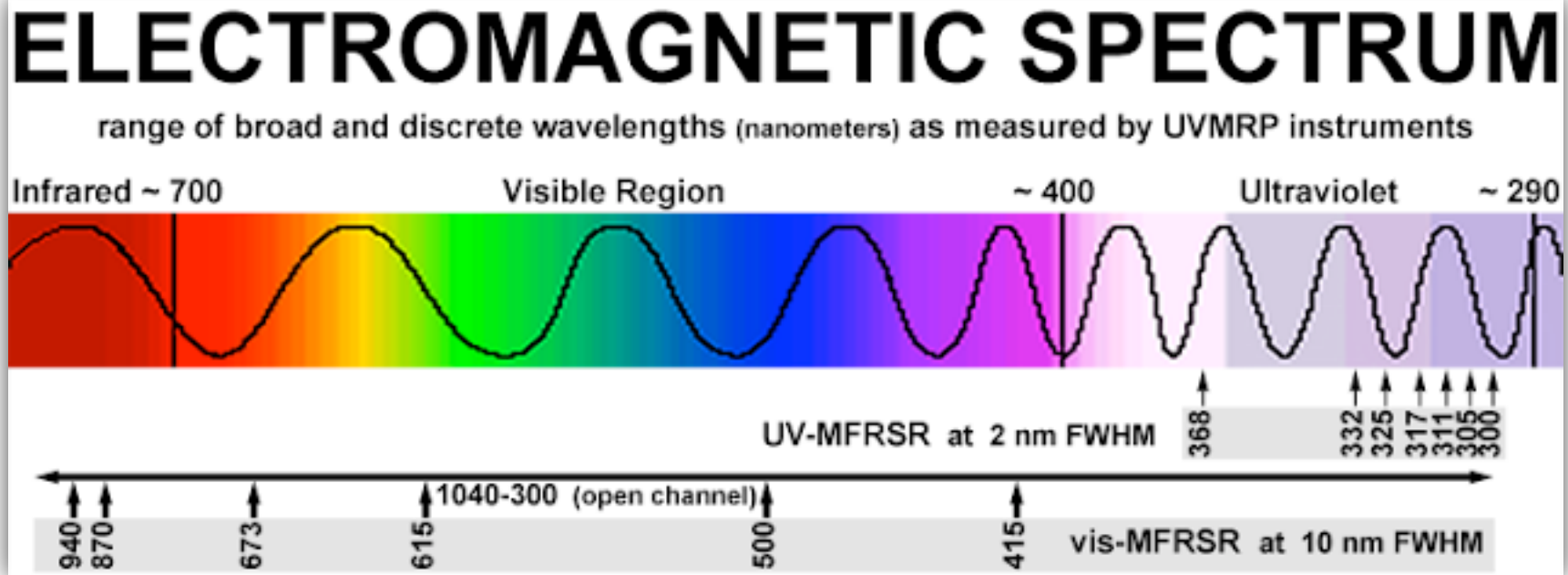
Doppler-effekten

Klassisk effekt, som vi kender bedst fra lyd:

1. Lydkilde statisk relativ til to iagtagere A og B
 - ✓ Samme frekvens observeret af A og B
2. Lydkilde bevæger sig fra A mod B:
 - ✓ A observerer højere bølgelængde (lavere frekvens) end udsendt
 - ✓ B observerer lavere bølgelængde (højere frekvens) end udsendt



Lys: Sammenhæng mellem bølgelængde og farve



Rød: Lang bølgelængde / lav frekvens
Blå: Kort bølgelængde / høj frekvens

Bølgebevægelse:
hastighed = bølgelængde * frekvens
For lys: $c = \lambda * \nu$

Relativistisk Doppler-effekt

Udledes analogt til den klassiske Doppler-effekt.

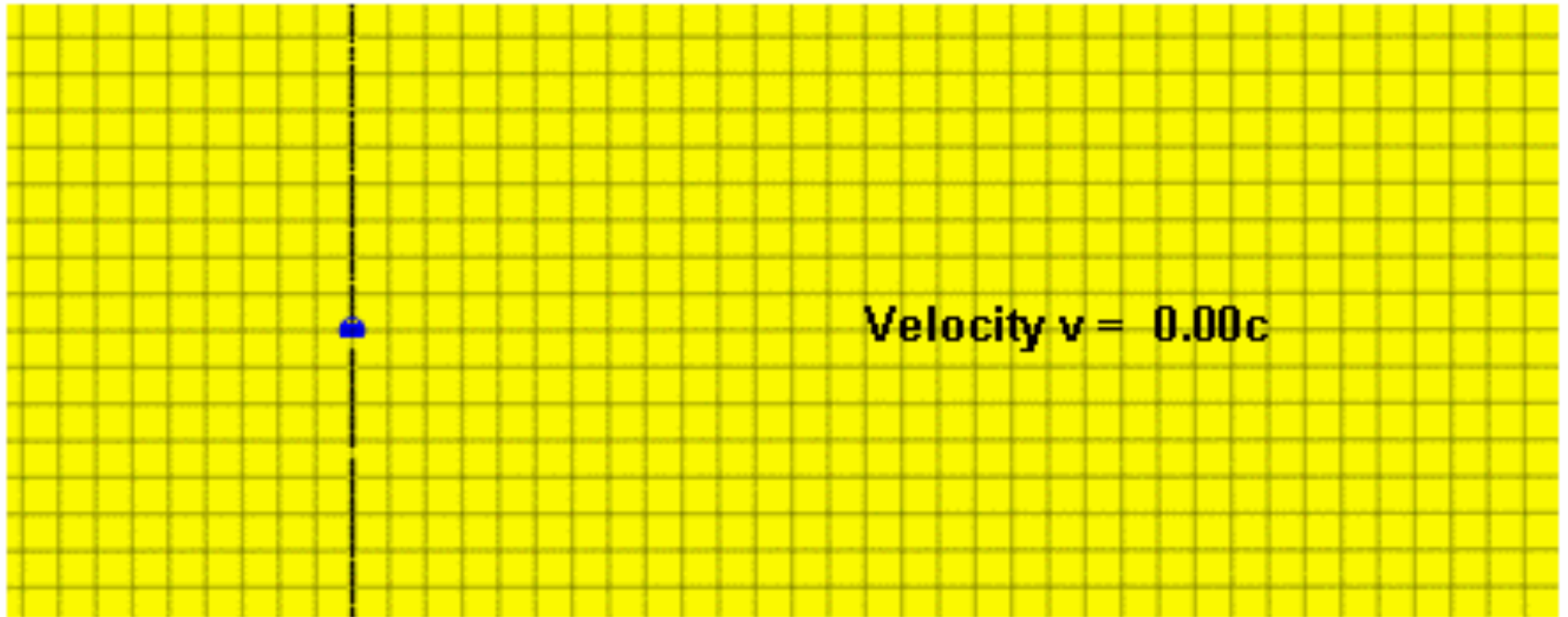
Men én kvalitativ vigtig forskel:

- Klassisk Doppler-effekt afhænger af **både kildens og iagttagerens hastighed i forhold til udbredelsesmediet**
- Relativistisk Doppler-effekt afhænger (selvfølgelig!) udelukkende **af den relative hastighed af iagttager i forhold til kilde.**
 - Kilde og iagttager fjerner sig med hinanden med hastigheden u :

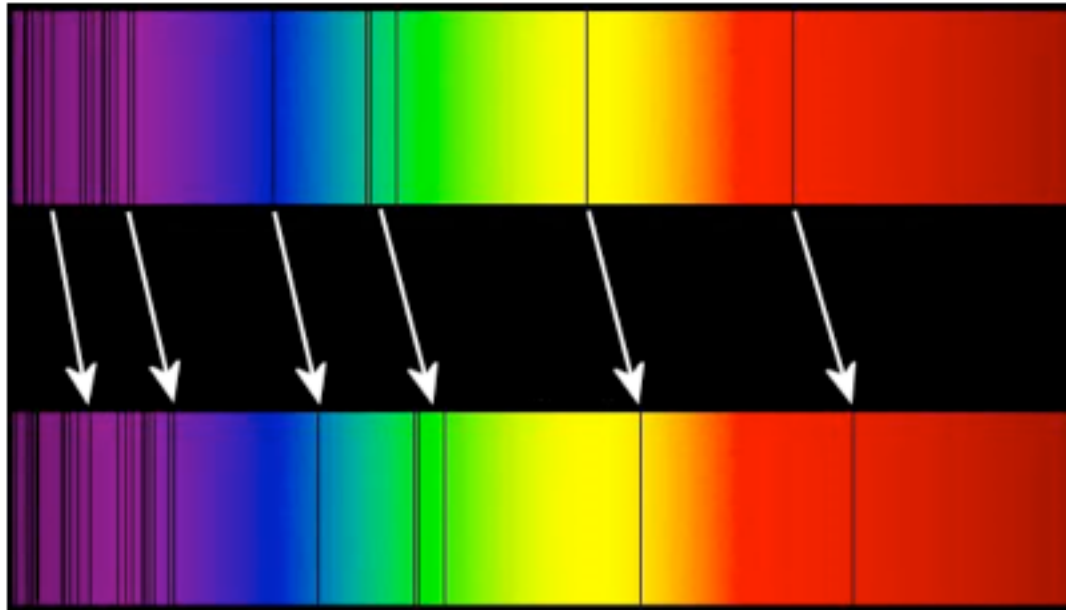
$$\frac{\nu_{\text{rel}}}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}$$

Fjerner sig ($u > 0$): Lavere frekvens iagttages: **Rødforskydning**
Nærmer sig ($u < 0$): Højere frekvens iagttages: **Blåforskydning**

Aberration og Doppler-effekt



Doppler-skift af spektrallinjer



Fra laboratoriet kender vi spektrallinjernes bølgelængde.
Ved at observere spektrallinjer fra stjerner, kan vi ved at måle
Doppler-skiftet bestemme stjernernes hastighed i forhold til Jorden.

Relativistisk mekanik

Bevarelseslove er fundamentale i fysikken:

- Klassisk (*Newton'sk*) fysik:

- Massebevarelse

m [mængden af stof]

- Impulsbevarelse

impuls : $p = mv$

- Energibevarelse (elastiske sammenstød)

kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$

- *Relativistisk fysik:*

- impulsbevarelse

relativistisk impuls : $p = \gamma mv$

- energibevarelse (altid!)

relativistisk energi : $E = \gamma mc^2$

n.b.: **ingen massebevarelse**

Disse relativistiske definitioner følger af tre krav:

① Relativistisk energi- og impulsbevarelse.

② Relativistisk invarians: Samme form i ethvert inertialsystem

③ Konformitet med klassisk mekanik

- går mod klassiske udtryk for små hastigheder)

Relativistisk energi:

$$E = \gamma mc^2.$$

- Specialtilfælde: Legeme i hvile ($v = 0 \Rightarrow \gamma = 1$):

Hvileenergi

$$E_0 \equiv mc^2.$$

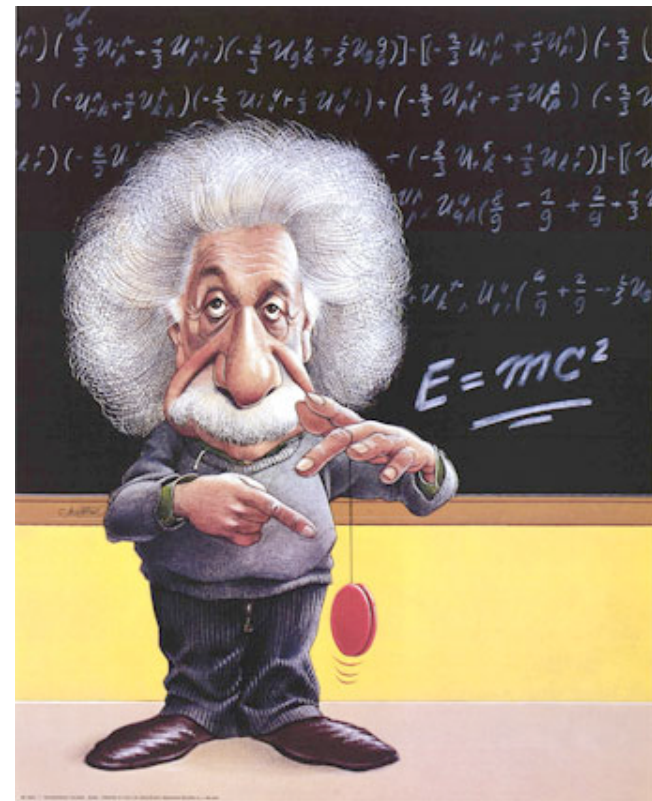
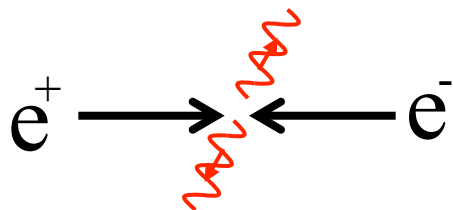
- Energi og masse er ækvivalente størrelser:
 - Energi kan omdannes til masse; masse kan omdannes til energi
 - Vekselkursen er c^2 ($= 9 \times 10^{16}$ Joule/kg)
- Energi af makroskopisk legeme (fx 1 kg):
 - Termisk: ~ 100 kJoule
 - Kemisk bindingsenergi: 45 MJoule (benzin)
 - Uran fission: 8×10^{13} Joule
 - 4 H \rightarrow He (Solen) 0.7% af $mc^2 = 6 \times 10^{14}$ Joule
 - Annihilation (stof + antistof): $mc^2 = 9 \times 10^{16}$ Joule

$$E_0 = mc^2$$

Einsteins berømte ligning betyder, at

- Masse er en form for energi
- Energi kan transformeres fuldstændig til masse og omvendt!
 - Der var absolut ingen evidens for dette på Einsteins tid. En modig forudsigelse baseret på æstetik.
- Eksempel: partikel + antipartikel annihilerer fuldstændig og skaber en ren energitilstand

elektron + positron \rightarrow foton + foton

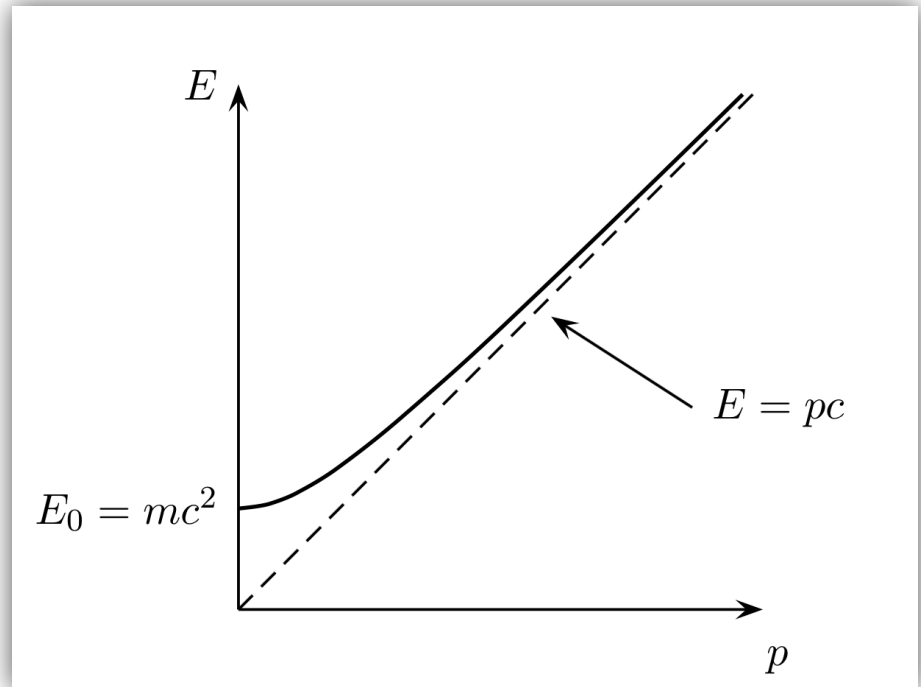


Denne proces anvendes i dag i medicinen til PET scanning.
PET = positron-electron tomography

Masse, energi og impuls

Hyperbolsk sammenhæng

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.$$



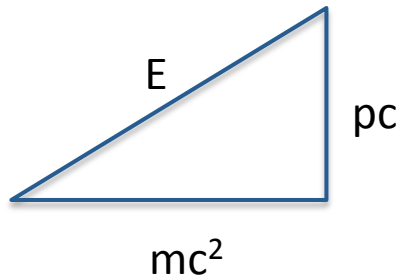
- For hyperrelativistisk partikel ($mc^2 \ll E$): $E \simeq pc$
- Masseløs partikel: Gå til grænsen $m=0$: $E = pc$
- Bemærk: Masseløse partikler meningsløse i klassisk mekanik: $F=ma \Rightarrow a=F/m$

Masse, energi og impuls

Generel relation mellem

- masse: m
- energi: E
- impuls: p

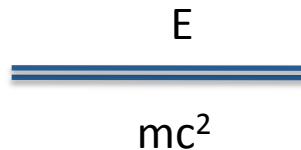
$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$$



Partikel i hvile:

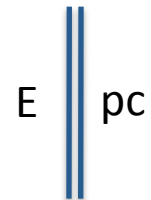
- impulsen er nul
($p = 0$)

$$E = mc^2$$



Vi kan også have
masseløse partikler!!!
($m = 0$)

$$E = pc$$



Enhver masseløs partikel bevæger sig med lyshastigheden:

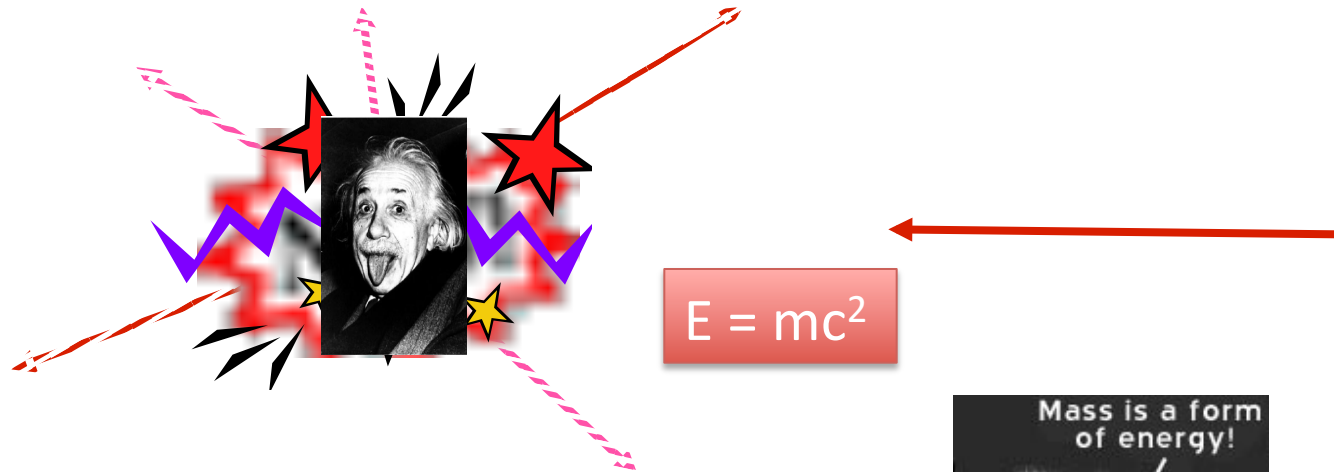
- kraftbærende partikler: foton / gluon / graviton(??)
- stofflige partikler: neutrinoer (men disse har nu nok alle meget små masser)

Partikelfysikken

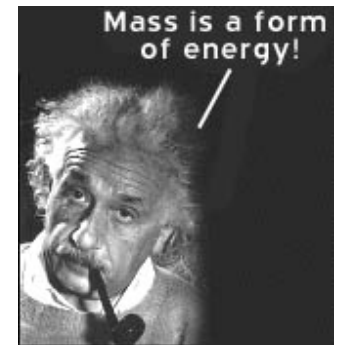
I partikelfysikken er relativitetsteori hverdag

For at udforske nye partikler er vi nødt til at skabe dem

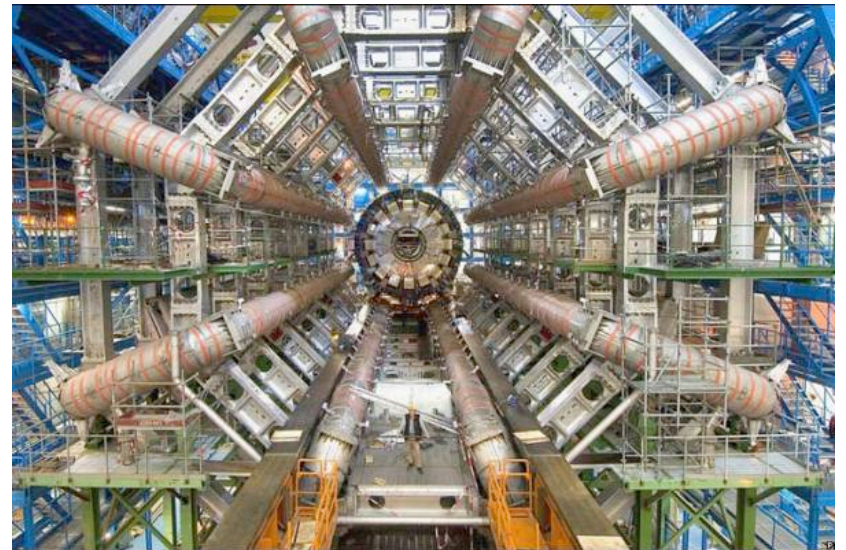
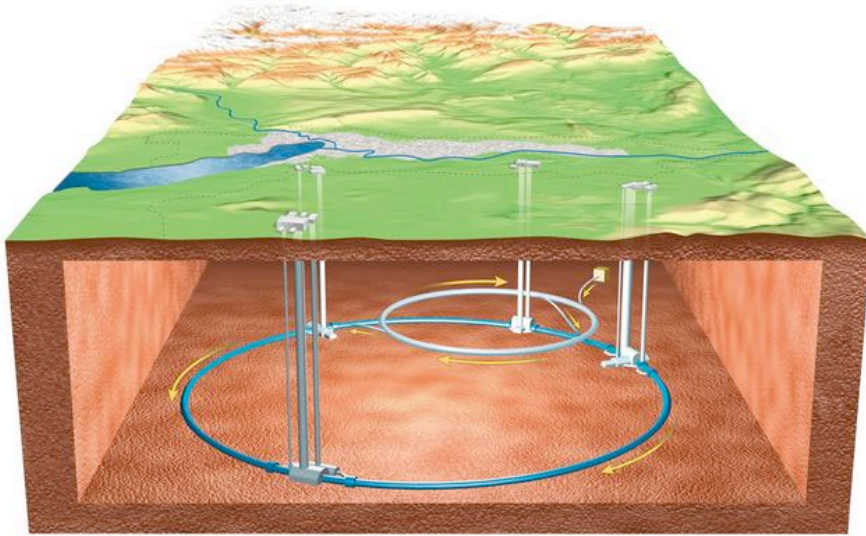
Dette kan gøres ved at **annihilere** to partikler og skabe nye fra den energi, der bliver frigjort



**Vi skal bruge en partikelaccelerator!
Nyeste skud på stammen: LHC**

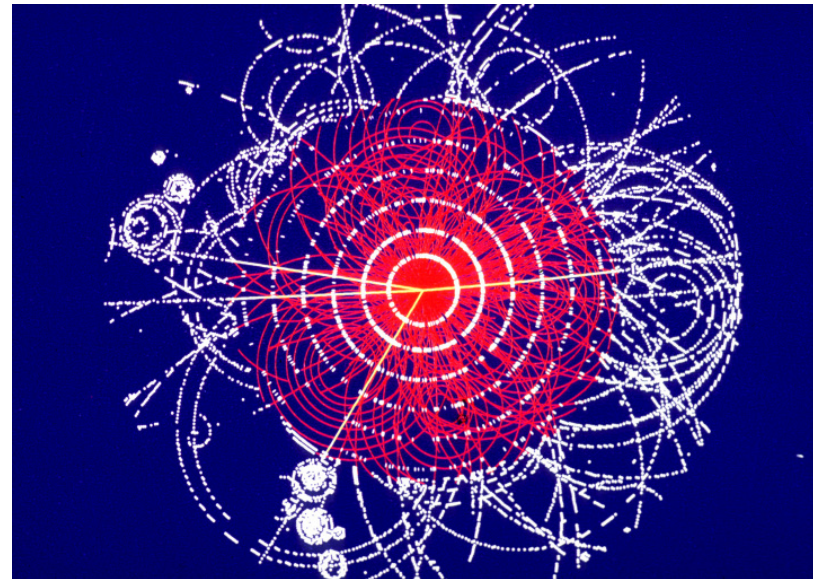


LHC-acceleratoren ved CERN

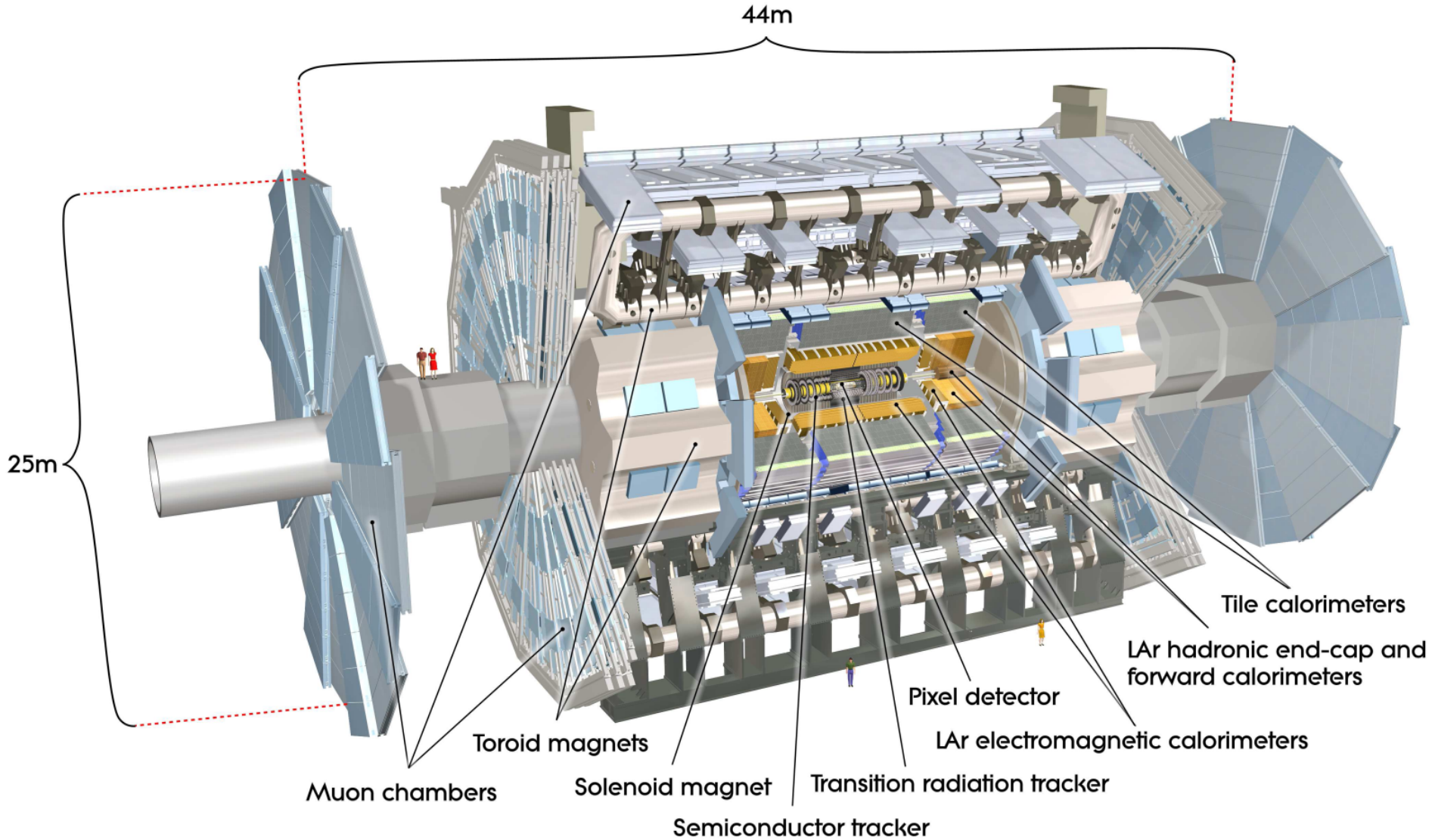


LHC-acceleratoren

- LHC = Large Hadron Collider
- Sammenstød: proton + proton
- Proton-energi: $E = 6500 \text{ GeV}$
- Protonens hvileenergi: $E_0 = mc^2 = 0.938 \text{ GeV}$
- Protonernes gamma-faktor: $\gamma = 6500/0.938 = 7000$
- Protonernes hastighed: 99.9999991% af lyshastigheden
- Formål: produktion og studie af nye tunge partikler ved omdannelse af kinetisk energi til masse
 - Her produktion af en Higgs-partikel (simuleret begivenhed)



ATLAS-detektoren



Kæmpestort 3-dimensionelt fotografiapparat