

Introduktion til den specielle relativitetsteori

Mogens Dam

Niels Bohr Institutet

3. februar 2004

3. udgave

Forord

Denne indføring i den specielle relativitetsteori er i udgangspunktet baseret på Kapitel 8 og 9 i Ole Knudsens og Olaf Pedersens *Lærebog i mekanik*. Andenudgaven fra 2003 var i forhold til førsteudgaven fra 2002 omstruktureret og på visse områder omskrevet. Specielt gjaldt dette Kapitel 6, hvor filosofien ændredes til at benytte bevarelsen af 4-impuls som udgangspunkt for den relativistiske mekanik. I denne tredje udgave er diverse tastefejl søgt korrigeret, ligesom at par diskussioner er uddybet i et forsøg på at gøre stoffet lettere tilgængelig.

Mogens Dam
København
Februar 2004

Indhold

1	Fra det Newtonske til det specielle relativitetsprincip	1
1.1	Relativitet	1
1.2	Newtons bevægelseslove og inertialsystemer	1
1.3	Galilei-transformationen	3
1.4	Det Newtonske relativitetsprincip	4
1.5	Æteren	5
1.6	Michelson-Morley-forsøget	7
1.7	Lorentz's æterteori	11
1.8	Det specielle relativitetsprincip	12
2	Lorentz-transformationen	14
2.1	Den specielle relativitetsteoris grundlag	14
2.2	Revision af fundamentale begreber	15
2.2.1	Samtidighed	15
2.2.2	Længde	17
2.2.3	Varighed	18
2.3	Inertialsystemers homogenitet og isotropi	19
2.4	Koordinat-gitteret	19
2.5	Udledning af Lorentz-transformationen	20
2.6	Lorentz-transformationen på differens- og differential-form	25
2.7	Kvadrerede former	26
2.8	Den relativistiske hastighedsgrænse	27
2.9	Rumtidsdiagrammer	28
2.10	Grafisk repræsentation af Lorentz-transformationen	29
2.10.1	Passive Lorentz-transformationer	30
2.10.2	Aktive Lorentz-transformationer	32
3	Relativistisk kinematik	36
3.1	Længdeforkortningen	36
3.1.1	Eksempel: Volumenændring	37
3.1.2	Eksempel: Transformation af vinkler	37
3.2	Tidsforlængelsen	38
3.2.1	Sammenhængen mellem længdeforkortning og tidsforlængelse	40
3.2.2	Feynman-uret	40
3.2.3	Tvillingeparadokset	41

3.2.4	Eksempel: Direkte påvisning af tidsforlængelsen	42
3.2.5	Påvisning af tidsforlængelsen ved hjælp af partikelhenfald	43
3.2.6	Eksempel: Kosmisk stråling ved jordoverfladen	43
3.3	Transformation af hastigheder	44
3.3.1	Størrelsen af sammensatte hastigheder	44
3.3.2	Transformation af γ -funktionen	45
3.3.3	Parallelle hastigheder	45
3.3.4	Eksempel: Retningen af en bevægelse	46
4	Relativistisk optik	48
4.1	Doppler-effekten	48
4.1.1	Den klassiske Doppler-effekt	48
4.1.2	Den relativistiske Doppler-effekt	50
4.1.3	Eksempel: Ives-Stilwell forsøget	53
4.2	Lysets aberration	54
4.2.1	Klassisk aberration	56
4.2.2	Relativistisk aberration	56
4.3	Den tilsyneladende form af bevægede objekter	57
5	Rumtiden og fire-vektorer	61
5.1	Rumtiden	61
5.2	Tre-dimensionale rumtidsdiagrammer	62
5.3	Lyskegler og intervaller	63
5.4	Tre-vektorer	64
5.5	Fire-vektorer	67
5.6	Fire-vektores geometri	68
5.7	Egentiden	69
5.8	Fire-hastigheden	70
5.8.1	Eksempel: Hastighedstransformationerne fra 4-hastigheden	71
5.9	4-accelerationen	71
5.9.1	Transformation af acceleration	72
6	Relativistisk mekanik	74
6.1	Forudsætninger	74
6.2	Den nye mekaniks aksiomer	75
6.2.1	Fire-impulsen og den relativistiske impuls	75
6.2.2	Fire-impuls-bevarelse	76
6.2.3	Eksempel: Impulsbevarelse i stød mellem to partikler	76
6.3	Relativistisk energi	78
6.3.1	Eksempel: Ækvivalensen mellem indre energi og masse	79
6.3.2	Eksempel: $E_0 = mc^2$ og makroskopiske legemer	81
6.3.3	Eksempel: Solens udstråling	81
6.4	De relativistiske bevarelseslove	81
6.5	Sammenhængen mellem energi og impuls	82
6.6	Masseløse partikler	83

6.6.1	Doppler-effekten fra transformationen af fotonens 4-impuls	83
6.6.2	Eksempel: Compton-spredning	84
6.7	Tyngdepunktssystemet og den invariante masse	85
6.7.1	Eksempel: Elektron-positron-sammenstød	86
6.7.2	Tærskelenergien	87
6.8	Bindingsenergien	89
6.8.1	Eksempel: Brintatomets bindingsenergi	89
6.8.2	Eksempel: Deuteronens bindingsenergi	90
6.8.3	Eksempel: Solens og stjerners energiproduktion	90
6.9	Reaktionsenergien	90
6.9.1	Eksempel: Neutron-henfald	91
6.10	Fire-kraften og tre-kraften	91
6.10.1	Transformationsregler for kraften	92
6.11	Den relativistiske bevægelsesligning	93
6.11.1	Cyklotronbevægelsen	93
6.11.2	Hyperbolsk bevægelse	94
6.11.3	Eksempel: Muon-acceleratoren	96
A Invariant? Bevaret? Konstant?		101
B Rækkeudvikling i relativitetsteorien		103

Kapitel 1

Fra det Newtonske til det specielle relativitetsprincip

1.1 Relativitet

Kernen i Einsteins specielle relativitetsteori fra 1905 er, at den, sammen med hans generelle relativitetsteori fra 1915, grundlægger den moderne fysiks teorier for rum og tid. Dette indebærer en afløsning af de Newtonske begreber *absolut rum* og *absolut tid*.

Idet samtlige fysiske processer udfolder sig i rum og tid, må fysikkens love til enhver tid være i overensstemmelse med de rådende teorier for disse grundlæggende begreber. Såfremt man således udskifter teorierne for rum og tid, må man nødvendigvis tilpasse de fysiske love i overensstemmelse hermed. Denne proces gav ophav til udviklingen af den “relativistiske fysik”, som har medført bemærkelsesværdige forudsigelser (såsom at masse og energi er ækvivalente størrelser), men som ikke desto mindre i overvældende grad er blevet bekræftet eksperimentelt.

I fysikken henviste ordet *relativitet* oprindeligt til opgivelsen af begrebet *absolut rum*, som havde været et efterstræbt mål lige siden Newtons dage. For skønt den klassiske mekanik i sig selv ikke tillader påvisning af “absolut hvile” og derfor advokerer et relativt rumbegreb, hævdede Newton eksistensen af et særligt absolut rum som den primære scene for sin mekanik. Efter fremkomsten af Maxwells teori for elektromagnetismen forklarede lyset i slutningen af det 19. århundrede som en udbredelse af bølger i den iøvrigt uiagttagelige *æter*. Det var da muligt at definere et *absolut rum*; nemlig det, der var i hvile i forhold til æteren. Med fremsættelsen af det *specielle relativitetsprincip*, som omfatter alle fysiske fænomener overhovedet, gjorde Einstein i 1905 endegyldig op med ideen om et absolut rum. Som et overraskende men uundgåelig biprodukt ledte princippet samtidig til, at man måtte opgive det for den Newtonske teori grundlæggende begreb *absolut tid*.

1.2 Newtons bevægelseslove og inertialsystemer

Grundlæggende for den klassiske mekanik er Newtons tre bevægelseslove, af hvilke den første (inertiens lov) kan opfattes som et specialtilfælde af den anden:

Newtons 1. lov: Et legeme, som ikke påvirkes af nogen kraft, bevæger sig med konstant hastighed

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \text{konstant},} \quad (1.1)$$

hvor $\mathbf{r}$ er legemets stedvektor.

Newtons 2. lov: Et legemes acceleration, $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$, er proportional med kraften, $\mathbf{f}$, der virker på legemet,

$$\boxed{\mathbf{f} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt},} \quad (1.2)$$

hvor m er legemets inertielle masse.

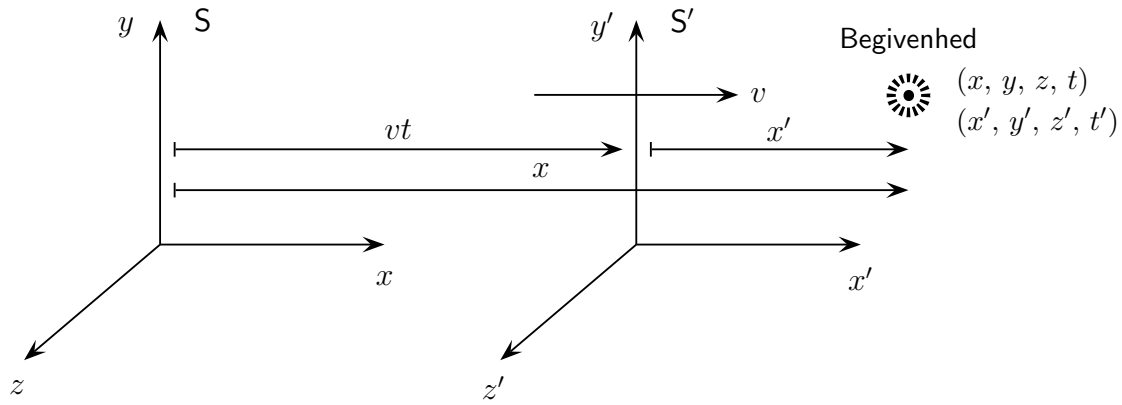
Newtons 3. lov: Hvis et legeme A påvirker et legeme B med en kraft $\mathbf{f}_{AB}$, så vil B påvirke A med kraften $\mathbf{f}_{BA}$, som er modsatrettet og af samme styrke:

$$\boxed{\mathbf{f}_{BA} = -\mathbf{f}_{AB}.} \quad (1.3)$$

Ved anvendelsen af fysiske lovmæssigheder fastlægger man oftest et koordinatsystem, i forhold til hvilket man kan bestemme fysiske størrelser så som position, hastighed, elektrisk felt, etc. Da man ikke kan måle en partikels stedvektor i forhold til et abstrakt matematisk punkt, men kun dens afstand fra et eller flere materielle legemer, kan et koordinatsystem kun fastlægges ved at referere til et eller andet materielt objekt. Et sådant stift referencesystem og dens logiske udvidelse kaldes i fysikken et *referencesystem*. Som et eksempel definerer Jorden et referencesystem i hele Universet. Til ethvert referencesystem kan vi knytte et retvinklet koordinatsystem på mange måder ved at vælge tre indbyrdes ortogonale planer og måle et punkts koordinater x , y , z som afstandene til disse planer. Dette forudsætter selvsagt at rummets geometri er Euklidisk¹ – en antagelse, som regnedes for indlysende indtil fremkomsten af den generelle relativitetsteori i 1915! Yderligere må tiden t være defineret i hele rummet, idet den indgår i de fysiske love. I den Newtonske teori, hvor tidens gang er nøje sammenknyttet med den første lov (frie partikler tilbagelægger lige store afstande i lige lange tidsrum) er tiden absolut og tikker af sted med samme rate overalt i Universet. Kun valget af enheder og nulpunkt kan vælges frit fra referencesystem til referencesystem.

Et referencesystem, i hvilket Newtons først lov gælder, kaldes et *inertialsystem*. Sådanne systemer foretrækkes ofte, idet, som det vil fremgå af det følgende, alle Newtons love heri har gyldighed.

¹En Euklidisk geometri er essentielt en geometri hvori den Pythagoræiske læresætning gælder. I et 2-dimensionalt plan er længden Δr af et vilkårligt linie-segment dermed givet ved $(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, hvor Δx og Δy er koordinatdifferencerne i et vilkårligt retvinklet koordinatsystem i planet. Dette er sandt for flade overflader (f.eks. stuegulvet) men ikke for krumme overflader (f.eks. overfladen på en ballon). I det 3-dimensionale rum gælder tilsvarende sammenhængen $(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ i det Euklidiske tilfælde. Modsætningen hertil er et "krumt" rum, hvor man i analogi til det 2-dimensionale tilfælde må (forsøge at) forestille sig, at rummet krummer i en ny, fjerde dimension.



Figur 1.1: En begivenhed betragtes fra to inertialsystemer i standardkonfigurationen.

1.3 Galilei-transformationen

Lad os betragte to referencesystemer S og S', som bevæger sig med en jævn, retlinet hastighed v i forhold til hinanden. Der benyttes identiske enheder for længde og tid i de to systemer. De to koordinatsystemer orienteres således i forhold til deres indbyrdes bevægelse, at begyndelsespunktet i S' bevæger sig langs den positive x -akse i S; at x - og x' -akserne er sammenfaldende; og at y - og y' -akserne og dermed ligeledes z - og z' -akserne til stadighed er parallelle. Yderligere nulstilles urene, således at $t = t' = 0$, idet de to systemer er sammenfaldende. To systemer indrettet på denne måde siges at være i *standardkonfiguration* (se Figur 1.1).

Antager vi nu, at en *begivenhed* (så som udsendelsen af et lysglimt fra en pære eller sammenstødet mellem to punktformede partikler) har koordinaterne (x, y, z, t) i S og (x', y', z', t') i S', så er det klassiske (og intuitive) forhold mellem disse to koordinatsæt givet ved *Galilei-transformationen*:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t, \end{aligned} \tag{1.4}$$

hvor v er hastigheden af S' i forhold til S. Rigtigheden af dette indses umiddelbart ved at betragte Figur 1.1, idet afstanden mellem de to begyndelsespunkter er vt . Det ses, at antagelsen om absolut tid er indeholdt i Galilei-transformationen: Tiden i de to systemer er identisk uafhængig af disses indbyrdes bevægelse.

Ved at differentiere venstresiderne af (1.4) med hensyn til t' og højresiderne med hensyn til t får vi umiddelbart de klassiske hastighedstransformationer, som sammenknytter

hastighedskomponenterne for en partikel i bevægelse i S med dem i S':

$$\boxed{\begin{aligned} u'_x &= u_x - v, \\ u'_y &= u_y, \\ u'_z &= u_z, \end{aligned}} \quad (1.5)$$

hvor $(u_x, u_y, u_z) = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ og $(u'_x, u'_y, u'_z) = (dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt')$. Sammensætning af parallelle hastigheder foregår altså ved simple addition: Hvis man f.eks. går fremad i et tog med 5 km/t (u'_x), og toget kører 80 km/t (v), vil man bevæge sig med 85 km/t (u_x) i forhold til banelegemet. I den specielle relativitetsteori vil dette ikke længere være tilfældet.

Ved at differentiere endnu engang, fås transformationsreglerne for accelerationen

$$\boxed{\begin{aligned} a'_x &= a_x, \\ a'_y &= a_y, \\ a'_z &= a_z, \end{aligned}} \quad (1.6)$$

hvor $a'_x = du'_x/dt'$ etc. Accelerationen er altså den samme i de to systemer: Vi siger, at accelerationen er *invariant* over for Galilei-transformationen.

Ved benyttelse af vektor-notation tager de ovennævnte sammenhænge den mere koncise form

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} - \mathbf{v}, \\ \mathbf{a}' &= \mathbf{a}, \end{aligned}} \quad (1.7)$$

hvor $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{a}$ er henholdsvis positions-, hastigheds- og accelerations-vektorene i S, de mærkede symboler er de tilsvarende størrelser i S' og $\mathbf{v}$ er hastigheden af S' relativ til S.

1.4 Det Newtonske relativitetsprincip

Vi har set, at et inertialsystem er et referencesystem, i hvilket inertiens lov gælder. Antag nu, at systemet S på Figur 1.1 er et inertialsystem, således at alle frie partikler heri bevæger sig jævnt og retlinet. Idet, ifølge (1.5), konstante hastigheder i S transformerer over i konstante hastigheder i S', indser vi, at alle frie partikler ligeledes vil bevæge sig jævnt og retlinet i S', som derfor også vil være et inertialsystem. Modsat indser vi, at *kun* systemer der bevæger sig jævnt og retlinet i forhold til S kan være inertialsystemer. Thi alle faste punkter i ethvert inertialsystem er potentielt frie partikler og må derfor bevæge sig jævnt og retlinet i forhold til S. Og alle punkter i et givet referencesystem må åbenbart bevæge sig med samme hastighed i forhold til S, idet systemet ellers ikke kan være stift. Gruppen af alle inertialsystemer består altså af samtlige referencesystemer, der bevæger sig jævnt og retlinet i forhold til et givet inertialsystem, f.eks. det absolutte rum, skulle et sådant eksistere.

Fra invariansen af accelerationen, (1.7)(iii), ser vi, at alt vi behøver for at Newtons tre love skal være invariante mellem inertialsystemer er aksiomer, som udsiger, at (i) massen

er invariant, $m' = m$, og (ii) enhver kraft er invariant, $\mathbf{f}' = \mathbf{f}$. Begge disse antagelser er indeholdt i Newtons teorier. Den resulterende egenskab ved den Newtonske mekanik, at den er gyldig i ethvert inertialsystem, kaldes *det Newtonske* (eller *den klassiske mekaniks*) *relativitetsprincip*. Den kan sammenfattes på følgende måde:

Det er ikke muligt på grundlag af *mekaniske* fænomener at skelne mellem inertialsystemer eller at udpege et særligt udmærket inertialsystem.

Newton var, som Galilei før ham, dybt imponeret over dette resultat. Den klassiske mekaniks relativitetsprincip er selvfølgelig en forudsætning for, at vi kan anvende Newtons love på fysiske fænomener i vores dagligdag, selvom Jorden bevæger sig med stor hastighed gennem rummet. Galilei havde observeret det mere beskedne forhold, at på et skib udfolder alle mekaniske fænomener sig på samme måde uafhængig af, om skibet er i hvile, eller om det bevæger sig med jævn hastighed gennem stille vand. I dag har vi personlige erfaringer med denne lighed, hver gang vi f.eks. foretager en tog- eller flyrejse. Omvendt tjener nu selvfølgelig enhver manifestation af det Newtonske relativitetsprincip til styrkelsen af den antagede invarians af masse og kraft, på hvilken den bygger.

Det store spørgsmål er nu, hvorvidt relativiteten af den Newtonske mekanik er et simpelt lykketræf, eller om den afspejler en dyb sandhed om Naturen. Hvis det sidste er tilfældet, er det sandsynligt, at relativiteten også vil være gældende på områder udover mekanikken.

1.5 Æteren

Vi skal nu se på, hvorvidt, og i givet fald hvordan, man kunne tænke sig blandt alle inertialsystemer at udpege et særligt, som tilsvarende det absolutte rum. Det synes, at have været Descartes (1596–1650), som først indførte ideen om en allestedsnærværende *æter*, som udbredelsesmedium for ellers uforklarlige vekselvirkninger. Legemer, som er i indbyrdes fysisk kontakt, kan skubbe til hinanden, men det krævede en æter at formidle kraften mellem en magnet og sømmet den tiltrækker, eller mellem Månen og tidevandene. En generation senere legede Newton med ideen om en æter til at forklare tyngdekraften. For Newtons samtidige, så som Hooke og Huyghens, var æterens vigtigste rolle at være bærer af lysbølger. De forestillede sig lyset som svingninger i en elastisk *lysæter*, på samme måde som lydbølger er svingninger i luften. Lysæteren udviklede sig til at være en hovedhjørnestein i den elektromagnetiske teori, som den udvikledes af Maxwell (1831–1879), og blev et sandsynligt pejlemærke for det absolutte rum.

I Maxwells elektromagnetiske teori optræder en konstant c med enheder som en hastighed. Denne konstant var oprindeligt defineret ved forholdet mellem den elektrostatiske og den elektrodynamiske enhedsladning, og kan bestemmes gennem simple laboratorieforsøg, som involverer ladninger og strømme. Yderligere forudsagde teorien, at ændringer i det elektromagnetiske felt i vakuum udbreder sig med denne hastighed c . Den forudsagde med andre ord eksistensen af elektromagnetiske bølger. Det overraskende var, at hastigheden c var præcist sammenfaldende med den kendte lyshastighed. Dette fik Maxwell til at formode, at lys måtte være elektromagnetiske bølger. Som bærer for sådanne bølger, genoplivede Maxwell den gamle æterteori, og c tolkedes herefter som udbredelseshastigheden

af elektromagnetiske bølger i forhold til æteren. Det var da muligt at definere et særligt *absolut* inertialsystem, nemlig det der var i hvile i forhold til æteren, og dette system identificerede man derfor med Newtons absolutte rum. Det absolutte rum skulle som følge heraf kunne udpeges gennem studiet af elektromagnetiske fænomener, altså først og fremmest gennem studiet af lys.

Indskud 1.1 Lysets tøven

Den første måling af lysets hastighed foretoges af Ole Rømer (1644–1710) i 1676, idet han viste, at visse uregelmæssigheder ved Jupiters måners formørkelser kun kunne forklares ud fra en endelig lyshastighed. Disse formørkelser kunne indtræffe op til 16 minutter senere end det beregnede tidspunkt, svarende til at lyset gennemløber jordbanediameteren 3×10^8 km. Dette giver den tilnærmede værdi for lysets hastighed

$$c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

Indskud 1.2 Emissionsteorien

Om lysets fysiske natur havde der i det 17. århundrede udviklet sig to forskellige forestillinger: i) ondulationsteorien, hvor lyset opfattes som bølger, og ii) emissionsteorien, hvor lyset opfattes som småpartikler udsendt af lyskilden. Efter fremkomsten af Maxwells elektromagnetisme blev ondulationsteorien totalt dominerende i den sidste del af det 19. århundrede. Lad os alligevel et øjeblik betragte emissionsteorien.

Idet lyset altså opfattes som småpartikler udsendt af kilden, må det have en konstant hastighed $|\mathbf{c}|$ i forhold til kilden i enhver retning. Bevæges lyskilden med hastigheden $\mathbf{v}$ i forhold til iagttageren, må denne da vente at finde lyshastigheden $\mathbf{c} + \mathbf{v}$. Forudsætningen herfor er, at lyshastigheden følger loven om simpel vektoraddition, ligesom tilfældet er med hastigheder af materielle partikler ifølge Galilei-transformationen.

Herved fører emissionsteorien til modstrid med erfaringerne, hvilket bl.a. påvistes på simpel måde i 1913 af den hollandske astronom de Sitter (1872–1934). Han betragtede et dobbeltstjernesystem bestående af en mørk centralstjerne i hvile i afstanden l fra Jorden, og en lysende ledsagerstjerne, der bevæger sig i en cirkulær bane omkring centralstjernen med hastigheden v og omløbstiden T . Denne omløbstid kan bestemmes direkte ved observation.



Figur 1.2: En dobbeltstjerne i afstanden l fra Jorden

På Figur 1.2 er ledsagerstjernen vist i to yderstillinger A og B, i hvilke den bevæger sig henholdsvis hen imod og bort fra Jorden. Lad ledsageren passere A til tiden nul. Det udsendte lys vil her have hastigheden $c + v$ i retningen mod Jorden og nå denne efter et tidsrum bestemt ved

$$t_1 = \frac{l}{c + v}.$$

Lyset fra positionen B når derimod Jorden til tiden

$$t_2 = \frac{T}{2} + \frac{l}{c - v}.$$

Når stjernen er vendt tilbage til A efter et helt omløb, udsender den lys, som når Jorden til tiden

$$t_3 = T + \frac{l}{c + v}.$$

Herefter skulle vi vente, at de to halvdele af banen gennemløbes i forskellig tid set fra Jorden, nemlig

$$AB \text{ i tiden } \tau_1 = \left(\frac{T}{2} + \frac{l}{c - v} \right) - \frac{l}{c + v} = \frac{T}{2} + \frac{2vl}{c^2 - v^2}$$

$$BA \text{ i tiden } \tau_2 = \left(T + \frac{l}{c + v} \right) - \left(\frac{T}{2} + \frac{l}{c - v} \right) = \frac{T}{2} - \frac{2vl}{c^2 - v^2}$$

Dette er i modstrid med observationerne, efter hvilke ledsageren bruger samme tid til at gå fra den ene yderstilling til den anden uafhængigt af retningen. Ydermere skulle forskellen mellem de to tidsrum

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{4vl}{c^2 - v^2} \quad (1.8)$$

kunne antage værdier, der er større end omløbstiden selv. Dobbeltstjernen β Aurigae har således $T = 4$ døgn, $v = 100$ km/s og $l = 2 \times 10^{15}$ km, hvilket fører til $\tau_1 - \tau_2 \simeq 100$ døgn. Dermed skulle der være vendt helt op og ned på begivenhedernes rækkefølge, når de iagttages fra Jorden. Sådanne effekter er aldrig konstateret, hvorfor hypotesen om en konstant lyshastighed i forhold til lyskilden må opgives.

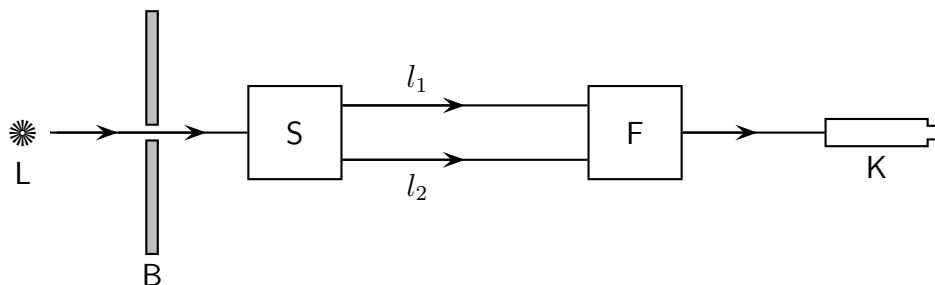
1.6 Michelson-Morley-forsøget

Med baggrund i Maxwell-teoriernes store succes fra omkring 1860 blev æteren som sådan et centralt emne for studie og debat i slutningen af det 19. århundrede. Der var således en betydelig interesse i at observere æterens tilstedeværelse gennem direkte målinger. I særdeleshed søgte man at fastlægge hastigheden af Jordens bevægelse gennem æteren, ved at måle "æter-vinden" gennem laboratoriet. Princippet i disse forsøg var, at lysets hastighed ville være forskellig, eftersom en lysstråle bevægede sig med eller mod Jordens bevægelse i forhold til æteren. Da Jordens hastighed i sin bane omkring Solen er omtrent 30 km/s, skulle man forvente, at dens hastighed i forhold til æteren på et eller andet tidspunkt i løbet af året *mindst* ville være af denne størrelse uafhængig af æterens bevægelse i forhold

til Solsystemet. Idet Jordens bane­hastighed tilsva­rer 1/10,000 af lyshastigheden, kunne effekten antages at være så lille, at den på daværende tidspunkt kun kunne påvises med fintmærkende interferometerforsøg.

Indskud 1.3 Interferometerforsøg

Princippet for et interferometer fremgår af Figur 1.3, hvor L betegner en lyskilde, som udsender monokromatisk lys med frekvens ν og bøl­gelængde λ . Efter at have passeret blændeåbningen B rammer lysstrålen den med S betegnede del af instrumentet, i hvilken den – f.eks. ved et arrangement af spejle, prisme eller linser – spaltes i to adskilte stråler, af hvilke den ene i løbet af tiden t_1 gennemløber vejen l_1 , mens den anden i tiden t_2 gennemløber vejen l_2 . Derefter forenes de atter ved hjælp af et passende optisk arrangement F , hvorefter de sammen passerer ind i kikkerten K .



Figur 1.3: Et interferometer

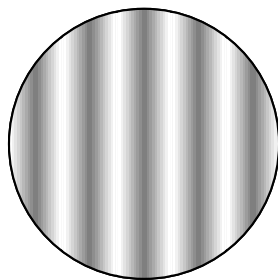
På strækningen l_1 vil der befinde sig νt_1 lysbølger, mens der på strækningen l_2 vil befinde sig νt_2 bølger. Forskellen mellem de to bølgetal er altså

$$\Delta n = \nu(t_1 - t_2). \quad (1.9)$$

Såfremt de to lystider er forskellige, vil de to stråler derfor have en faseforskel, når de atter mødes. Denne faseforskel betinger, hvad man ser i kikkerten.

Er Δn et helt tal p , vil de forenede stråler forstærke hinanden, således at vi måtte vente at se hele kikkertens synsfelt belyst. Er Δn derimod af formen $(p + \frac{1}{2})$ vil de to stråler svække hinanden, og har de samme intensitet, vil de udslukke hinanden, således at vi skulle vente at se hele kikkertens synsfelt formørket. I praksis forhindrer instrumenternes uundgåelige optiske ufuldkommenheder dette, således at kikkertens synsfelt i begge tilfælde tager sig ud som vist på Figur 1.4. Hvor der er lyse striber, har de to stråler forstærket hinanden, mens de mørke striber fremkommer, hvor de to stråler har svækket hinanden.

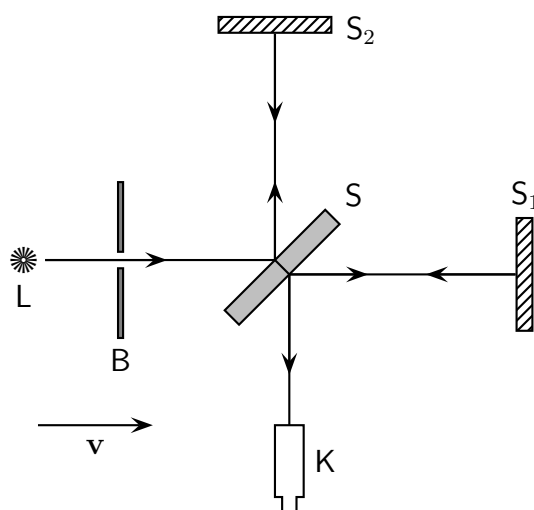
Lad os nu tænke os, at vi mellem S og F foretager en ændring af en af lysvejene, idet vi f.eks. opvarmer luften på strækningen l_1 og dermed ændrer dens brydningsforhold og altså også lyshastigheden. Dermed vil t_1 ændre sig og derfor også Δn . Dette vil medføre en ændret beliggenhed af de lyse og mørke striber. Foretages ændringen af l_1 gradvist, vil man se, at striberne tilsyneladende vandrer hen over synsfeltet. Vandrer en mørk stribe hen, hvor der før umiddelbart ved siden af var en lys, kan vi slutte, at Δn er ændret med $\frac{1}{2}$, og derfor også at lysvejen l_1 i optisk henseende er ændret med $\frac{1}{2}\lambda$. På denne måde afslører interferometeret ganske små ændringer i den optiske vejforskel langs de to strækninger mellem S og F .

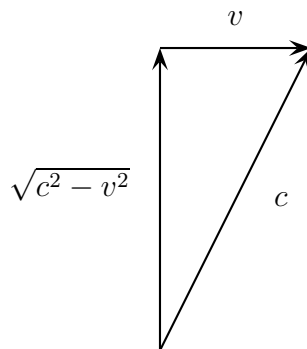
**Figur 1.4:** Interferensstriber

Det kendteste forsøg på at eftervise æter-vinden blev udført af Michelson og Morley i 1887, hvor de forsøgte at måle forskellen mellem lyshastighederne i to ortogonale retninger. Princippet i Michelson-Morley-forsøgets interferometer fremgår af Figur 1.5, hvor L er en monokromatiske lyskilde. Strålen rammer først spejlet S under en vinkel på 45° . Dette spejl er halvforsølvet, således at strålen spaltes i to lige stærke delstråler. Den ene af disse passerer (med en ringe parallelforskydning) gennem S og rammer spejlet S_1 , som reflekterer alt lyset tilbage til S. Den anden delstråle kastes af S hen til spejlet S_2 , hvorfra den reflekteres tilbage til S. Her forenes de to delstråler, inden de træder ind i kikkerten K, hvor man iagttager et system af interferensstriber.

Vi vil nu beregne de tidsrum, lyset bruger til at gennemløbe de to strækninger SS_1S og SS_2S , på hvilke strålerne er adskilte. Vi tænker os først apparatet opstillet, således at retningen SS_1 er parallel med Jordens hastighed v gennem æteren. På strækningen SS_1 vil lyshastigheden i forhold til instrumentet da være $c - v$, mens den på strækningen S_1S vil være $c + v$. For den samlede lystid har vi da

$$T_1 = \frac{L_1}{c - v} + \frac{L_1}{c + v} = \frac{2L_1c}{c^2 - v^2}, \quad (1.10)$$

**Figur 1.5:** Michelson-Morley-forsøget.



Figur 1.6: Lysudbredelsen i retningen vinkelret på ætervinden i Michelson-Morley-forsøget.

hvor L_1 er længden af SS_1 . På strækningen SS_2S må lystiden bestemmes, idet vi tager hensyn til bevægelsen af instrumentet i forhold til æteren. I laboratoriesystemet er denne bevægelse vinkelret på lysstrålens retning, og ved at betragte den retvinklede trekant på Figur 1.6 ser vi, at lysets hastighed i forhold til instrumentet er $\sqrt{c^2 - v^2}$. Det samme vil være tilfældet på nedturen, hvorfor den samlede lystid er

$$T_2 = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad (1.11)$$

hvor L_2 er længden af SS_2 . For forskellen i lystider mellem de to stråler finder vi da

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{2L_1 c}{c^2 - v^2} - \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (1.12)$$

Idet instrumentet er indrettet således, at de to arme er lige lange, altså $L \equiv L_1 = L_2$, får vi for $v \ll c$ det tilnærmede udtryk

$$\Delta T = \frac{2L}{c} \left[1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots - 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right] \simeq \frac{L}{c} \frac{v^2}{c^2},$$

idet vi har rækkeudviklet i den lille størrelse v^2/c^2 . Vi indfører nu bølgelængden $\lambda = c/\nu$ og finder ved anvendelse af (1.9) bølgetalsforskellen mellem de to stråler

$$\Delta n = \frac{L}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}. \quad (1.13)$$

Idet instrumentet havde $L = 11$ m og anvendte lys med bølgelængden $\lambda = 500$ nm = 500×10^{-9} m, finder vi heraf ved at benytte Jordens banehastighed $v = 30$ km/s

$$\Delta n \simeq 0.2.$$

Dette oversteg langt instrumentets følsomhed, som var omkring en størrelsesorden mindre.

Forsøget udførtes nu først således, at man iagttog interferensstriberne, mens hele instrumentet drejedes 90° , hvorved dets to arme SS_1 og SS_2 bytter roller. I den nye stilling

skulle vi således få den samme forskel med modsat fortegn, hvorfor ændringen skulle være dobbelt så stor. Imidlertid iagttog man ikke nogen sådan ændring. Derefter foretoges et andet eksperiment, idet man gennem et halvt år iagttog stjernernes beliggenhed i det fast opstillede eksperiment. I løbet af denne tid forventede man, at Jorden i sin bane omkring Solen ville skifte bevægelsesretning i forhold til æteren, hvilket igen skulle give en ændret forskel i bølgetal. Heller ikke i dette tilfælde iagttog man nogen effekt.

Den mest åbenbare tolkning af Michelson-Morley-eksperimentet var, at Jorden ikke bevægede sig i forhold til æteren, eller med andre ord, at denne tog del i Jordens bevægelse ligesom atmosfæren. Dette ville naturligvis forklare, at der ikke fremkom nogen effekt ved anvendelsen af lyskilder på Jorden. Derimod opstod der vanskeligheder med fjerne lyskilder, så som fiksstjernerne, idet man ikke kunne tænke sig at Jorden under sin bevægelse medførte æteren overalt i verdensrummet. Man ville derfor ikke kunne forklare lysets aberration (se Afsnit 4.2).

Den elektromagnetiske teori var derfor efterladt med et paradoks: Lysets gennemsnitlige hastighed for en frem-og-tilbage-rejse var uafhængig af ætervinden. (Moderne laser-baserede forsøg har bekræftet dette udfald til en præcision af 10^{15} .) Konklusionen af Michelson-Morley-forsøget overgås langt af, hvad vi ved i dag, nemlig at *envejs*-hastigheden af lyset til enhver tid er uafhængig af enhver form for ætervind. Dette demonstreres på fornemste vis ved hjælp af systemet *Den Internationale Atomtid*, TAI (Temps Atomique International). TAI bestemmes ved hjælp af et stort antal Cæsium-133 baserede atom-ure, som er placeret i forskellige nationale laboratorier Jorden rundt. Urenes visning sammenlignes fortløbende ved hjælp af udvekslede radiosignaler (elektromagnetisk stråling, som kun adskiller sig fra lys ved at have en lavere frekvens). Enhver påvirkning af disse radiosignaler fra en ætervind af den forventede størrelse ville hurtigt opdages ved hjælp af disse super-præcise ure. Ingen påvirkning er blevet påvist: Sommer eller vinter, nat eller dag, signalerne fra ét ur til et andet ankommer altid med den samme forsinkelse. Et andet eksempel er den utrolige præcision som opnås med moderne satellit-baserede navigations-systemer så som GPS (Global Positioning System). Disse systemer står og falder med, at lysets hastighed er retningsuafhængig og dermed uafhængig af enhver ætervind.

1.7 Lorentz's æterteori

Et forsøg på at forklare den udeblevne observation af ætervinden fremsattes i 1889 af Fitzgerald (1851–1901) og få år senere – tilsyneladende uafhængigt – af Lorentz (1853–1928). Det gik ud på, at når et legeme bevæges igennem æteren med hastigheden v så forkortes dets længde i bevægelsesretningen med faktoren $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Dette giver en eksakt annullering af effekten af ætervinden i Michelson-Morley-forsøget, hvilket indses ved at sætte $L_1 = L_2\sqrt{1 - v^2/c^2}$ i (1.12). Lorentz var til en vis grad i stand til at retfærdiggøre en sådan forkortning, idet han henviste til stoffets elektromagnetiske opbygning og til den kendte kontraktion af det elektromagnetiske felt fra en ladning i bevægelse.

Hvad denne hypotese ikke afstedkommer, er at gøre lysets hastighed uafhængig af ætervinden, og den er derfor i modstrid med forsøg, der viser, at lysets *envejs*-hastighed er retningsuafhængig.

1.8 Det specielle relativitetsprincip

Einstein's forklaring på ætervinds-paradokset var mere drastisk. Med henvisning til den klassiske mekaniks relativitetsprincip, ifølge hvilket alle inertialsystemer er ligeværdige for udførelsen af mekaniske eksperimenter, fremsatte han for første gang i afhandlingen *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* fra 1905 sit berømte *specielle relativitetsprincip*, hvis første postulat lyder

Alle inertialsystemer er ligeværdige for udførelsen af alle fysiske eksperimenter.

Ifølge Einstein findes der altså ingen æter, ligesom der ikke findes noget absolut rum. Alle inertialsystemer er fuldstændigt ligeværdige, idet samtlige fysiske love gælder uforandret i dem alle. I særdeleshed gælder de samme elektromagnetiske og optiske love i alle inertialsystemer. Denne sidste konstatering næsten påtvinger os endnu en hypotese, som Einstein da også antog som sit andet postulat:

I det tomme rum udbreder lyset sig retlinet med hastigheden c i enhver retning og i ethvert inertialsystem.

Einstein var selvfølgelig klar over, at hans andet postulat var i voldsom modstrid med Galilei-transformationen og dermed vore klassiske ideer om rum og tid: Lige meget hvor hurtigt man forsøger at forfølge en lysstråle (ved at forflytte sig til stadigt hurtigere inertialsystemer) vil man bestandig se lysstrålen fjerne sig med hastigheden c . Einsteins store bedrift var, at han var i stand til at finde en ny struktur for rum og tid, som på en naturlig og elegant måde imødekommer begge hans postulater. Dette krævede en udskiftning af Galilei-transformationen som den grundlæggende forbindelse mellem inertialsystemer. Den nye transformation – Lorentz-transformationen – lader i det store hele rum og tid ved det velkendte inden for det enkelte inertialsystem, men ændrer måden hvorpå en iagttager i ét inertialsystem opfatter andre inertialsystemer. Frem for alt krævede det indførelsen af begrebet *relativ* tid, som igen ikke adskiller sig fra den gamle (absolutte) tid i det enkelte inertialsystem, men som er forskellig fra system til system.

Med Einsteins to postulater forklares naturligvis Michelson-Morley-forsøget. For når vi i (1.10) og (1.11) erstatter de tre antagne lyshastigheder $c+v$, $c-v$ og $\sqrt{c^2 - v^2}$ med samme hastighed c , bliver differencen (1.12) trivielt lig nul. På tilsvarende måde forklaredes det negative udfald af alle forsøg til påvisning ætervinden, og disse tjente nu omvendt som empirisk underbygning af Einsteins postulater.

I løbet af kort tid formuleredes nu en komplet teori baseret på Einsteins to postulater. Denne teori – *den specielle relativitetsteori* – havde som program at ændre alle fysikkens love, hvor det var nødvendigt, for at gøre dem invariante over for Lorentz-transformationen og dermed gyldige i alle inertialsystemer. For Einsteins relativitetsprincip er i virkeligheden et *metaprint*: Det udlægger regler for formen af *alle* fysikkens love. Ændringerne, som teorien afstedkom (især inden for mekanikkens område), har, skønt af stor betydning i mange moderne anvendelser, forsvindende betydning for de fleste klassiske problemer, og det er da også årsagen til, at de ikke var blevet opdaget tidligere. Teoriens udformning er dermed et smukt eksempel på den rene tankevirksomheds evne til at overskride den empiriske grænse.

I dag, et århundrede senere, har den specielle relativitetsteoris enorme succes gjort det umuligt at betvivle gyldigheden af dens grundlæggende præmisser. Dens betydning for den moderne fysik har været overvældende. Den har således bl.a. ført til en ny teori for rum og tid, hvor de to blander sig indbyrdes og danner *rumtiden*; til eksistensen af en maksimal hastighed for alle partikler og signaler; til en ny mekanik, hvor trægheden vokser med hastigheden; til erkendelsen af, at masse og energi er ækvivalente størrelser; til en simpel og succesrig makroskopisk elektrodynamik for legemer i bevægelse; til en ny termodynamik; til en kinetisk gasteori omfattende fotoner såvel som partikler; til de Broglies tilknytning af bølgenatur til partikler; til Sommerfelds finstruktur i de atomare spektre; til Diracs partikel-antipartikel symmetri; til Paulis forklaring af sammenhængen mellem spin og statistik; og den har banet vejen for den generelle relativitetsteori og kosmologien.

Opgaver 1

- 1.1** En båd sejler mod strømmen på en flod, som flyder med hastigheden v . Da båden passerer under en bro kastes en bøj i vandet. Efter at have fortsat op mod strømmen i endnu et kvarter drejer båden pludselig omkring (vi antager at ingen tid spildes ved denne manøvre) for at fortsætte sin rejse med samme hastighed i forhold til vandet som før, men nu med strømmen. Idet den når bøjen, har denne flydt 1 km ned ad floden i forhold til broen. Beregn hastigheden v af vandet.
- 1.2** En kvinde svømmer med hastigheden 1 m/s, frem og tilbage mellem to flydende pontoner, som er fast forbundne til hinanden med afstanden 30 m. Beregn tiden for turen under følgende forudsætninger
- (a) Pontonerne er i hvile i forhold til vandet;
 - (b) Systemet af de to pontoner trækkes med hastigheden $\frac{1}{3}$ m/s parallel med retningen, der forbinder de to pontoner.
 - (c) Systemet af de to pontoner trækkes med hastigheden $\frac{1}{3}$ m/s vinkelret på retningen, der forbinder de to pontoner.
- 1.3** Sammenlign hastighederne af en bil (110 km/t), et jetfly (1050 km/t), en satellit (27400 km/t), Jordens hastighed omkring Solen (30 km/s), og et lyssignal (3×10^8 m/s). Beregn f.eks. hvor langt enhver af disse bevæger sig i den tid, det tager en bil at bevæge sig 1 meter.

Kapitel 2

Lorentz-transformationen

2.1 Den specielle relativitetsteoris grundlag

Ligesom den Newtonske mekanik, er den specielle relativitetsteori afgørende forbundet med begrebet inertialsystemer. Et inertialsystem kan i princippet tænkes opbygget af et sæt af tre indbyrdes ortogonale stive stænger (x , y og z -akser), der er fast nittet til hinanden i begyndelsespunktet og som har samme længdeinddeling indridset langs hver akse. Ethvert inertialsystem har en Euklidisk geometri (rummet er fladt), og i ethvert inertialsystem gælder Newtons første lov. Man kan forestille sig uendelig mange sådanne referencesystemer med alle mulige orienteringer af akserne og med alle mulige hastigheder i forhold til hinanden. Mens dette gælder uden indskrænkning i den Newtonske mekanik, er der i den specielle relativitetsteori den begrænsning, at alle indbyrdes hastigheder af inertialsystemer er mindre end lyshastigheden, c . I den Newtonske teori deler alle inertialsystemer den samme universelle (absolutte) tid, og systemer i relativ bevægelse er indbyrdes forbundne gennem Galilei-transformationen. Den vigtige matematiske opdagelse, der muliggjorde den specielle relativitetsteori, var, at såfremt man er villig til at opgive ideen om en absolut tid, så er en ny type af transformation mellem inertialsystemer mulig, samtidig med at man opretholder den Euklidiske geometri og gyldigheden af Newtons første lov i ethvert inertialsystem og opretholder det specielle relativitetsprincip, ifølge hvilket alle inertialsystemer er ligeværdige. Denne nye transformation, Lorentz-transformationen, er karakteriseret ved, at den lader lyshastigheden, c , transformere over i den samme hastighed i alle inertialsystemer.

Den specielle relativitetsteori er altså i udgangspunktet en teori for rum og tid i en verden af inertialsystemer, som er forbundne via Lorentz-transformationen. Teorien inkluderer resultater så som tidsforlængelsen, længdeforkortningen, den relativistiske hastighedssammensætning, eksistensen af en maksimal hastighed etc.

I dette og de følgende tre kapitler vil vi foretage en detaljeret udforskning af den nye teori for rum og tid inklusive de ovenfor nævnte fænomener. Først i Kapitel 6 vender vi os så mod formuleringen af en relativistisk invariant mekanik til afløsning af de Newtonske love.

2.2 Revision af fundamentale begreber

Før vi påbegynder den formelle udledning af Lorentz-transformationen og dens følger, vil vi i dette afsnit foretage nogle kvalitative overvejelser om konsekvenserne af det specielle relativitetsprincip for de grundlæggende begreber *samtidig*, *længde* og *varighed*. Gennem logiske argumenter baseret på tankeeksperimenter er det vort mål, at forstå intuitivt, hvorfor det specielle relativitetsprincip nødvendigvis indebærer et brud med den klassiske opfattelse af disse begreber.

2.2.1 Samtidig

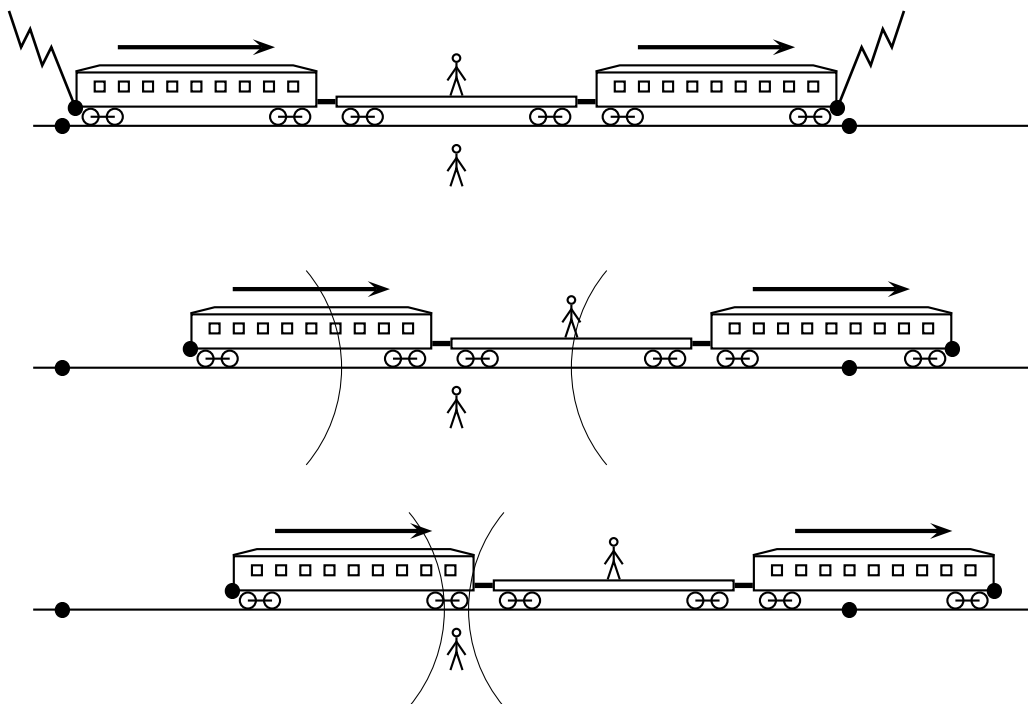
Vi tænker os to inertialsystemer S og S' med hver deres tidsmål t og t' . I den klassiske mekanik går man uden videre ud fra, at disse tidsmål kan bringes til at stemme overens, og i Galilei-transformationen sætter man derfor $t' = t$. Er der tale om to samtidige begivenheder i S , vil de altså også være samtidige i S' . Denne *aprioriske* opfattelse af samtidighed, kan ikke uden videre opretholdes i relativitetsteorien, og vi søger derfor en definition, der ved fysiske målinger tillader os at afgøre, om to begivenheder er samtidige eller ikke. Vi benytter os her af Einsteins andet postulat, ifølge hvilken lyset bevæger sig med samme hastighed c i enhver retning i ethvert inertialsystem. Dette tillader os at indføre følgende *definition* af samtidighed:

To begivenheder, der foregår i punkterne A og B , vil være samtidige, såfremt et lyssignal udsendt fra A , når begivenheden her finder sted, og et lyssignal udsendt fra B , når begivenheden finder sted der, vil nå frem til en iagttager i samme afstand fra A og B til samme tidspunkt.

Denne definition medfører, at to iagttagere i indbyrdes bevægelse i almindelighed ikke vil være enige om samtidigheden af to begivenheder.

Einstein demonstrerede dette gennem det følgende berømte tankeeksperiment. Lad os betragte et hurtigtog i jævn retlinet bevægelse i forhold til jordoverfladen, som her antages at udgøre et inertialsystem. Under et tordenvejr slår et lyn ned ved togets forende og et andet ved dets bagende. Derved afsættes der mærker på såvel toget som skinnerne, og lysglimt vil bevæge sig forlæns og baglæns langs toget (Figur 2.1). En iagttager, som står på jorden, modtager de to lysglimt til samme tidspunkt. Ved en efterfølgende opmåling finder han, at han befandt sig præcis midt mellem mærkerne på skinnerne, og han konkluderer derfor ifølge definitionen, at de to lynnedslag skete samtidig.

En anden iagttager befinder sig præcis midt i toget. Set fra iagttageren på jorden bevæger toget sig hen imod glimtet, der kommer fra togets forende, og væk fra glimtet, der kommer fra togets bagende. Iagttageren i toget modtager derfor glimtet fra forenden før glimtet fra bagenden. Dette er præcis, hvad iagttageren i toget oplever: Glimtet fra forenden ankommer først, siden ankommer glimtet fra bagenden. Men da denne iagttager kan verificere, at hun befinder sig i samme afstand fra togets forende og bagende, hvor mærker er afsat af de to lynnedslag, må hun konkludere, at lynnedslaget ved forenden skete tidligere end lynnedslaget ved bagenden. Lyset bevæger sig jo nemlig også i hendes inertialsystem med samme hastighed i begge retninger.



Figur 2.1: Einsteins tog-eksperiment illustrerer at samtidighed er et relativt begreb.

Øverst: Lyn slår ned i for- og bagenden af et tog i bevægelse, hvorved der efterlades mærker på både tog og skinner. Lysglimt udbreder sig i alle retninger. **Midten:** En iagttager, der opholder sig midt i toget, konkluderer at de to lynnedslag ikke var samtidige. Hendes argumenter: “(i) Jeg befinder mig lige langt fra mærkerne afsat i for- og bagenden af toget. (ii) Lyset har en fast hastighed i mit system og bevæger sig med samme hastighed i begge retninger. (iii) Lysglimtet fra forenden ankom først. Altså, (iv) må glimt fra forenden have været afsendt før glimt fra bagenden, og de to lynnedslag var dermed ikke samtidige.” **Nederst:** En iagttager der står på jorden midt mellem mærkerne på skinnerne konkluderer at lynnedslagene var samtidige, idet de to lysglimt når ham til samme tidspunkt.

Skete de to lynnedslag så samtidig eller gjorde de ikke? Hvor mærkelig det end måtte lyde, findes der ikke noget entydigt svar på dette spørgsmål. I den ovennævnte situation var de to begivenheder samtidige set fra jord-systemet, men ikke-samtidige set fra tog-systemet. Samtidighed af to begivenheder er altså et relativt begreb. Kun i det specielle tilfælde, hvor to begivenheder sker i samme punkt (eller i et plan vinkelret på den relative bevægelsesretning af de to inertialsystemer) medfører samtidighed i ét system også samtidighed i det andet.

Relativiteten af samtidighed er et vanskeligt begreb at forstå. Næsten ethvert paradoks, der bliver fremført for at “modbevise” relativitetsteorien er baseret på en eller anden misforståelse i anvendelsen af begrebet samtidighed.

2.2.2 Længde

Hvad *længdebegrebet* angår bemærker vi først, at hvis en iagttager ønsker at måle længden af en stang i hvile i forhold til sig selv, kan han nøjagtigt som i det klassiske tilfælde gøre dette ved at placere en målestok langs stangen og finde differencen mellem koordinaterne for stangens endepunkter, således som de aflæses på målestokken. Er stangen derimod i bevægelse i forhold til iagttageren, kan vi ikke anvende denne definition. En længdemåling kan i dette tilfælde defineres på følgende måde:

Ved længden af en stang, der bevæger sig i sin længderetning parallelt med en målestok, forstår vi afstanden mellem to mærker afsat på målestokken ud for stangens endepunkter til samme tidspunkt.

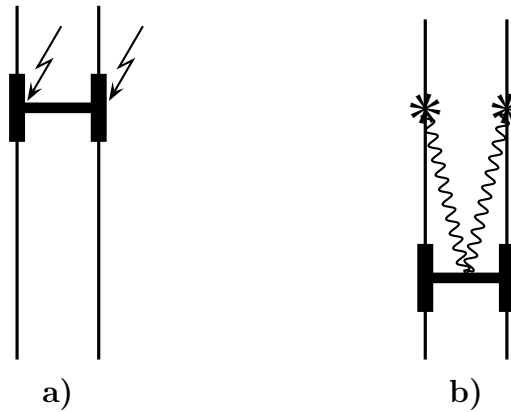
Det afgørende er her, at mærkerne skal afsættes samtidig i forhold til den iagttager, der foretager længdemålingen og derfor er i hvile i forhold til målestokken. En anden iagttager (i bevægelse i forhold til den første) vil, som vi har set, i almindelighed finde, at de to mærker er afsat til forskellig tidspunkt, og vil derfor finde en anden værdi for stangens længde.

I tankeeksemplet ovenfor vil iagttageren på jorden kunne måle togets længde ved at bestemme afstanden mellem de to mærker på skinnerne, idet disse jo for ham var afsat samtidig. Da iagttageren i toget fandt, at mærket ved forenden blev afsat før mærket ved bagenden, er afstanden mellem mærkerne på skinnerne for hende mindre end togets længde. En iagttager, for hvem en stang er i bevægelse langs sin længderetning, vil altså i almindelighed finde en mindre værdi af stangens længde end en iagttager, for hvem stangen er i hvile. Den største længde findes altså i stangens hvilesystem og kaldes stangens *hvilelængde*.

Transverse dimensioners invarians

Mens de to iagttagere i tankeeksemplet ovenfor var uenige om længden af toget, kan de ikke blive uenige om dets bredde, eller i almindelighed om dimensionen af legemer vinkelret på disses bevægelsesretning. Vi kan f.eks. betragte en af vognakslerne, der set fra toget vil stå vinkelret på dets bevægelsesretning. Dette vil akslen imidlertid også gøre set fra jorden, hvilket ses af symmetri Grunde: højre ende af akslen udmærker sig ikke frem for venstre, og omvendt, og derfor kan ingen af akselenderne være forskudt i forhold til den anden.

Vi tænker os nu, at to lyn slår ned, ét i hver ende af akslen, som vist på Figur 2.2. De to lynnedslag er samtidige set fra toget, såfremt en iagttager i et plan vinkelret på midten af akslen ser de to glimt samtidig. Tænker vi os derpå de to glimt registreret af en iagttager på jorden lige under det punkt, hvor iagttageren på toget så glimtene, vil den førstnævnte også se dem samtidig, idet han jo ligeledes har samme afstand fra de to nedslagspunkter. Når der således er enighed om samtidighed af begivenheder i punkter, hvis forbindelseslinie er vinkelret på bevægelsesretningen, vil der også være enighed om den rumlige afstand mellem de to begivenheder. Vi kan her ræsonnere på følgende måde: Iagttagere i toget kan umiddelbart måle akslens hvilelængde l_0 . Hvis der som før er afsat mærker på skinnerne ved lynnedslagene, vil iagttageren på jorden måle akslens længde som afstanden mellem disse mærker. Lad os tænke os at han finder en længde l , så at vi kan sætte



Figur 2.2: Ved at betragte to lyn, der slår ned ved enderne af en vogn-aksel, indser vi, at akslens længde er uafhængig af togets hastighed. Hvis en iagttager a), der befinder sig i toget i et plan vinkelret på midten af akslen, ser de to glimt samtidig, vil det samme være tilfældet for en jordbaseret iagttager b), der befinder sig midt mellem de to skinner. Da de er enige om samtidigheden af lynnedslagene vil de også være enige om akslens længde.

$l = kl_0$, hvor k er en proportionalitetsfaktor, der eventuelt kan afhænge af hastigheden. Men også iagttageren på toget vil anerkende den af ham målte afstand mellem mærkerne på skinnerne som længdemål for akslen. Denne længde er altså l_0 , således at iagttageren på toget vil sætte $l_0 = kl$, hvor l er det samme tal som før. Dette er en umiddelbar følge af de to inertialsystemers ligeberettigelse, dvs. af relativitetsprincippet. Af de to ligninger følger imidlertid $k^2 = 1$, og da k er et positivt tal, bliver $k = 1$ og $l = l_0$.

Et simpelt spørgsmål fører til et endnu mere grundlæggende argument mod, at et legemes dimensioner vinkelret på bevægelsesretningen skulle afhænge af legemets hastighed. Spørgsmålet er, omkring hvilken akse forandringen skulle foregå. Tænk vi os igen toget i bevægelse, ville man måske umiddelbart tænke sig, at det måtte skrumpe omkring en akse, som går midt ned gennem toget. Men lad os så forestille os to tog ved siden af hinanden, som begge kører med samme hastighed. Skulle nu begge tog skrumpe omkring deres respektive akser (og derved lade afstanden mellem de to tog vokse(!))? Eller skulle systemet af de to tog skrumpe omkring en akse tilsvarende midten af systemet? Begge muligheder er åbenlyst absurde, og den uundgåelige konklusion er, at togenes bredde er uforandret.

Vi ser altså, at når et legeme bevæger sig, vil dets dimensioner vinkelret på bevægelsesretningen være uforandrede.

2.2.3 Varighed

Hvad endeligt begrebet *varighed* angår, er det næsten på forhånd klart, at varigheden af en proces må bedømmes forskelligt af to iagttagere i forskellig bevægelsestilstand, eftersom disse jo er uenige om samtidigheden af to begivenheder. Tænk vi os en kineser antændt, går der et lille tidsrum inden den eksploderer. Er kineseren i hvile i forhold til iagttageren, vil denne på sit ur måle en vis varighed – kaldet *egentiden* – af denne proces. En iagttager

i bevægelse i forhold til kineseren vil se antændelsen og eksplosionen i forskellige punkter af sit eget inertialsystem og i almindelighed finde en anden varighed. De nærmere forhold ved dette fænomen vil vi imidlertid først undersøge i næste kapitel, når vi har udledt Lorentz-transformationen.

2.3 Inertialsystemers homogenitet og isotropi

Ifølge relativitetsprincippet er alle inertialsystemer ligeværdige. Dette gælder specielt for alle inertialsystemer, der bevæger sig parallelt med hinanden med samme hastighed, og som derfor udelukkende adskiller sig fra hinanden gennem rumlige og tidslige translationer og rotationer. Det følger heraf, at ethvert inertialsystem er fuldkommen symmetrisk. Hermed menes, at det er rumligt homogent og isotropt ikke alene i geometrisk Euklidisk forstand, men for alle fysiske fænomener, og at det også er tidsmæssigt homogent. Et givet fysikeksperiment, som udføres i et inertialsystem, vil med andre ord have samme udfald uanset hvor det udføres (homogenitet), hvilken retning det drejes i (isotropi) og hvornår det udføres (tidslig homogenitet).

2.4 Koordinat-gitteret

Hovedformålet med dette kapitel er at udlede Lorentz-transformationen, som er den matematiske kerne i den specielle relativitetsteori. Men før vi begynder at *transformere* koordinater fra ét inertialsystem til et andet, skal vi her først afklare, hvordan man tilskriver koordinater til en begivenhed i et *enkelt* inertialsystem.

Først og fremmest har vi brug for universelle enheder for tid og længde. I de følgende to indskud ser vi på, hvordan standardenhederne for disse størrelser er defineret i den moderne fysik.

Indskud 2.1 Tidsenheden sekund

Vores tidsenhed var oprindeligt knyttet til Jordens daglige rotation, idet et sekund var defineret som $1/24$ af $1/60$ af $1/60$ af et døgn. Da Jordens rotationshastighed imidlertid aftager langsomt, er denne definition uhensigtsmæssig. Et sekund er nu defineret som varigheden af 9 192 631 770 perioder af strålingen, der tilsvarende overgangen mellem de to hyperfin-niveauer i grundtilstanden af atomet cæsium-133.

Indskud 2.2 Lysets hastighed og længdeenheden meter

Siden Ole Rømers første bestemmelse af lysets hastighed er målingerne heraf blevet stadigt mere forfinede. Man stod således omkring 1980 i den situation, at man kunne måle lyshastigheden betydeligt mere præcist end man kunne definere vores standard-længdeenhed, meteren. Man valgte da i 1983 at vende argumentationen omkring, og definere lyshastigheden til at være

$$c \equiv 299\,792\,458 \text{ m/s.} \quad (2.1)$$

Meteren er herefter defineret ved den længde, som et lyssignal tilbagelægger i vakuum i $1/299\,792\,458$ s.

Som standardkoordinater for inertialsystemer anvender vi ortogonale koordinater x, y, z . En iagttager, som tænkes i hvile i begyndelsespunktet af et inertialsystem, vil kunne tildele koordinater til begivenheder, hvis han er udstyret med et standard-ur (f.eks. et cæsium-ur), en teodolit¹ og udstyr til at udsende og modtage lyssignaler. Afstanden til enhver partikel kan da bestemmes ved hjælp af radar-metoden, hvor et udsendt lyssignal (delvist) reflekteres af partiklen; afstanden fås da ved at multiplicere den forløbne tid med $\frac{1}{2}c$. Idet retningen af det reflekterede lys bestemmes ved hjælp af teodolitten ligger partiklens koordinater (x, y, z) herefter fast. Tiden t for refleksionsprocessen bestemmes ved hjælp af det samme lyssignal som gennemsnittet af tiderne for udsendelsen og modtagelsen.

Skønt den ovennævnte fremgangsmåde er generelt anvendelig er det begrebsmæssigt at foretrække at aflæse en begivenheds koordinater *lokalt*. Til dette brug tænker vi os små standard-ure anbragt i hvile i punkterne $(m\varepsilon, n\varepsilon, p\varepsilon)$, som udgør hjørnerne i et vilkårligt fint, ortogonalt gitter af tynde stænger; m, n , og p løber over alle heltal, og ε er en vilkårlig lille længde. Urenes rumkoordinater kan tænkes indgraveret på dem. Synkronisering af urene kan ske ved hjælp af et eller andet signal, hvis hastighed er retningsuafhængig. Et lyssignal vil derfor kunne anvendes. Antager vi, at et kugleformet lyssignal udsendes fra begyndelsespunktet til tiden t_0 , vil samtlige ure være synkroniserede, hvis de justeres til at vise $t_0 + r/c$, idet signalet passerer, hvor $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ er afstanden til begyndelsespunktet. Efter denne kalibrering kan enhver begivenheds koordinater x, y, z og t aflæses simpelthen ved at kigge på det nærmeste ur.

I den Newtonske teori vil urene i ethvert inertialsystem simpelthen kunne overtage den absolutte tid, og denne vil i den ovennævnte betydning være tilfredsstillende i ethvert inertialsystem. Modsat i den specielle relativitetsteori, hvor den tid der er tilfredsstillende i et inertialsystem vil bryde med isotropien i et andet inertialsystem, hvis den overtages direkte. Det er derfor nødvendig i ethvert inertialsystem at foretage en *uafhængig* synkronisering af urene.

2.5 Udledning af Lorentz-transformationen

Ligesom Galilei-transformationen skal Lorentz-transformationen sammenknytte en begivenheds koordinater (x, y, z, t) i et inertialsystem S med dens koordinater (x', y', z', t') i et vilkårligt andet inertialsystem S' . Også i relativitetsteorien kan vi uden indskrænkning antage, at de to inertialsystemer S og S' er således indrettede, at de er i standardkonfiguration (Figur 1.1). Vor opgave er altså med udgangspunkt i det specielle relativitetsprincip at bestemme sammenhængen mellem de to koordinatsæt, som formelt kan skrives på formen

$$\begin{aligned}x' &= f_x(x, y, z, t), \\y' &= f_y(x, y, z, t), \\z' &= f_z(x, y, z, t), \\t' &= f_t(x, y, z, t),\end{aligned}\tag{2.2}$$

hvor de fire funktioner f_x, f_y, f_z og f_t udover afhængigheden af det oprindelige koordinatsæt kan afhænge af den relative hastighed v af S og S' .

¹Et instrument som landmålere benytter til bestemmelse af vinkler.

De transverse koordinater

Ved diskussionen i Afsnit 2.2 indså vi, at dimensioner vinkelret på bevægelsesretningen vil være uforandrede. Vi kan derfor uden videre slutte, at for enhver begivenhed er

$$y' = y, \quad \text{og} \quad z' = z. \quad (2.3)$$

Hermed har vi bestemt to af transformationsligningerne (2.2), som i deres trivielle form ikke adskiller sig fra de tilsvarende i Galilei-transformationen. Vi indser yderligere, at de to funktioner f_x og f_t i (2.2) ikke kan afhænge af y og z , idet en sådan afhængighed ville bryde med rummets homogenitet. Specifikt kan vi betragte to begivenheder, der har samme x -værdi og er samtidige i S . De kan f.eks. have koordinaterne (x, y, z, t) og $(x, 0, 0, t)$. Da de finder sted i samme plan vinkelret på den relative bevægelsesretning og er samtidige i S , må de også være samtidige i S' , hvorfor altså $f_t(x, y, z, t) = f_t(x, 0, 0, t)$. Tilsvarende argumenter anvendes på funktionen f_x .

Transformationen er lineær

De to resterende transformationsligninger tager nu formen

$$\begin{aligned} x' &= f_x(x, t), \\ t' &= f_t(x, t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Galilei-transformationen tager sig til sammenligning således ud

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ t' &= t, \end{aligned} \quad (2.5)$$

og er øjensynlig af typen (2.4). Transformationen (2.5) er *lineær*, hvorved blot forstås, at x' og t' er polynomier af første grad i x og t . Ydermere er transformationen *homogen*, hvorved menes, at $(x, t) = (0, 0)$ medfører $(x', t') = (0, 0)$. En homogen transformation indeholder således ikke konstante led. I den nærværende sammenhæng er homogeniteten ikke af større betydning, idet den blot skyldes vores antagelse om sammenfaldet af de to inertialsystemer til tiden $t = t' = 0$. Hvis vi ikke lader S og S' falde sammen på denne måde, bliver transformationen ikke homogen, men dog lineær.

Det er klart, at også Lorentz-transformationen (2.4) med vore antagelser må blive homogen. Vi vil i det følgende gå ud fra, at den også er lineær og derfor kan skrives på formen

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x + \rho t \\ t' &= \kappa x + \sigma t \end{aligned} \quad (2.6)$$

hvor γ , ρ , κ og σ kan afhænge af hastigheden v , men er uafhængige af x og t . Denne sætning kan bevises helt stringent, men vi skal her nøjes med ved et enkelt eksempel at belyse de ubehagelige konsekvenser, der ville følge af en ikke-lineær transformation.

Eksempel 2.1 *Lad os betragte en ikke-lineær transformation af formen*

$$\begin{aligned}x' &= ax^2 + bt^2 \\ t' &= cx + dt.\end{aligned}$$

Antag, at en partikel bevæger sig jævnt på x -aksen efter formlen

$$x = ut,$$

hvor u er en konstant. Vi får da for x' og t'

$$\begin{aligned}x' &= au^2t^2 + bt^2 = (au^2 + b)t^2 \\ t' &= cut + dt = (cu + d)t\end{aligned}$$

og ved at eliminere t får vi derfor

$$x' = \frac{au^2 + b}{(cu + d)^2} t'^2,$$

hvilket viser, at bevægelsen, der var jævn i forhold til S , vil være jævnt accelereret i forhold til S' . Dette strider naturligvis imod, at de to systemer begge er forudsat at være inertialsystemer.

Øvelse 2.1 *Vis, at med den lineære transformation (2.6) vil en vilkårlig bevægelse, der er jævn i forhold til S også være jævn i forhold til S' .*

Benyttelse af den relative hastighed af S og S'

Vi vil nu udnytte, at vi kender den relative hastighed af de to systemer S og S' . Idet S' bevæger sig med hastigheden v i forhold til S , følger det af symmetriårsager at S bevæger sig med hastigheden $-v$ i forhold til S' . I modsat fald ville de to systemer ikke være ligeberettigede. Vi kræver nu, at begyndelsepunktet O' ($x' = 0$) har hastigheden v set fra S . Ved derfor at sætte $x' = 0$ i første linje af (2.6) og kræve, at den resulterende ligning tager formen $x = vt$, finder vi sammenhængen

$$v = -\rho/\gamma.$$

Tilsvarende må O ($x = 0$) have hastigheden $-v$ i forhold til S' . Ved at sætte $x = 0$ i (2.6) og benytte de to resulterende udtryk for x' og t' i sammenhængen $x' = -vt'$, finder vi

$$\sigma = \gamma.$$

Lorentz-transformationen er da reduceret til formen

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\ t' &= \gamma(t - \alpha vx)\end{aligned}\tag{2.7}$$

hvor vi har skrevet funktionen κ på formen $-\gamma\alpha v$, hvilket vil vise sig bekvemt i det følgende. Størrelserne γ og α er nu de ukendte funktioner af v .

Sfærisk udbredelse af et lysglimt i S og S'

For at bestemme de to størrelser γ og α og dermed fastlægge Lorentz-transformationen betragter vi en lyskilde, som til tiden $t = t' = 0$ udsender et lysglimt fra det fælles begyndelsespunkt i de to systemer S og S'. Som følge af antagelsen om lyshastighedens invarians, vil lysglimtets udbredelse sig sfærisk med hastigheden c i såvel S som S', altså samtidig tilfredsstille de to relationer $r = ct$ og $r' = ct'$, hvor r og r' er sfærens radius i henholdsvis S og S'. Der vil altså gælde

$$\text{i S:} \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (2.8)$$

$$\text{i S':} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (2.9)$$

Vi må nu kræve, at Lorentz-transformationen er således beskaffen, at lysglimtets udbredelse tilfredsstiller begge disse udtryk.

Som et eksempel, kan vi forsøge at benytte Galilei-transformationen (1.4). Ved indsættelse i (2.9) finder vi da

$$x^2 - 2xvt + v^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2,$$

som er i åbenbar modstrid med (2.8). Galilei-transformationen er derfor ikke overraskende i modstrid med forudsætningen om lyshastighedens invarians.

Ved benyttelse af transformationen (2.7) i (2.9) finder vi udtrykket

$$\gamma^2 x^2 - 2\gamma^2 xvt + \gamma^2 v^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 \gamma^2 (t^2 - 2\alpha xvt + \alpha^2 v^2 x^2), \quad (2.10)$$

og søger nu at bestemme α og γ , således at dette er i overensstemmelse med (2.8). Vi bemærker først, at de to led, som indeholder produktet xvt , må gå ud mod hinanden. Heraf følger umiddelbart, at

$$\alpha = 1/c^2. \quad (2.11)$$

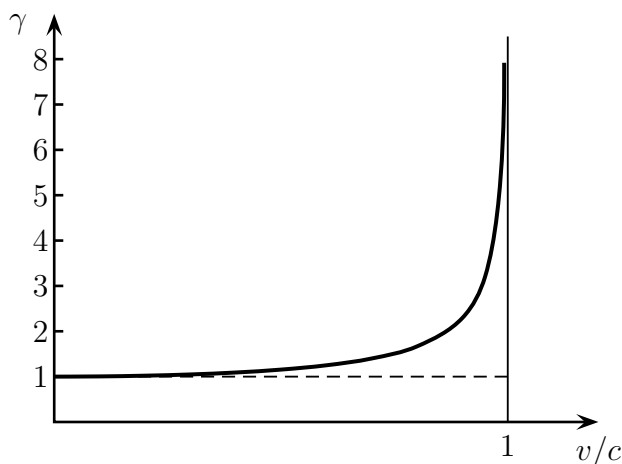
Vi kan dernæst samle de to led, der indeholder x^2 på venstresiden og, i overensstemmelse med (2.8), kræve at koefficienten er 1, altså

$$\gamma^2 - \gamma^2 v^2 / c^2 = 1,$$

hvor vi har benyttet udtrykket for α . Vi har således

$$\boxed{\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}, \quad (2.12)$$

hvor vi har valgt den positive rod, idet vi må kræve, at x' går kontinuert med x for $v \rightarrow 0$. Funktionen $\gamma(v)$ er den berømte *Lorentz-faktor*, som spiller en vigtig rolle i relativitetsteorien. For $v > 0$ er $\gamma(v)$ altid større end 1, skønt ikke meget for små hastigheder $v \ll c$. Funktionen er afbildet på Figur 2.3, hvor den langsomme tilvækst for små hastigheder og den lodrette asymptote for $v = c$ bør bemærkes.



Figur 2.3: γ -funktionen.

Lorentz-transformationens endelige form

Med resultaterne (2.11) og (2.12) har vi udledt Lorentz-transformationen:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2), \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dette ligningssæt kan uden videre løses med hensyn til variablene x, y, z, t , hvorved vi finder den omvendte transformation:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \gamma(t' + vx'/c^2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Disse transformationsligninger svarer til, at S i forhold til S' bevæger sig med hastigheden $-v$ efter x' -aksen.

Lad os her kommentere på følgende tre egenskaber ved Lorentz-transformationen:

- i) *Relativiteten af samtidighed:* Det mest slående nye træk ved Lorentz-transformationen er reglen for tidstransformation, som udtrykker at samtidighed er et relativt begreb: begivenheder med samme t tilsvare i almindelighed ikke begivenheder med samme t' .
- ii) *Symmetri i x og ct :* Ligningerne (2.13) og (2.14) er symmetriske ikke alene i y og z , men også i x og ct . Dette verificeres let ved at gange den sidste ligning igennem med c .
- iii) *Den Newtonske grænse:* Ved rækkeudvikling af γ -funktionen i størrelsen v^2/c^2 fås

$$\gamma(v) = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \quad (2.15)$$

For små hastigheder, $v/c \ll 1$, er altså $\gamma \simeq 1$, hvorfor Lorentz-transformationen reducerer til Galilei-transformationen (1.4), som vi må kræve. Samme konklusion nås selvfølgelig, hvis vi formelt lader $c \rightarrow \infty$.

2.6 Lorentz-transformationen på differens- og differential-form

Lad os betragte to begivenheder $\mathcal{P}_1$ og $\mathcal{P}_2$, som i inertialsystemet S har de respektive koordinater (x_1, y_1, z_1, t_1) og (x_2, y_2, z_2, t_2) . Svarende hertil har vi de fire koordinatdifferencer

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta z = z_2 - z_1, \quad \Delta t = t_2 - t_1.$$

Vi søger nu at finde de tilsvarende størrelser i inertialsystemet S' , som bevæger sig i forhold til S på vanlig måde. Vi begynder med x -koordinaten og finder ved anvendelse af Lorentz-transformationen (2.13)

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) = \gamma[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] = \gamma(\Delta x - v\Delta t).$$

Ved at behandle de øvrige koordinater på tilsvarende vis, fås transformationsligningerne

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t), \\ \Delta y' &= \Delta y, \\ \Delta z' &= \Delta z, \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Lad os dernæst betragte en bevægelse, hvor en partikel (eller et geometrisk punkt) i det infinitesimale tidsrum dt tilbagelægger den infinitesimale strækning $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$. Vi har da

$$dx = x_2 - x_1, \quad dy = y_2 - y_1, \quad dz = z_2 - z_1, \quad dt = t_2 - t_1.$$

hvor de to begivenheder $\mathcal{P}_1$ og $\mathcal{P}_2$ nu altså tilsvarende nabo-punkter i såvel tid som rum. På samme måde som ovenfor finder vi da transformationsligningerne

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - vdt), \\ dy' &= dy, \\ dz' &= dz, \\ dt' &= \gamma(dt - vdx/c^2). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Vi ser altså, at både koordinatdifferencerne og differentialerne tilfredsstiller de samme transformationsligninger som koordinaterne selv. Dette vil selvfølgelig altid være tilfældet for homogene, lineære transformationer. Hver af sættene af transformationligninger har deres eget brug. De oprindelige ligninger (2.13) tjener hovedsagelig til at transformere enkelt-begivenheder. Differens-formen har stor anvendelighed, men man skal være meget varsom med at gøre sig klar præcis hvilke to begivenheder, man betragter. Den differentielle form er anvendelig for problemer der omhandler bevægelse.

2.7 Kvadrerede former

Da vi under udledningen af Lorentz-transformationen betragtede udbredelsen af et sfærisk lysglimt udnyttede vi i (2.8) og (2.9) sammenhængen

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad (2.18)$$

som nu også kan eftervises ved direkte anvendelse af (2.13). Tilsvarende kan vi ved anvendelse af henholdsvis (2.16) og (2.17) eftervise de fundamentale identiteter

$$c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \quad (2.19)$$

og

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.20)$$

Hvor gyldigheden af (2.18) som tidligere anført er betinget af, at de to systemer S og S' er sammenfaldende til tiden $t = t' = 0$, gælder der ingen sådan begrænsning på (2.19) og (2.20), da disse involverer koordinatdifferenser. Idet afstanden mellem to nabo-punkter i det Euklidiske rum er

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.21)$$

tager (2.20) også formen

$$c^2 dt'^2 - dr'^2 = c^2 dt^2 - dr^2. \quad (2.22)$$

Vi ser altså, at hvis $dr^2 = c^2 dt^2$ (som jo er tilfældet for enhver effekt, der udbreder sig med lyshastigheden) så medfører det, at $dr'^2 = c^2 dt'^2$, og omvendt. Vi bekræftes altså i, at vi på korrekt måde har fået indbygget lyshastighedens invarians i teorien.

Den fælles værdi af de to kvadratiske former i (2.19) kaldes kvadratet af forskydningen mellem de to aktuelle begivenheder:

$$\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \quad (2.23)$$

Den kan åbenbart være positiv, negativ eller nul og må derfor ikke opfattes som kvadratet af et almindelig tal. Kvadratroden af absolutværdien, altså $\Delta s = \sqrt{|\Delta s^2|}$, kaldes intervallet mellem de to begivenheder.

Indskud 2.3 Vedrørende relativistisk notation

Der har i relativitetsteorien udviklet sig en notation omkring Δ 'er og differentialer, som ikke er matematisk stringent. Vi har her valgt at følge denne notation, skønt den måske i begyndelsen kan forekomme forvirrende. Som et eksempel lyder den matematisk stringente form af (2.19)

$$c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2,$$

og tilsvarende for (2.20)

$$c^2 (dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 = c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2.$$

Tager vi f.eks. ledet $(\Delta x)^2$, angiver dette kvadratet på forskellen mellem to begivenheders x -koordinater. Af bekvemmelighedsårsager er det blevet en konvention i relativitetsteorien at skrive dette på formen Δx^2 , skønt denne notation strengt taget antyder en ændring (eller forskel) i kvadratet på x og ikke, som ønsket, kvadratet på ændringen (eller forskellen) i x .

2.8 Den relativistiske hastighedsgrænse

For $v = c$ bliver γ -faktoren (2.12) uendelig, og $v > c$ fører til imaginære værdier for γ . Af dette kan vi slutte, at den indbyrdes hastighed af to vilkårlige inertialsystemer må være mindre end lyshastigheden, idet endelige, reelle koordinater i ét system må tilsvare endelige, reelle koordinater i ethvert andet system. Dette er det første tegn på, at ingen partikel kan bevæge sig med en hastighed større end lysets i forhold til et inertialsystem. Thi et sæt af sådanne partikler i parallel bevægelse ville udgøre et inertialsystem, som bevægede sig med overlyshastighed i forhold til det første. Men der er andre tegn på, at hastigheden af partikler, og mere alment, af alle fysiske *signaler*, er begrænset af c . Vi skal nu se, hvordan en antagelse om signalhastigheder større end lyshastigheden fører til modstrid med det fundamentale princip om, at årsag kommer før virkning, og derfor må forkastes.

Til dette, tænker vi os to begivenheder $\mathcal{P}$ og $\mathcal{Q}$, hvor $\mathcal{P}$ fremkalder $\mathcal{Q}$ gennem udveksling af et eller andet signal. Da $\mathcal{P}$ således er årsag til $\mathcal{Q}$, må $\mathcal{P}$ komme før $\mathcal{Q}$ i ethvert inertialsystem. Lad os antage at signalet mellem de to begivenheder bevæger sig med overlyshastigheden $U > c$ i et inertialsystem S . Vi arrangerer S således at begge begivenheder finder sted på x -aksen og at deres rumlige og tidslige afstande er $\Delta x > 0$ og $\Delta t > 0$. Der må da gælde sammenhængen $\Delta x = U\Delta t$. I et andet inertialsystem S' , som bevæger sig på sædvanlig vis i forhold til S , har vi nu ifølge differensformen (2.16) af Lorentz-transformationen

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2} \right) = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{vU}{c^2} \right). \quad (2.24)$$

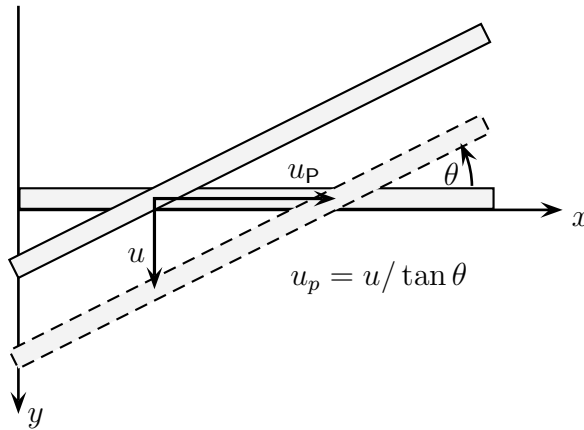
For hastigheder v , der tilfredsstiller

$$c^2/U < v < c \quad (2.25)$$

bliver $\Delta t'$ hermed negativ. Der vil med andre ord gives inertialsystemer, i hvilke $\mathcal{Q}$ kommer før $\mathcal{P}$. Dette strider mod princippet om, at årsagen kommer før virkningen, hvorfor forudsætningen om en signalhastighed større end lyshastigheden må være forkert: c udgør altså den øvre grænse for hastigheden af informationsbærende signaler. I særdeleshed må denne hastighedsgrænse da gælde for partikler, idet disse åbenbart kan benyttes til overbringelse af information.

Lad os benytte lejligheden til at kontrollere at hastighedsgrænsen c virkelig sikrer *kausaliteten*, altså at to begivenheder, hvor den ene kan være årsag til den anden, kommer i samme rækkefølge i ethvert inertialsystem. Hertil betragter vi to begivenheder, der sker på en linie, som danner vinklen θ med x -aksen i S , og som kan forbindes med et signal med hastigheden $u \leq c$ i S . Ved at erstatte U med $u \cos \theta$ i (2.24) ser vi, at Δt og $\Delta t'$ under disse omstændigheder har samme fortegn for enhver hastighed v mellem $\pm c$.

På trods af de ovennævnte betragtninger er der ikke noget i vejen for, at man kan realisere en "bevægelse" af et punkt med en hastighed større end lysets. Punktet kan blot ikke være bærer af information. Et eksempel kunne være det oplyste punkt, hvis man fra Jorden lader en laserstråle feje hen over Månens overflade. Et andet eksempel er skæringspunktet mellem to stænger, der krydser hinanden med en vilkårlig lille vinkel θ . Som det fremgår af Figur 2.4 er skæringspunktets hastighed proportional med $1/\tan \theta$, og kan derfor gøres vilkårlig stor.



Figur 2.4: Skæringspunktet mellem to stænger kan bevæge sig med en vilkårlig stor hastighed, idet hastigheden er proportional med $1/\tan \theta$, og vinklen θ kan gøres vilkårlig lille.

Vi vil nu vise det vigtige resultat, at Lorentz-transformationen altid transformerer overlyshastigheder over i overlyshastigheder, og underlyshastigheder over i underlyshastigheder. Hvis vi nemlig lader $u = dr/dt$ og $u' = dr'/dt'$ betegne hastighederne af et punkt (eller et signal eller en partikel) i henholdsvis S og S' , kan vi omskrive (2.22) på formen

$$dt'^2(c^2 - u'^2) = dt^2(c^2 - u^2), \quad (2.26)$$

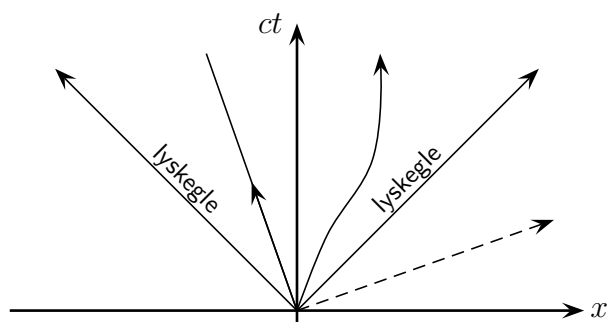
hvoraf det angivne resultat følger direkte.

Lad os gøre en sidste interessant iagttagelse baseret på ligning (2.24), som vi nu tolker som bevægelsesligningen for et punkt, der bevæger sig med overlyshastighed. I systemet S' med hastigheden $v = c^2/U$, er $\Delta t' = 0$, og bevægelsens hastighed må derfor være uendelig! I den specielle relativitetsteori er “uendelig” altså ikke en invariant hastighed, som den er det i den klassiske mekanik. Til ethvert punkt, der bevæger sig med overlyshastighed, gives der et inertialsystem, hvor hastigheden er uendelig, på samme måde som der til ethvert punkt, der bevæger sig med underlyshastighed, gives et inertialsystem, hvor hastigheden er nul.

Det kan til slut bemærkes, at en konsekvens af den relativistiske hastighedsgrænse er, at stive legemer ikke længere kan eksistere, ikke engang som idealiserede objekter. Thi for at holde et legeme stift, skal man jo per definition overføre signaler instantant.

2.9 Rumtidsdiagrammer

En begivenhed er, som tidligere anført, karakteriseret ved et tidspunkt t og et sæt af rumlige koordinater (x, y, z) . Den kan dermed opfattes som et punkt (ct, x, y, z) i et 4-dimensionalt kontinuum – den såkaldte *rumtid*. Vi har her, som det er vanligt, valgt at benytte ct i stedet for t for den tidslige koordinat, således at alle fire koordinater har samme enheder nemlig længde. Lad os i første omgang begrænse os til at betragte begivenheder, der sker langs den rumlige x -akse. Vi kan da afbilde rumtiden ved et diagram som i Figur 2.5, hvor



Figur 2.5: Verdenslinier i et rumtidsdiagram. De to 45° -linier udgør lyskeglen fra et lysglimt i begyndelsespunktet. Den stiplede linie repræsenterer en jævn bevægelse med overlyshastighed.

den lodrette akse viser ct , og den vandrette akse viser x . Diagrammer af denne type kaldes *rumtidsdiagrammer* eller *Minkowski-diagrammer* og kan ofte være nyttige til at illustrere problemer i relativitetsteorien.

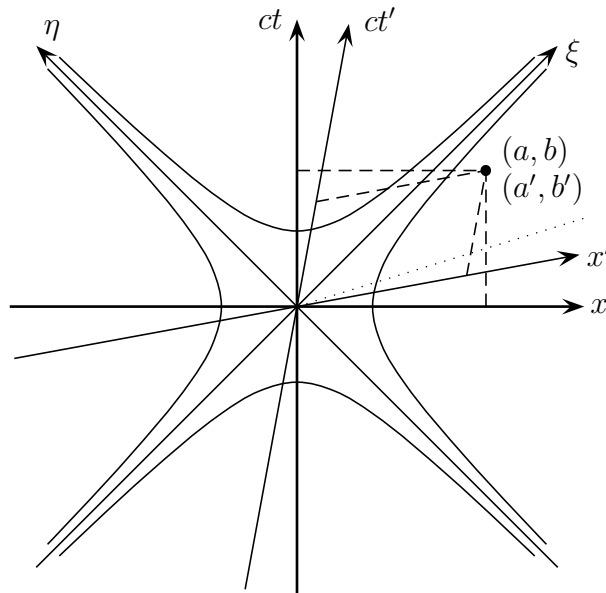
For iagttagelse af en partikel i bevægelse kan vi forestille os, at partiklen er udstyret med en pære, der udsender periodiske lysglimt. Lysglimtene repræsenterer dermed en følge af begivenheder. Hvis disse plottes i rumtidsdiagrammet, får vi da en serie af punkter, som i den kontinuerte grænse danner en kurve. En sådan kurve, som jo giver en komplet beskrivelse af partiklens historie, kaldes partiklens *verdenslinie*. Tilsvarende er begivenheder i rumtidsdiagrammet også kendt under betegnelsen *verdenspunkter*. Verdenslinien tilsvarende en fri partikel er en ret linie, mens verdenslinien tilsvarende en accelereret partikel krummer. Dette er skitseret på Figur 2.6. Diskussionen kan udvides til også at gælde geometriske punkter, hvorved enhver funktion $x = f(t)$ i x, t -planet definerer en verdenslinie. Hældningen af verdenslinien i forhold til ct -aksen, $dx/d(ct)$, er et mål for punktets hastighed, u/c . Ikke alle verdenslinier repræsenterer mulige historier for en materiel partikel, idet dennes hastighed på intet tidspunkt kan overstige lyshastigheden. Hældningen af en partikels verdenslinie i forhold til ct -aksen kan således ikke på noget sted overstige 45° .

Et lysglimt forårsager en lysfront, som bevæger sig med lyshastigheden. Hvis denne afbildes i rumtidsdiagrammet fås en såkaldt *lyskegle*. I Figur 2.5 findes afbildet lyskeglen for et lysglimt i begyndelsespunktet.

2.10 Grafisk repræsentation af Lorentz-transformationen

Det der væsentligt adskiller Lorentz-transformationen fra Galilei-transformationen er, at både rum- og tids-koordinaterne transformerer, og at de sammenblandes på en måde, der kan minde om sammenblandingen af x - og y -koordinaterne under en rotation i det sædvanlige retvinklede x, y -plan. Vi vil i dette afsnit udforske denne lighed nøjere, idet vi begrænser os til koordinaterne t og x , som indgår på ikke-triviell måde i Lorentz-transformationen.

Som ved enhver anden transformation er der to måder hvorpå man kan betragte koor-



Figur 2.6: Et 2-dimensionalt rumtidsdiagram. Ved en passiv Lorentz-transformation ligger begivenheder i en fast position i diagrammet, mens diagrammets akser ændrer retning, som antydnet. Dette illustreres ved begivenheden, som i systemet S har koordinaterne (a, b) mens den i S' har koordinaterne (a', b') .

dinattransformationen $(t, x) \mapsto (t', x')$. Enten tænker man sig, at punktet (t, x) flytter sig til en ny position (t', x') i forhold til det samme sæt af koordinatakser. Transformationen opfattes altså som en bevægelse i t, x -rummet. Dette kaldes en *aktiv transformation*. Ellers betragter man blot (t', x') som en ny betegnelse for det gamle punkt (t, x) . Dette tilsvarende en bevægelse af koordinatakserne, og kaldes en *passiv transformation*.

Indskud 2.4 Aktive versus passive transformationer

Distinktionen mellem aktive og passive transformationer kan illustreres ved hjælp af en bybus, som bevæger sig fra ét stoppested til det næste. Under den aktive synsvinkel betragter man bussen fra fortovskanten og ser at bussen flytter sig. Under den passive synsvinkel sidder man som iagttager inde i bussen. Bussen er således i ro i forhold til iagttageren, men til gengæld får både bus og iagttager nye koordinater. Set fra bussen flytter koordinatakserne (fortovskanten) sig i modsat retning af bussens bevægelsesretning.

2.10.1 Passive Lorentz-transformationer

På Figur 2.6 findes afbildet et rumtidsdiagram, hvor x - og ct -akserne tilsvarende inertialsystemet S . Lad os nu betragte det samme fysiske system fra inertialsystemet S' , som bevæger sig i forhold til S på sædvanlig måde. Idet S' dermed deler x -aksen med S , kan vi åbenbart benytte det samme diagram til at beskrive, hvad der sker set fra S' . Transformationen fra S til S' vil da blot give sig udtryk i, at x' - og ct' ligger anderledes i det afbildede plan end x - og ct -akserne. Vi vil nu undersøge dette forhold.

Tidspunkter i S tilfredsstiller ligningen $t = \text{konst}$ og tilsvarende vandrette linier, mens verdenslinierne for faste punkter i S tilsvarende lodrette linier, $x = \text{konst}$. På tilsvarende vis tilfredsstiller tidspunkter i S' ligningen $t' = \text{konst}$ og dermed ifølge (2.13) $ct - (v/c)x = \text{konst}$, således at de i diagrammet tilsvarende rette linier med hældningen v/c relativ til x -aksen. I særdeleshed er x' -aksen ($t' = 0$) givet ved $ct = (v/c)x$. Videre tilfredsstiller verdenslinierne for faste punkter i S' ligningen $x' = \text{konst}$, og dermed ifølge (2.13) $x - (v/c)ct = \text{konst}$, hvorfor de i diagrammet tilsvarende rette linier med hældningen v/c relativ til ct -aksen. I særdeleshed er t' -aksen ($x' = 0$) givet ved $x = (v/c)ct$. Vi ser således, at akserne i S' danner vinkler af samme størrelse med hensyn til de tilsvarende akser i S . Men hvor disse vinkler under en rotation ville have haft samme retning, er de under Lorentz-transformationen modsatrettede. S' kan have enhver hastighed mellem $-c$ og c i forhold til S , og de tilsvarende x' - og ct' -akser vil i diagrammet opføre sig som bladene på en saks, som lukker sig omkring 45° -linien betegnet ξ i diagrammet: saksen er fuldstændig åben for $v \rightarrow -c$ og fuldstændig lukket for $v \rightarrow c$.

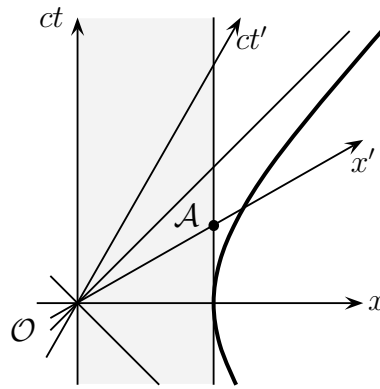
Før vi fortsætter, er det værd og stoppe op og gøre et par punkter klart: I det oprindelige diagram set fra S valgte vi at afbilde x - og ct -akserne ortogonale. Vi bemærker nu, at denne ortogonalitet er uden fysisk indhold, og at vi kunne have tegnet akserne med enhver anden endelig indbyrdes vinkel. Dette illustreres af diagrammet, hvoraf det fremgår, at S åbenbart er det eneste system, hvor de to akser er ortogonale. Lad os også understrege at x -aksens retning i diagrammet selvfølgelig intet har at gøre med dens rumlige retning: Skønt diagrammets x - og x' -akser danner en endelig vinkel er de to akser selvsagt stadig sammenfaldende i rummet.

For kalibreringen af de mærkede koordinatakser bemærker vi, at (2.18) reducerer til $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$, da vi jo har antaget, at $y = y'$ og $z = z'$. Indtegner vi derfor "kalibrerings-hyperblerne" $c^2t^2 - x^2 = \pm 1$, vil disse skære alle fire koordinatakser i enhedsafstanden fra begyndelsespunktet. Ved udnyttelse af lineariteten er aksernes inddeling hermed fastlagt. Bemærk altså, at i rumtiden er "afstanden" fra begyndelsespunktet til enhver af de på hyperblerne afbildede begivenheder den samme (nemlig 1). At det selvfølgelig forekommer anderledes ved betragtning af diagrammet skyldes, at repræsentationen af rumtidens geometri på det 2-dimensionale diagram ikke er tro over for afstande. Situationen er her til en vis grad analog til afbildingen af Jordens overflade på et verdenskort: heller ikke denne repræsentation er tro over for afstande.

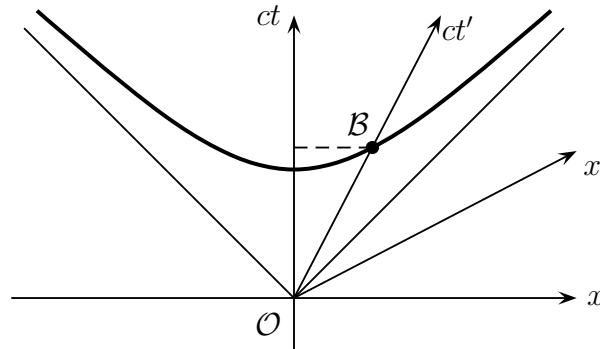
Anvendelser

Som et første eksempel på anvendelsen af denne grafiske repræsentation af Lorentz-transformationen kan vi betragte den punkterede linie på Figur 2.6, som repræsenterer en jævn bevægelse med overlyshastighed af et punkt i S . Hvis vi nu forestiller os, at hastigheden af S' gradvist øges, vil x' - og t' -akserne lukke sig mere mod hinanden indtil x' -aksen først er sammenfaldende med og senere passerer linien. I det første tilfælde tilsvarende punktets bevægelse en uendelig hastighed i S' ; i det sidste tilfælde bevæger den sig i den modsatte rumlige retning nemlig fra større imod mindre x' -værdier.

Også længdeforkortningen og tidsforlængelsen kan aflæses af et rumtidsdiagram. Det skraverede område i Figur 2.7 repræsenterer en stang med enhedslængden i hvile på den rumlige x -akse i S . I S' bevæger stangen sig med hastigheden $-v$ og optager til tiden



Figur 2.7: En stang med enhedslængden ligger i ro langs x -aksen i S . I S' har stangen længden $|\mathcal{OA}|$, som er kortere end enhedslængden.



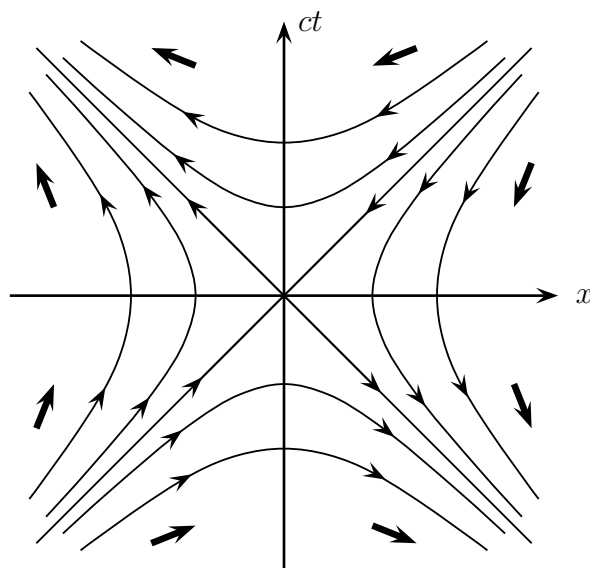
Figur 2.8: Et standard-ur er i hvile i punktet $x' = 0$ og følger dermed ct' -aksen. Ved $\mathcal{B}$ er der passeret én tidsenhed i S' . I S tilsvarende dette en længere tid, hvorfor uret går langsom set fra S .

$t' = 0$ stykket $\mathcal{OA}$ langs x' -aksen. Dette stykke er kortere end afstanden (langs x' -aksen) til “kalibreringshyperblen” og stangen er dermed kortere end i S .

På Figur 2.8 er ct' -aksen verdenslinien for et standard-ur, som er anbragt i et punkt med $x' = 0$, og som derfor bevæger sig gennem S med hastigheden v . Ved $\mathcal{B}$, hvor uret krydser kalibreringshyperblen, viser uret $ct' = 1$. Imidlertid er den tilsvarende tid ct i S åbenbart større end 1. Det bevægede ur går altså langsom.

2.10.2 Aktive Lorentz-transformationer

Under den aktive synsvinkel, bevirker Lorentz-transformationen en flytning af ethvert (verdens-)punkt (ct, x) til en ny beliggenhed (ct', x') i det samme diagram med uændrede koordinataksler. Det samme diagram kan dermed benyttes til at repræsentere S og et vilkårligt andet system S' . Havde vi haft at gøre med en rotation i det sædvanlige 3-dimensionale rum omkring f.eks. z -aksen, ville punkterne have udført en bevægelse langs



Figur 2.9: Under en aktiv Lorentz-transformation ligger rumtidsdiagrammets akser fast, mens ethvert verdenspunkt forflyttes til en ny beliggenhed. Forflytningen sker langs sættet af hyperbler $(ct)^2 - x^2 = \text{konst.}$

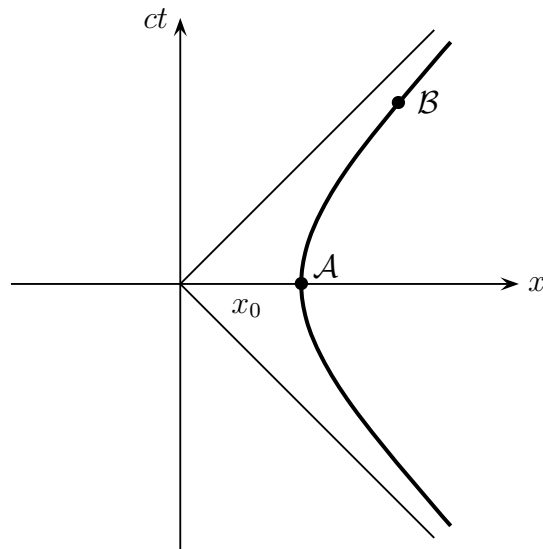
et sæt af cirkler defineret ved $x^2 + y^2 = \text{konst.}$ Under Lorentz-transformation foregår bevægelsen imidlertid langs et sæt af hyperbler $(ct)^2 - x^2 = \text{konst.}$, som vist på Figur 2.9. Ethvert punkt må blive på sin hyperbel for at tilfredsstille (2.18), der med $y = y'$ og $z = z'$ reducerer til $(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2$. De fire kvadranter, som defineres ved de $\pm 45^\circ$ fælles asymptoter for hyperblerne, transformerer dermed hver for sig over i sig selv. Ligeledes transformerer de to asymptoter hver for sig over i sig selv. Pilene på figuren viser bevægelsesretningen for positive hastigheder v af S' i forhold til S ; des større hastighed des større forflytning.

Hyperbolsk bevægelse

Som et simpelt men vigtigt eksempel betragter vi en partikel, hvis verdenslinie i systemet S er hyperblen

$$x^2 - c^2 t^2 = x_0^2; \quad x > 0 \quad (2.27)$$

(se Figur 2.10). Som funktion af tiden, kommer partiklen altså fra det positive uendelig ind langs x -aksen, hvor den momentant ligger i hvile i $x = x_0$ til tiden $t = 0$, hvorefter den igen forsvinder ud til det positive uendelig. Det interessante ved partiklens bevægelse er, at den har konstant *egen-acceleration*, hvor egenaccelerationen er defineret som accelerationen i det inertialsystem, hvor partiklen er i øjeblikkelig hvile. Idet partiklen jo netop er accelereret, vil et system, der til stadighed følger partiklens bevægelse, ikke være noget inertialsystem. Men til ethvert punkt på partiklens bane kan vi tænke os et inertialsystem, som netop til det givne tidspunkt følger partiklen. Dette system betegnes *det øjeblikkeligt medfølgende inertialsystem*. Systemet afbildet i Figur 2.10 er åbenbart partiklens hvile-



Figur 2.10: En partikel med konstant egenacceleration udfører en hyperbolsk bevægelse.

system til tidspunktet $t = 0$.

Idet partiklen har konstant egenacceleration, er dens acceleration altså den samme i hele sekvensen af øjeblikkeligt medfølgende inertialsystemer. For at indse dette betragter vi en vilkårlig begivenhed $\mathcal{B}$ på verdenslinien og foretager en aktiv Lorentz-transformation, således at $\mathcal{B}$ bringes til at ligge på den vandrette akse. Ved denne transformation forflyttes alle begivenheder på hyperblen, men selve hyperblen ændres ikke, idet den jo transformerer over i sig selv. Begivenheden $\mathcal{B}$ ligger altså efter transformationen, hvor begivenheden $\mathcal{A}$ lå før. Og på samme måde som vi før var i hvilesystemet tilsvarende $\mathcal{A}$, er vi nu i hvilesystemet tilsvarende $\mathcal{B}$. Hvad end partiklens egenacceleration var i $\mathcal{A}$, har den derfor samme egenacceleration i $\mathcal{B}$. Hermed er det ønskede resultat vist. Lad os yderligere gøre den interessante iagttagelse, at en lyssignal, som afsendes langs den positive x -akse fra begyndelsepunktet $x = 0$ til tiden $t = 0$ aldrig vil nå partiklen. Tværtimod vil lyssignalet til stadighed befinde sig i afstanden x_0 fra partiklen set fra sekvensen af øjeblikkeligt medfølgende inertialsystemer.

Opgaver 2

- 2.1** For en begivenheds to ikke-trivielle koordinater kan vi vælge ct og x . Hermed regner vi både tiden og positionen i længdeenheder, altså f.eks. meter. Vi kan da opfatte ct og x som komponenterne af en to-dimensional søjlevektor. Vis at de tilsvarende koordinater i S' da er givet ved en matrice-ligning, hvor transformationsmatricen tager formen

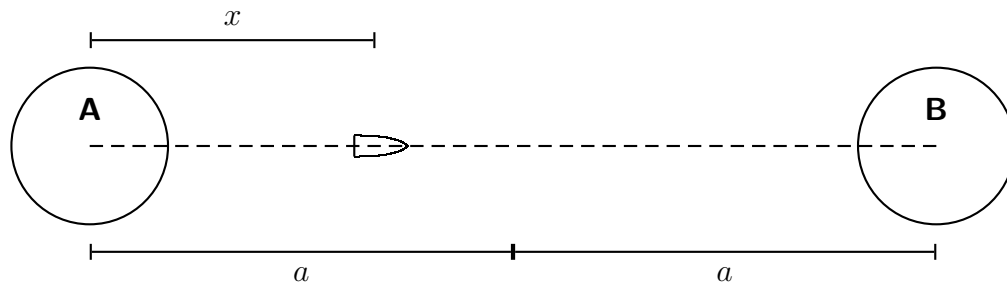
$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix},$$

hvor $\beta = v/c$.

- 2.2** To ure er i hvile i S med den indbyrdes afstand L og synkroniserede i dette system. Vis at en iagttager i S' , som bevæger sig på sædvanlig vis med hastigheden $v \ll c$ i forhold til S, vil opfatte de to ure ude af synkronisering med tiden

$$\delta t \simeq -\frac{Lv}{2c^2}.$$

- 2.3** To inertialsystemer S og S' bevæger sig på sædvanlig vis med hastigheden v i forhold til hinanden. Lad i S' alle ure i koordinat-gitteret udsende et glimt til samme tidspunkt. Vis at man da i S vil opleve en bølge af lys, der breder sig langs den positive x -akse med hastigheden c^2/v .
- 2.4** To stjerner A og B antages at være i hvile i forhold til hinanden. Deres hvilesystem betragtes som et inertialsystem. To eksplosioner, den ene på A, den anden på B, finder sted samtidigt bedømt af en iagttager i hvile i forhold til A og B.



Afstanden mellem A og B er $2a$. Et rumskib bevæger sig med den konstante hastighed v mod B på den rette linje, der forbinder A og B. Rumskibet antages at være i afstanden $x < a$ (målt i A's hvilesystem) fra A, når lyssignalet fra eksplosionen på A modtages. Find tidsdifferencen $\Delta t'$ for modtagelsen af de to lyssignaler fra eksplosionerne på henholdsvis A og B målt på et ur i hvile i forhold til rumskibet. Resultatet ønskes udtrykt ved a , x , v og lyshastigheden c .

- 2.5** Vi betragter to begivenheder (ct, x, y, z) , der i et inertialsystem S er givet ved $(0, 0, 0, 0)$ og $(1, 2, 0, 0)$. Find hastigheden af inertialsystemer i standardkonfigurationen således at (i) begivenhederne er samtidige; (ii) den anden kommer før den første med én længde-enhed (ct -enhed). Findes der et system, hvor de to begivenheder foregår i samme punkt?
- 2.6** Vis at en partikel, hvis verdenslinie er givet ved (2.27), har *egen-accelerationen* c^2/x_0 .

Kapitel 3

Relativistisk kinematik

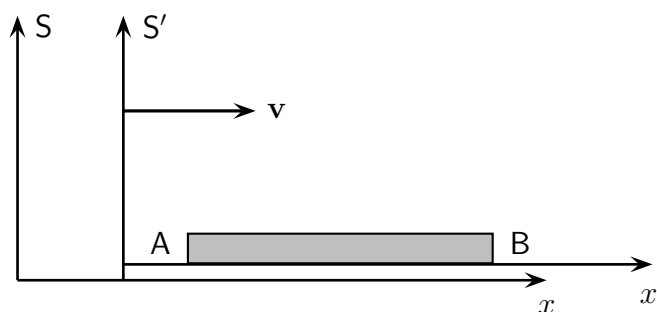
Vi har i forrige kapitel set, hvordan Einsteins postulat om lyshastighedens invarians synes at stride mod den sunde fornuft og er i modstrid med den Newtonske kinematik. I dette kapitel skal vi udforske den nye relativistiske kinematik, som imødekommer begge Einsteins postulater. Dens hovedingredienser er længdeforkortningen, tidsforlængelsen og den relativistiske lov for sammensætning af hastigheder. Den sidste har den underlige egenskab, at man kan “addere” enhver hastighed til lyshastigheden og stadig få lyshastigheden, og at man kan addere et vilkårligt antal underlyshastigheder og stadig altid få en underlyshastighed. I Afsnit 2.2 så vi ved hjælp af kvalitative betragtninger, hvorledes relativitetsprincippet og princippet om lyshastighedens invarians måtte føre til en revideret opfattelse af grundlæggende fysiske begreber som samtidighed, længde og varighed. Vi skal her gennemføre disse betragtninger på en kvantitativ måde, idet vi ved hjælp af Lorentz-transformationen udleder udtryk for, hvordan længder og tidsrum transformerer mellem inertialsystemer. En detaljeret diskussion af samtidighedsbegrebet udsætter vi til Kapitel 5.

3.1 Længdeforkortningen

Til studiet af længders transformationsegenskaber betragter vi en stang AB, der er anbragt i hvile langs x' -aksen i inertialsystemet S' , der bevæger sig på sædvanlig måde med hastigheden v i forhold til et andet inertialsystem S (Figur 3.1). I S' vil stangens endepunktet have konstante koordinater x'_A og x'_B , hvis differens $\Delta x' = x'_B - x'_A$ definerer stangens *hvilelængde* L_0 . I systemet S bevæger stangens sig med hastigheden v efter x -aksen. I dette system må dens længde L – undertiden kaldet *vandrelængden* – derfor bestemmes i overensstemmelse med den tidligere vedtagne definition, idet der til ét og samme tidspunkt afsættes mærker ud for stangens endepunkter. Har et sådant mærkepar koordinaterne $x_A(t)$ og $x_B(t)$, er stangens vandrelængde altså $\Delta x = x_B(t) - x_A(t)$, hvor det er væsentligt, at det er den samme tid t , der indgår i begge led. Ved at sætte $\Delta t = 0$ i den inverse af Lorentz-transformationens differens-form (2.16) finder vi nu sammenhængen mellem L og L_0

$$L = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (3.1)$$

Heraf følger helt generelt, at et legeme i jævn retlinet bevægelse med hastigheden v i et inertialsystem S er forkortet i dets bevægelsesretning med faktoren $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Dette er



Figur 3.1: En stang med hvilelængden L_0 ligger i hvile på x' -aksen. Stangen observeres fra S , hvor den har den forkortede længde $L = L_0/\gamma < L_0$.

den tidligere omtalte *længdeforkortning*. Den største længde forekommer således i systemet i hvilket stangen er i hvile, mens længden i et system, hvor stangens hastighed nærmer sig lysets, vil gå mod nul.

Vi ser, at (3.1) er i formel overensstemmelse med den forkortning, som Lorentz og Fitzgerald oprindeligt indførte for at forklare den udeblevne effekt ved Michelson-Morley-forsøget. Imidlertid har de to effekter en meget forskellig logisk status. Den oprindelig Lorentz-Fitzgerald-effekt byggede på en hypotese om, at en stang i bevægelse i forhold til æteren forkortedes gå grund af en fysisk vekselvirkning mellem stangens materie og æteren. Derimod forudsætter (3.1) ingen sådan hypotese og ingen æterteori, idet den følger af Lorentz-transformationen og dermed er en direkte konsekvens af relativitetsprincippets postulat om lyshastighedens invarians.

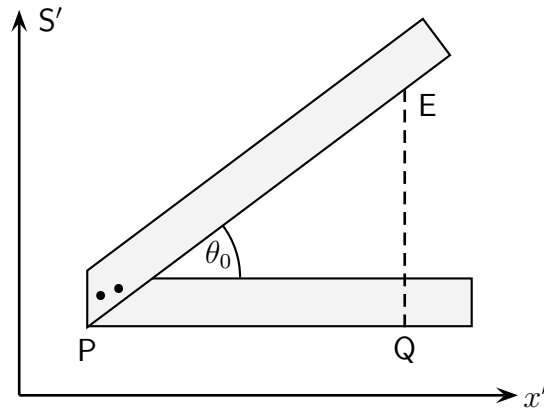
3.1.1 Eksempel: Volumenændring

Længdeforkortningen medfører, at også et legemes volumen vil ændres. Har vi et legeme, der er i hvile i S' og heri har et konstant volumen, vil en iagttager i S finde dets dimensioner i x -aksens retning forkortede ifølge (3.1), mens dimensionerne i y - og z -aksens retninger er uforandrede. Hvis rumfanget af legemet i S' er V_0 vil der altså for rumfanget i S gælde

$$V = V_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

3.1.2 Eksempel: Transformation af vinkler

I den klassiske mekanik vil vinklerne i en trekant være de samme for alle iagttagere, idet trekantens sider bevarer deres længder i alle inertialsystemer. I relativitetsteorien gælder dette ikke, idet afstande i bevægelsesretningen forkortes, mens de er uforandrede vinkelret derpå. En vinkel vil derfor ikke være invariant overfor transformationer fra et inertialsystem til et andet. Ved hjælp af udtrykket (3.1) for længdeforkortningen kan vi udlede transformationsformelen for vinkler på følgende måde. I inertialsystemet S' betragter vi, som vist på Figur 3.2, en vinkel bestående af to materielle stænger fast sammennittede til hinanden og anbragt på en sådan måde, at det højre vinkelben er parallelt med x' -aksen, mens det venstre danner en vinkel θ_0 med denne. På det venstre vinkelben opsøger vi det



Figur 3.2: Idet kun den dimension, som er parallel med bevægelsesretningen, forkortes, vil vinkler ikke være de samme for alle iagttagere.

punkt E hvis afstand EQ fra det højre vinkelben er én længdeenhed. Dette punkts afstand fra vinklens toppunkt P er da $PQ = 1/\tan \theta_0 = \cot \theta_0$. Betragter vi derpå vinklen fra systemet S, vil vi her finde, at stykket PQ er forkortet til $PQ = \cot \theta_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, hvorimod afstanden QE er uforandret. Ved betragtning af trekant PQE i S får vi da den søgte transformationsformel

$$\cot \theta = \cot \theta_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

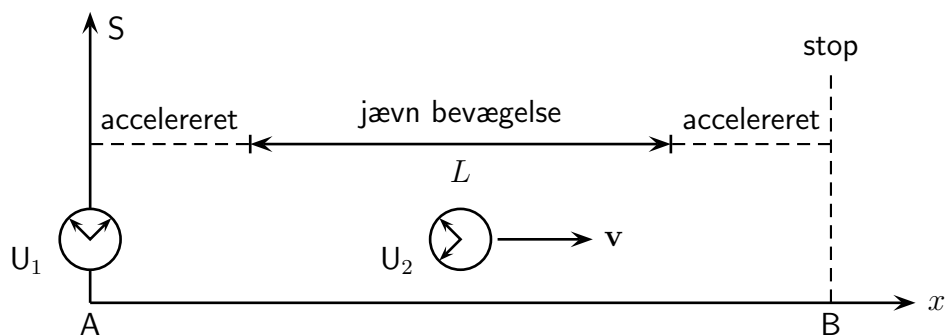
3.2 Tidsforlængelsen

Vi betragter igen to inertialsystemer S og S' i standardkonfigurationen. Antag at to begivenheder finder sted ved et standard-ur, som er i hvile i S', og at tidsforskellen ifølge dette ur er $\Delta t'$. Vi søger nu at finde tidsforskellen, vi skal tilskrive de to begivenheder i S. Ved igen at benytte den inverse af (2.16) finder vi umiddelbart, idet $\Delta x' = 0$, at $\Delta t = \gamma \Delta t'$, eller ved at erstatte Δt og $\Delta t'$ med de mere specifikke symboler T og T_0

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.2)$$

Heraf følger helt generelt, at et ur i jævn retlinet bevægelse med hastigheden v i et inertialsystem S går langsom med faktoren $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ i forhold til de synkroniserede standard-ure i hvile i S. Dette er den tidligere omtalte *tidsforlængelse*. Den hurtigste rate forekommer altså i et urs hvilesystem, mens raten af et ur, hvis hastighed nærmer sig lysets, vil gå mod nul. En fysisk proces har således den korteste varighed i det inertialsystem i hvilket den sker i et fast punkt. Denne tid kaldes processens *egentid*.

Lad os understrege, at tidsforlængelsen, ligesom længdeforkortningen, er en virkelig fysisk effekt og ikke blot et tilfældigt udfald af vore konventioner. Ure i bevægelse går virkelig langsommere end ure i hvile. Hvis et standard-ur således bevæges med jævn hastighed gennem et inertialsystem S langs en ret linje fra et punkt A til et punkt B og tilbage igen, vil den forløbne tid T_0 , målt på det bevægede ur, være relateret til den forløbne tid T , målt



Figur 3.3: Hvis et ur bevæges fra A til B og tilbage til A igen, vil det ved tilbagekomsten vise mindre end et tilsvarende ur, som under hele processen har været i hvile ved A.

på et ur i hvile ved A, gennem (3.2), bortset fra fejl, som måtte være introduceret ved urets acceleration ved bevægelsens begyndelse, retningsændring og afslutning. Men uanset størrelsen af disse fejl kan deres bidrag reduceres simpelthen ved at gøre strækningen med den jævne bevægelse længere. Tidsforlængelsen kan dermed i det mindste i teorien verificeres gennem et direkte eksperiment, hvor der kun benyttes ure. Et sådant eksperiment er skitseret på Figur 3.3

Eksempel 3.1 Et rumfartseksperiment

Som et eksempel tænker vi os at udføre et eksperiment hvor en raket bevæger sig fra Jorden til Månen og tilbage igen, således at den på så godt som hele turen bevæger sig med den jævne hastighed $v = 12 \text{ km/s}$. Sættes afstanden til 360.000 km , bliver tiden for frem- og tilbage-rejsen målt på et stationært ur på Jorden $T = 60.000 \text{ s}$. Af (3.2) finder vi at afvigelsen mellem de to ure er

$$T - T_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right] T_0 \simeq \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} T_0, \quad (3.3)$$

hvor vi har rækkeudviklet γ -funktionen i den lille størrelse v^2/c^2 som i (2.15). I det ovennævnte tilfælde bliver afvigelsen mellem de to ure således $T - T_0 = 8 \times 10^{-10} T_0 = 5 \times 10^{-5} \text{ s}$, og altså yderst beskednen.

For ethvert ur i jævn bevægelse må den specielle relativitetsteoris love for mekanikken (eller elektromagnetismen, eller hvad der nu end driver det aktuelle ur) i princippet være ansvarlige for, at uret går langsommere med præcis Lorentz-faktoren. Generelt hverken kan eller behøver vi at forstå detaljerne bag dette; vi ved blot a priori, at sådan forholder det sig. Som et eksempel vil vi i Afsnit 3.2.2 beskrive et ur, hvis gang er baseret på en lysstråles udbredelse, og hvor vi derfor alene på baggrund af lyshastighedens invarians kan forstå urets langsommere gang.

Drejer det sig om *accelererede* ure er situationen mere kompliceret. De fleste makroskopiske ure virker dårligt under accelererede bevægelser (tænk blot på bornholmerur i et S-tog). Det er imidlertid en eksperimentel kendsgerning, at ure, hvis funktionalitet er direkte

knyttet til mikro-fysiske processer så som atomare overgange eller henfald af elementarpartikler, er upåvirkede af acceleration. I forlængelse heraf defineres et *ideelt* ur som et ur, hvis gang ikke afhænger af accelerationen, men kun af dets øjeblikkelige hastighed i overensstemmelse med (3.2). Lad os forestille os et gitter af synkroniserede standard-ure i et inertialsystem S og et *ideelt* ur, som foretager en vilkårlig bevægelse gennem dette gitter og derved støt taber tid i forhold til de faste ure. Aflæst på det bevægede ur er den totale tid for bevægelsen, som i S starter til tiden t_1 og slutter til tiden t_2 , dermed

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau, \quad (3.4)$$

hvor t er tiden og v er hastigheden i S, og hvor vi har introduceret størrelsen τ , som er *egentiden* for bevægelsen, altså tiden på et ideelt ur som følger med bevægelsen. Undervejs har vi benyttet sammenhængen $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$, som er udtrykket (3.2) for tidsforlængelsen på differentiell form.

3.2.1 Sammenhængen mellem længdeforkortning og tidsforlængelse

Mens en målestok i bevægelse vil forkortes, vil varigheden af en proces forlænges. Dette reciproke forhold mellem længder og tidsrum kan også begrundes direkte, idet vi kan slutte os til tidsforlængelsen alene ud fra længdeforkortningen. For at indse dette betragter vi en stang med hvilelængden L_0 anbragt i hvile på x -aksen i systemet S. I forhold til S' bevæger den sig med hastigheden $-v$ efter x' -aksen, og vi vil nu betragte stangens passage forbi begyndelsepunktet O' af S'. Set fra S' foregår de to begivenheder tilsvarende endepunkternes passage af O' i samme punkt, hvorfor tiden T_0 mellem dem tilsvarende egentiden for processen. Denne tid må være lig med forholdet mellem stangens længde L og dens fart v , altså

$$T_0 = \frac{L}{v} = \frac{L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{v},$$

hvor vi har benyttet udtrykket (3.1) for længdeforkortningen.

Vi betragter nu situationen fra systemet S og spørger om, hvor lang tid det tager for O' at passere forbi stangen fra den ene ende til den anden. Da hastigheden af O' er v og stangens længde L_0 , er dette tidsrum bestemt ved

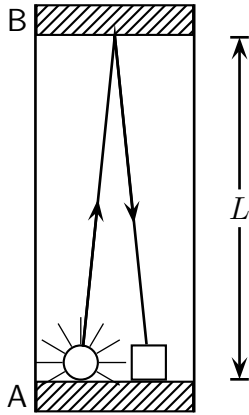
$$T = \frac{L_0}{v}.$$

Af disse to udtryk fremkommer udtrykket (3.2) for tidsforlængelsen direkte.

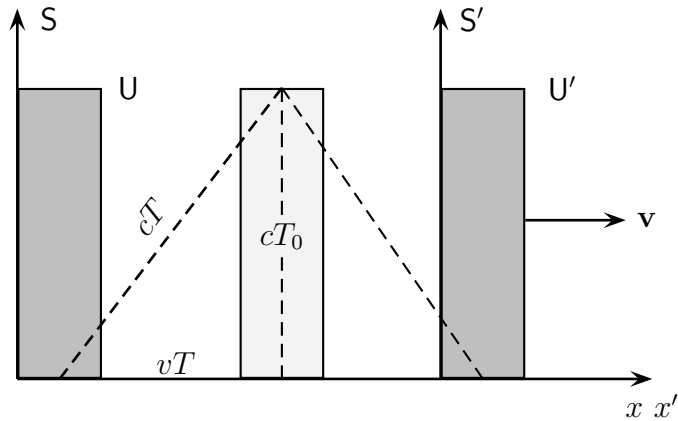
3.2.2 Feynman-uret

I virkeligheden kan tidsforlængelsen udledes uden kendskab til hverken Lorentz-transformationen, eller til længdeforkortningen, ved følgende tankeeksperiment opkaldt efter R. Feynman (1918–1988).

På Figur 3.4 er afbildet et instrument forsynet med et spejl ved A og et andet ved B. Begge spejle er vinkelrette på instrumentets længderetning, og deres indbyrdes afstand er L . Ved A er anbragt en blitz-lampe og en fotocelle. Ved hjælp af lampen udsendes et lysglimt, der udbreder sig i alle retninger. Den del af lyset, der når B, kastes tilbage til A, hvor det registreres af fotocellen, samtidig med at lysbølgen reflekteres fra A og dermed starter en ny tur frem og tilbage. Dette vedbliver at gentage sig, således at fotocellen med jævne tidsmellemlum vil registrere et lysglimt. Fotocellen tænkes forbundet med en tæller, der vil registrere antallet af lysglimt. Et sådant instrument kan åbenbart benyttes som et ur – et såkaldt Feynman-ur.



Figur 3.4: Feynman-uret.



Figur 3.5: Feynman-uret i bevægelse.

Vi anbringer nu et Feynman-ur U parallelt med y -aksen i inertialsystemet S , og et identisk ur U' parallelt med y' -aksen i systemet S' . Iagttageren i S og iagttageren i S' vil da være enige om afstanden mellem spejlene, idet instrumentet bevæges vinkelret på sin længderetning. Lad os antage, at de to ure passerer hinanden lige i det øjeblik, da der udsendes et glimt fra spejlet A. Når fotocellen derefter registrerer glimtets tilbagekomst til A vil situationen være som vist på Figur 3.5. I mellemtiden har iagttageren i S haft et lyssignal løbende frem og tilbage i sit ur U . Da lyshastigheden er uafhængig af retningen, varer op- og nedturen lige lang tid T_0 , således at der gælder $2L = 2cT_0$. Ganske på samme måde vil iagttageren i S' beskrive det, der er sket i hans ur U' . Når derimod iagttageren i S skal beskrive det der sker i U' , må han tage hensyn til dette urs bevægelse, hvorfor lysvejen er givet ved den punkterede linie på figuren. Han får da umiddelbart relationen

$$c^2T^2 = v^2T^2 + c^2T_0^2,$$

der fører direkte til udtrykket (3.2) for tidsforlængelsen.

3.2.3 Tvillingeparadokset

Ingen fremstilling af relativitetsteorien ville være komplet uden i det mindste at nævne det notoriske ur- eller tvillingeparadoks. “Paradokset”, som tager sigte på at tilbagevise tidsforlængelsen som et ægte fysisk fænomen, udspringer af situationen vi diskuterede ovenfor, hvor et ur, der transporteres fra A til B og tilbage igen, viser en mindre tid ved

tilbagekomsten end et ur i konstant hvile ved A. Ofte prydes historien ved, at urene erstattes med to tvillinger, hvoraf den rejsende er yngre end den tilbageblevne ved genforeningen. Paradokset fremkommer ved at hævde, at al bevægelse er relativ, og at den rejsende dermed med lige så stor ret kan hævde, at det var den tilbageblevne, der blev accelereret, bevægede sig væk og kom tilbage igen, og at derfor denne, og ikke ham selv, skulle være den yngste ved genforeningen. Modstriden tyder på en fejl i ræsonnementet, og det er da heller ikke vanskeligt at se, hvor tankegangen er forkert. Sagen er, at hvor jævn bevægelse virkelig er et relativt begreb, så er acceleration det ikke. Acceleration kan måles absolut. De to tvillinger er altså ikke ligeberettigede: tvillingen i hvile ved A befinder sig stedse i et inertialsystem; tvillingen der rejser fra A til B og tilbage befinder sig kun i et inertialsystem i den jævne del af bevægelsen.

Eksempel 3.2 Tvillingeparadokset: En returrejse til Alpha Centauri

Jordens nærmeste nabo-stjerne, Alpha Centauri, ligger 4 lysår fra Jorden. Hermed menes, at dens afstand fra Jorden tilsvarende den vejlængde, som lyset tilbagelægger på 4 år, altså $365.25 \times 24 \times 60 \times 60 \times 300,000 \text{ km} \simeq 9.5 \times 10^{12} \text{ km}$. Lad os forestille os, at den nyfødte dreng Per sendes på en returrejse til Alpha Centauri med hastigheden $v = 0.8 c$, mens hans tvillingebror Poul forbliver tilbage på Jorden. Rejsens varighed set fra Jorden er da 10 år. Ved genforeningen er således Poul 10 år, mens Per ifølge (3.2) kun er 6 år.

Ovennævnte argumentation følger umiddelbart ved at betragte rejsen fra Jordens inertialsystem. Lad os nu se, hvorledes Per opfatter rejsen. Set fra rumskibet bevæger Jorden og Alpha Centauri sig med hastigheden $0.8 c$. Per ser da afstanden mellem de to stjerner forkortet fra $s_0 = 4$ lysår til $s = s_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 2.4$ lysår, hvorfor rejsen derud varer $\Delta t = 3$ år. Tænker vi os nu, at Per kigger tilbage på Poul under rejsen, vil han se, at Poul har alderen $\Delta t_{\text{Poul}} = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1.8$ år, til det tidspunkt han selv ankommer til Alpha Centauri. Tidsrum i Jordens system forekommer jo tidsforlængede set fra rumskibet. Idet vi imidlertid ved, at Per returnerer til Jorden til tiden $t = 10$ år, kunne vi argumentere på præcis samme vis og finde, at Per vil se, at Poul har alderen $(10 - 1.8) = 8.2$ år, på det tidspunkt han selv forlader Alpha Centauri. Men er dette ikke umuligt? Hvordan kan det gå til, at Per vil se, at Poul har alderen 1.8 år, når han selv ankommer til Alpha Centauri og alderen 8.2 år, når han igen forlader Alpha Centauri? Hemmeligheden ligger i den accelererede del af rejsen, hvor Pers rumskib ændrer retning. Et resultat fra den generelle relativitetsteori siger, at man, hvis man selv befinder sig i et accelereret referencesystem, vil opfatte, at tiden i ikke-accelererede systemer går hurtigere. I tidsrummet, hvor rumskibet ændrer retning, vil Per da se, at Poul ældes med $10 - 2 \cdot 1.8 = 6.4$ år. Og dette uanset, hvor kortvarig den accelererede del af bevægelsen måtte være.

Forklaringen, som Per vil give på, at Poul er ældre end ham selv ved genforeningen, er, at Poul ældedes utrolig hurtigt i det korte tidsrum, hvor han selv følte accelerationen, som fik ham til at returnere til Jorden.

3.2.4 Eksempel: Direkte påvisning af tidsforlængelsen

Ved hjælp af meget præcise cæsium-ure, har man faktisk forsøgt eksperimentelt at efterprøve tidsforlængelsen. I ét sådant eksperiment anbragtes et cæsium-ur i et fly mens et

identisk ur blev efterladt i laboratoriet. Man lod nu flyet cirkulere i 15 timer med en hastighed af omkring 140 m/s. Ved eksperimentets afslutning havde det luftbårne ur tabt 5.6×10^{-9} s i forhold til det stationære. Dette var i god overensstemmelse med det forventede tab på 5.7×10^{-9} s. Det skal understreges, at for sådanne jordbaserede eksperimenter spiller den generelle relativitetsteoris gravitationelle tidsforlængelse en lige så stor rolle som den specielle relativitetsteoris tidsforlængelse. Eksperimentet giver dermed ikke en bekræftelse af den specielle relativitetsteori isoleret set, men af den kombinerede teori.

3.2.5 Påvisning af tidsforlængelsen ved hjælp af partikelhenfald

Mens en direkte påvisning af tidsforlængelsen ved hjælp af ure er vanskelig, får man i elementarpartikel-fysikken løbende bekræftelse af denne effekt. Dette sker bl.a. ved betragtning af såkaldte π -mesoner, som er elementarpartikler med positiv eller negativ ladning og en masse på 276 elektronmasser. De dannes f.eks. når man bombarderer atomkernerne i et stof med meget energirige protoner fra en accelerator. Disse π -mesoner er meget ustabile, idet deres levetid kun er $\tau = 2.6 \times 10^{-8}$ s. Hermed menes, at hvis man tænker sig et stort antal N π -mesoner vil deres antal på 2.6×10^{-8} s være formindsket til N/e , hvor $e \simeq 2.72$ er basis for den naturlige logaritme. Dette gælder vel at mærke, hvis man betragter mesonerne i et inertialsystem, hvor de er i hvile.

I laboratoriet produceres π -mesonerne med meget store hastigheder, der f.eks. kunne være 99% af lyshastigheden. I laboratoriesystemet vil deres levetid derfor ifølge (3.2) være forlænget med faktoren $\gamma = 1/\sqrt{1 - 0.99^2} \simeq 7.1$ til $\gamma\tau = 1.87 \times 10^{-7}$ s. At dette faktisk er tilfældet, konstaterer man ved at iagttage den vejlængde, mesonerne når at tilbagelægge i deres levetid. Idet de bevæger sig med en hastighed lige under lyshastigheden, bliver denne vejlængde omtrent $\gamma c\tau = 56$ m, hvilket forstås således, at intensiteten af mesonstrålen formindskes til $1/e$ af den oprindelige værdi på en strækning af 56 m.

Vi tænker os nu, at der ingen relativistisk tidsforlængelse fandtes, og spørger da om mesonstrålens intensitet 56 m fra kilden. De 56 m ville nu tilbagelægges på 7.1 levetider, hvorfor intensiteten ville være formindsket til $e^{-7.1}$ gange den oprindelige værdi, eller omkring $1/1200$ af denne. Dette er i modstrid med erfaringen, der viser at intensiteten kun er formindsket til $1/e$. Vi har altså hermed en verifikation af tidsforlængelsen.

3.2.6 Eksempel: Kosmisk stråling ved jordoverfladen

En lignende effekt kan iagttages ved de muoner, som dannes i de øvre lag af Jordens atmosfære som et resultat af den kosmiske stråling. Den kosmiske stråling, som stammer fra kilder udenfor solsystemet, består hovedsaglig af højenergetiske protoner. Når disse kolliderer med atomkernerne i den øvre atmosfære dannes adskillige π -mesoner. Ved disses forholdsvis hurtige henfald dannes bl.a. muoner, som har en levetid på $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ s. Deres levetid er altså omkring 100 gange længere end π -mesonets. Fandtes der ingen tidsforlængelse, ville disse muoner derfor med lyshastighed kun nå at bevæge sig vejlængden $c\tau \simeq 660$ m ned gennem atmosfæren, og deres intensitet ved jordoverfladen ville da have været yderst ringe. Når de alligevel kan påvises ved jordoverfladen med en forholdsvis høj intensitet, $I \simeq 1 \text{ cm}^{-2}\text{min}^{-1}$, er dette igen en virkning af den relativistiske tidsforlængelse.

3.3 Transformation af hastigheder

Lad os endnu engang betragte to inertialsystemer S og S' i standardkonfigurationen, og lad $\mathbf{u}$ betegne den øjeblikkelige hastighed i S af en partikel eller et geometrisk punkt (for ikke at udelukke muligheden af $u \geq c$). Vi ønsker at finde hastigheden $\mathbf{u}'$ af dette punkt i S'. Som i den klassiske mekanik definerer vi

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad (3.5)$$

og

$$\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right). \quad (3.6)$$

Vi begynder med x -koordinaten og finder ved anvendelse af den differentielle form af Lorentz-transformationen (2.17)

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v dt}{dt - v dx/c^2} = \frac{dx/dt - v}{1 - (dx/dt)(v/c^2)} = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2},$$

hvor sidste skridt følger af definitionen (3.5). Ved at behandle de øvrige koordinater på tilsvarende vis finder vi transformationsligningerne

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}. \quad (3.7)$$

Undervejs har vi ikke gjort antagelser om at hastigheden $\mathbf{u}$ var jævn, og udtrykkene vil derfor gælde helt generelt, altså for den øjeblikkelige hastighed i en vilkårlig bevægelse. Bemærk ligeledes hvordan de fundne udtryk reducerer til de klassiske udtryk (1.5) for små hastigheder $v \ll c$, eller hvis vi formelt lader $c \rightarrow \infty$.

Vi opnår nu de modsatte transformationer ved, som når vi går fra (2.13) til (2.14), at erstatte v med $-v$ i (3.7), altså

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)}, \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)}. \quad (3.8)$$

Disse sidste udtryk kan alternativt tolkes således, at de giver den resulterende hastighed, $\mathbf{u}$, hvis man først tildeler en partikel hastigheden $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ og dernæst, i dets nye hvilesystem, en ny hastighed $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$. De betegnes derfor ofte som formlerne for *sammensætning af hastigheder*.

3.3.1 Størrelsen af sammensatte hastigheder

Idet hastighedernes størrelser i S og S' er henholdsvis $u = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$ og $u' = (u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z)^{1/2}$, finder vi i forlængelse af (2.26)

$$dt^2(c^2 - u^2) = dt'^2(c^2 - u'^2) = dt^2 \gamma^2(v) (1 - u_x v/c^2)^2 (c^2 - u'^2), \quad (3.9)$$

hvor den anden lighed fås ved at benytte Lorentz-transformationen (2.17) til at substituere for dt' og undervejs benytte, at $dx = u_x dt$. Som anført ved diskussionen af (2.26), betyder

den første lighed, at $u < c$ medfører $u' < c$, og omvendt; at $u = c$ medfører $u' = c$, og omvendt; og at $u > c$ medfører $u' > c$, og omvendt. Dette betyder, at enhver sammensætning af to hastigheder, der er mindre end c , giver en ny hastighed, der ligeledes er mindre end c . Så lige meget hvor mange hastighedsforøgelser en partikel tildeles i dens successive hvilesystemer (altså rækken af inertialsystemer i hvilken partiklen er i øjeblikkelig hvile), så vil den aldrig opnå lyshastigheden.

Ved at forkorte igennem med dt^2 på de to fløje af (3.9) finder vi efter omskrivning følgende transformationsligning for u^2 , kvadratet på hastigheden:

$$c^2 - u'^2 = \frac{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}{c^2 (1 - u_x v/c^2)^2}. \quad (3.10)$$

Bemærk, at $u_x v = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, og at højresiden således er symmetrisk i $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Dette betyder, at *størrelsen* af den resulterende hastighed, $\mathbf{u}'$, er den samme uanset i hvilken rækkefølge vi sammensætter to vilkårlige hastigheder, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}$.

3.3.2 Transformation af γ -funktionen

Ved benyttelse af sammenhængen $c^2 - u^2 = c^2/\gamma^2(u)$, som følger direkte af udtrykket (2.12) for γ -funktionen, og tilsvarende for u' og v kan vi introducere de tre γ -funktioner i (3.10). Ved herefter at uddrage kvadratroden finder vi følgende nyttige sammenhæng, som angiver hvordan γ -funktionen for en partikel i bevægelse transformerer fra et inertialsystem til et andet:

$$\gamma(u') = \gamma(v) \gamma(u) \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) \quad (3.11)$$

Som ved tidligere lejligheder finder vi den omvendte transformation ved at erstatte v med $-v$, altså

$$\gamma(u) = \gamma(v) \gamma(u') \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right). \quad (3.12)$$

Bemærk, at vi for ovennævnte sammenhænge implicit har begrænset os til hastigheder mindre end lysets, da γ -funktionen ellers ikke er defineret.

3.3.3 Parallelle hastigheder

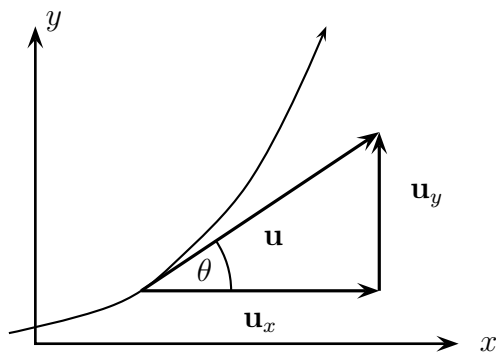
Vi behandler her det vigtige specialtilfælde hvor en bevægelse i S er parallel med x -aksen, og dermed i S' parallel med x' -aksen. Dens hastighed i de to systemer er dermed henholdsvis $u = u_x$ og $u' = u'_x$. Transformationen (3.7) reducerer da til

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}, \quad (3.13)$$

mens den omvendte transformation bliver

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}. \quad (3.14)$$

Lad os en sidste gang kontrollere at vore transformationer tilfredsstiller Einsteins forudsætning om at lyshastigheden er den samme i alle inertialsystemer. Til dette, betragter vi



Figur 3.6: En partikels bevægelse danner i S vinklen θ med x -aksen. Den tilsvarende vinkel i S' findes umiddelbart ved anvendelse af transformationsligningerne for hastigheder.

en lysstråle der bevæger sig med hastigheden $u' = c$ efter x' -aksen i S' . Ved benyttelse af (3.14) finder vi umiddelbart at lysstrålens hastighed i S er $u = c$ i overensstemmelse med forudsætningen.

3.3.4 Eksempel: Retningen af en bevægelse

Vi vil her finde sammenhængen mellem de vinkler θ og θ' , som en hastighedsvektor danner med x - og x' -aksen, når disse vinkler bedømmes fra to inertialsystemer, S og S' . Lad, som på Figur 3.6, bevægelsen foregå i xy -planet, og derfor også i $x'y'$ -planen. Vi benytter da (3.7), hvor vi sætter $u'_z = u_z = 0$. Vinklerne θ og θ' er da givet ved

$$\cot \theta = \frac{u_x}{u_y}, \quad \text{og} \quad \cot \theta' = \frac{u'_x}{u'_y}.$$

Imidlertid kan vi finde forholdet u'_x/u'_y ved at dividere den første ligning i (3.7) med den anden. Dette fører til resultatet

$$\cot \theta' = \gamma \cot \theta \left(1 - \frac{v}{u \cos \theta} \right). \quad (3.15)$$

Opgaver 3

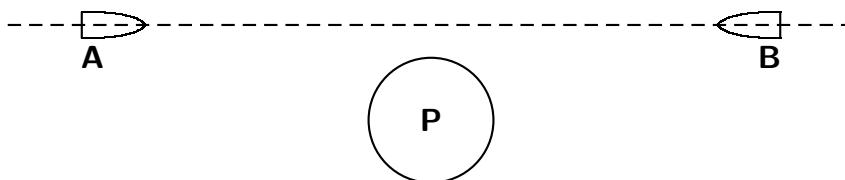
- 3.1** En stang bevæger sig langs x -aksen i S med hastigheden u . Set fra S har den længden L . Hvad er stangens længde L' i det sædvanlige system S' ?
- 3.2** I systemet S ligger partiklen A i hvile mens partiklen B bevæger sig med hastigheden u . Vi betragter nu et system S' , som bevæger sig med hastigheden v i forhold til S . Find værdien af v således, at partiklerne i S' bevæger sig med lige store og modsatrettede hastigheder i tilfælde af (a) Galilei-transformationen; og (b) Lorentz-transformationen.

- 3.3** Et rumskib rejser væk fra Jorden med hastigheden $c/2$. På et tidspunkt udsender den en redningsbåd vinkelret på sin bevægelsesretning med hastigheden $c/3$, begge målt i rumskibets eget inertialsystem. Find størrelsen og retningen af redningsbådens hastighed i forhold til Jord-systemet.
- 3.4** En lyskilde i hvile i S' udsender et lysglimt med vinklen θ' relativ til x' -aksen. Systemet S' bevæger sig på sædvanlig vis med hastigheden v i forhold til laboratoriesystemet S . Vis at lysglimt i S danner vinklen θ med x -aksen, hvor

$$\cos \theta = \frac{c \cos \theta' + v}{c + v \cos \theta'}.$$

Antag derefter, at kilden kan bringes til at udsende lys isotropt i sit eget referencesystem. Vis at den halvdel af lyset, som udsendes i den fremadrettede hemisfære, er koncentreret i en kegle med halvvinkel $\cos^{-1}(v/c)$ i S . Vis dernæst at denne vinkel, for hastigheder tæt på c , kan approksimeres med γ^{-1} .

- 3.5** En planet P udfører en inertialbevægelse. En iagttager på P konstaterer, at to rumskibe A og B nærmer sig hinanden på samme rette linje, således at deres indbyrdes afstand formindskes med hastigheden $(7/5)c$, hvor c er lyshastigheden. En iagttager i A konstaterer, at B nærmer sig A med hastigheden $(35/37)c$.



Bestem hastighederne af rumskibene A og B , målt i forhold til P .

Kapitel 4

Relativistisk optik

Optikken er et af de områder, hvor den specielle relativitetsteori medførte betydelige for-
enklinger. I den forudgående æterteori opførte lyset sig på enkel måde kun i ætersystemet,
og man måtte tage hensyn til, hvordan både kilde og iagttager bevægede sig i forhold til
æteren. Relativitetsteorien overflødiggjorde æteren og den rolle denne spillede som mellem-
mand for lysets udbredelse: Vi ved nu, at lyset udbreder sig på samme måde i ethvert
inertialsystem, som man oprindelig troede, det kun gjorde i ætersystemet.

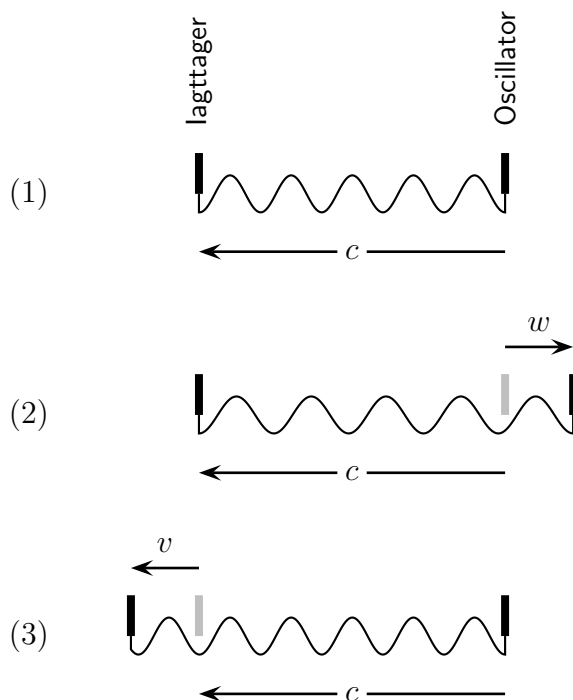
4.1 Doppler-effekten

Bølger, som udsendes fra en kilde, der nærmer sig, har en højere frekvens end bølger fra
en stationær kilde. Set fra kildens system skyldes dette, at iagttageren bevæger sig ind i
bølgetoget. Set fra iagttagerens system skyldes det, at kilden følger efter de udsendte bølger
og at disse dermed bliver tættere pakket. Det modsatte sker, når kilden bevæger sig væk
fra iagttageren. Dette fænomen, som har fået navn efter den østrigske fysiker C. Doppler
(1805–1853), eksisterer for alle former af bølgefænomener så som bølger på vandoverfladen,
lydbølger og lysbølger.

4.1.1 Den klassiske Doppler-effekt

Vi betragter her den klassiske Doppler-effekt, som forudsætter en bølgebevægelse, der
udbreder sig med en konstant hastighed i et medium i hvile i et inertialsystem. Vi kan
tænke på en lydbølge i luften, eller en lysbølge i det tomme rum. For lysbølgen må vi
imidlertid under denne klassiske betragtning falde tilbage på æterteorien, således at vi
tænker os at æteren udgør udbredelsesmediet. Bølgen udsendes fra en oscillator (lydgiver
eller lyskilde) og registreres af en iagttager. Doppler-effekten viser sig da ved, at bølgen
skifter frekvens, når oscillatoren, eller iagttageren, eller begge bevæger sig i forhold til
mediet.

Vi betegner for en plan, monokromatisk bølge



Figur 4.1: En oscillator udsender bølger, som registreres af en iagttager. Det antages, at bølgerne udbreder sig med hastigheden c i et medium. Tre situationer er vist: (1) Både oscillator og iagttager er i hvile i forhold til mediet; (2) Oscillatoren bevæger sig, iagttageren er i hvile; (3) Iagttageren bevæger sig, oscillatoren er i hvile.

- c bølgens udbredelseshastighed i mediet;
- w oscillatorens hastighed i forhold til mediet;
- v iagttagerens hastighed i forhold til mediet;
- ν_0 oscillatorens frekvens;
- ν den iagttagne frekvens;

hvor vi, som på Figur 4.1, har valgt at definere hastighedernes fortegn således, at både v og w regnes positive når oscillator og iagttager bevæger sig væk fra hinanden. Vi betragter nu følgende tilfælde, som illustreret på Figur 4.1:

1. Både kilden og iagttageren er i hvile i forhold til mediet ($v = 0$; $w = 0$):
Den iagttagne frekvens er lig med oscillatorfrekvensen $\nu_0 = 1/T_0$, hvor T_0 er tiden mellem udsendelsen af to på hinanden følgende bølgetoppe;
2. Iagttageren er i hvile mens kilden bevæger sig ($v = 0$; $w \neq 0$):
I tiden T_0 mellem udsendelsen af to bølgetoppe bevæger oscillatoren sig stykket wT_0 bort fra iagttageren. Den anden bølgetop bevæger sig således dette stykke længere end den første, hvorfor tiden mellem ankomsten af de to bølger er

$$T = T_0 + \frac{wT_0}{c} = T_0(1 + w/c).$$

3. Iagttageren bevæger sig mens kilden er i hvile ($v \neq 0$; $w = 0$):

I tiden T mellem modtagelsen af to bølgetoppe bevæger iagttageren sig stykket vT bort fra oscillatoren. Den anden bølgetop bevæger sig derfor dette stykke længere end den første, hvorfor tiden mellem ankomsten af de to bølger er

$$T = T_0 + \frac{vT}{c} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_0}{1 - v/c}.$$

I det tilfælde hvor både oscillatoren og iagttageren er i bevægelse i forhold til mediet kombineres argumenterne ovenfor, hvorfor tiden mellem ankomsten af to bølger generelt er

$$T = T_0 \frac{1 + w/c}{1 - v/c}.$$

Da frekvensen er omvendt proportional med perioden er udtrykket for den *klassiske Doppler-effekt* derfor

$$\boxed{\frac{\nu_{kl}}{\nu_0} = \frac{1 - v/c}{1 + w/c}}. \quad (4.1)$$

Det kan umiddelbart bemærkes, at dette udtryk må modificeres i den relativistiske teori, altså for beskrivelsen af lysbølger. Den klassiske effekt afhænger jo netop af både oscillatorens (w) og iagttagersens (v) hastighed i forhold til mediet. I den relativistiske fremstilling må vi derimod kræve, at den iagttagne frekvens alene afhænger af den *relative* hastighed af kilde og iagttagers.

4.1.2 Den relativistiske Doppler-effekt

Vi anlægger nu en relativistisk betragtning, idet vi ønsker at beskrive udbredelsen af lysbølger. Vi vil imidlertid i første omgang gå frem ved, som i det klassiske tilfælde, at betragte bevægelsen af oscillator og kilde som separate fysiske fænomener. Dette gør vi vel vidende at de to situationer under den relativistisk betragtning må være ækvivalente. Igen går vi altså frem ved at følge Figur 4.1:

1. Både kilden og iagttageren er i hvile i forhold til mediet ($v = 0$; $w = 0$):

Den iagttagne frekvens er lig med oscillatorfrekvensen $\nu_0 = 1/T_0$.

2. Iagttageren er i hvile mens kilden bevæger sig ($v = 0$; $w \neq 0$):

I iagttagersens inertialsystem er det for kilden karakteristiske tidsinterval T_0 grundet den relativistiske tidsforlængelse forlænget med γ -faktoren $(1 - w^2/c^2)^{-1/2}$. Herefter er argumentationen den samme som i det ikke-relativistiske tilfælde, hvorfor tiden mellem ankomsten af to bølgetoppe er

$$T = T_0 \frac{1 + w/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \quad (4.2)$$

3. Iagttageren bevæger sig mens kilden er i hvile ($v \neq 0$; $w = 0$):

I laboratoriesystemet er tiden mellem modtagelsen af to bølgetoppe, som i det ikke-relativistiske tilfælde, $T_0/(1-v/c)$. Modtagelsen af de to bølgetoppe sker i laboratoriesystemet i to forskellige rum-punkter, hvorfor laboratorietiden er forlænget med γ -faktoren i forhold til tiden i iagttagerens system, som tilsvarende egentiden. Tiden i iagttagerens system er dermed

$$T = T_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c}. \quad (4.3)$$

Betragter vi nu situationen, hvor kilden og iagttageren bevæger sig væk fra hinanden med den *relative* hastighed u , kan dette f.eks. opnås ved enten i (4.2) at sætte $w = u$ eller ved i (4.3) at sætte $v = u$. Ved en simpel aritmetisk omskrivning finder vi, at

$$\frac{1 + u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u/c},$$

hvorfor de to udtryk (4.2) og (4.3) er identiske, som vi jo netop må kræve af en relativistisk invariant teori. Ved f.eks. at vælge formen (4.2) for T finder vi nu følgende udtryk for den *relativistiske Doppler-effekt*

$$\frac{\nu_{\text{rel}}}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + u/c}, \quad (4.4)$$

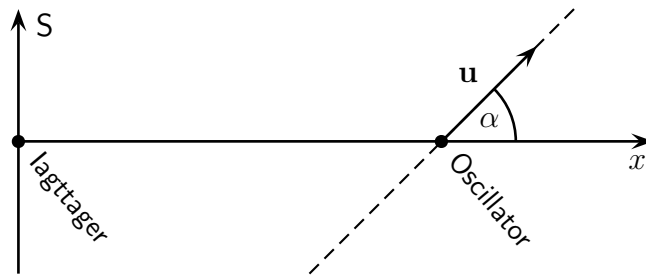
som også kan skrives på formen

$$\boxed{\frac{\nu_{\text{rel}}}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}}. \quad (4.5)$$

Ikke-parallele hastigheder

Ved ovenstående betragtninger er vi stiltiende gået ud fra, at de tre hastigheder c , v og w var parallelle. Vi vil nu undersøge effekten, når dette ikke er tilfældet, idet vi her indskrænker os til alene at betragte virkningen af, at kildens hastighed ikke er parallel med bølgens. Til dette brug tænker vi os en situation, som illustreret på Figur 4.2, hvor iagttageren er i hvile i begyndelsespunktet af et inertialsystem S, mens kilden befinder sig på den positive x -akse. Kilden bevæger sig med hastigheden u , som danner vinklen α med x -aksen. Afstanden mellem kilde og iagttager tænkes at være meget stor, således at kildens bevægelse i det betragtede tidsrum er forsvindende i sammenligning. Idet tidsforlængelsen mellem kildens og iagttagerens inertialsystemer ikke afhænger af retningen af u , vil iagttageren ligesom i det parallelle tilfælde opleve tiden mellem udsendelsen af to bølgerflader forlænget med faktoren $\gamma = [1 - u^2/c^2]^{-1/2}$ til γT_0 . I dette tidsrum bevæger kilden sig stykket $\gamma T_0 u \cos \alpha$ væk fra iagttageren. Tiden mellem modtagelsen af to bølger er derfor

$$T = T_0 \frac{1 + (u/c) \cos \alpha}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.6)$$



Figur 4.2: Oscillatoren bevæger sig i en retning, som danner vinklen α med forbindelseslinjen mellem iagttageren og oscillatoren.

og det generelle udtryk for den relativistiske Doppler-effekt er

$$\frac{\nu_{\text{rel}}}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + (u/c) \cos \alpha} \quad (4.7)$$

Specielt kan det bemærkes, at vi for $\alpha = \pi/2$ har en *transversal Doppler-effekt*, som er bestemt ved

$$\frac{\nu_{\text{trans}}}{\nu_0} = \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (4.8)$$

Det indses let, at den transversale Doppler-effekt udelukkende skyldes den relativistiske tidsforlængelse, og at en tilsvarende effekt ikke er til stede i den klassiske beskrivelse.

Indskud 4.1 Vi vender nu tilbage til det en-dimensionale tilfælde for at undersøge nøjere hvordan den relativistiske Doppler-effekt adskiller sig fra den klassiske. I det klassiske tilfælde afhænger effekten af hvorvidt det er kilden eller iagttageren der bevæger sig i forhold til mediet. I det tilfælde, hvor iagttageren er i hvile mens kilden bevæger sig bort med hastigheden $\beta = u/c$, er forholdet mellem den iagttagne og den udsendte frekvens ifølge (4.1) givet ved

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1}{1 + \beta} = 1 - \beta + \beta^2 + \dots \quad (4.9)$$

I det modsatte tilfælde, hvor kilden er i hvile mens iagttageren bevæger sig bort, fås

$$\frac{\nu}{\nu_0} = 1 - \beta. \quad (4.10)$$

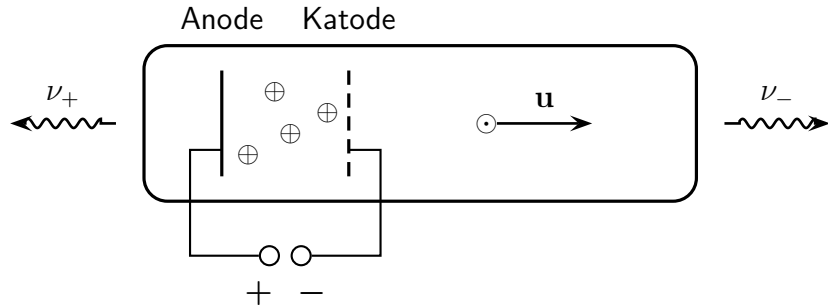
De to udtryk er identiske til første orden i β , men adskiller sig til anden orden. For den relativistiske Doppler-effekt skelnes ikke mellem bevægelse af kilden og bevægelse af iagttageren, idet man i begge tilfælde ifølge (4.5) finder

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = 1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2 - \dots \quad (4.11)$$

Det kan bemærkes, at dette udtryk er givet ved gennemsnittet af de to klassiske udtryk, og at den relativistiske effekt udelukkende adskiller sig fra den klassiske ved led af anden orden i β . Da Doppler-effekten i sig selv er af første orden i β , vil den relativistiske korrektion altså for almindeligt forekommende hastigheder være langt mindre end den klassiske effekt.

4.1.3 Eksempel: Ives-Stilwell forsøget

Skønt dens lille størrelse lykkedes det i 1938 for første gang de to amerikanske fysikere H. E. Ives og G. R. Stilwell at påvise den relativistiske korrektion til Doppler-effekten ved at udføre spektroskopiske målinger på stråler af eksiterede brint-atomer. Atomerne accelereredes ved at man først dannede kortlivede atomare brint-ioner, H_2^+ og H_3^+ , som udsattes for et kraftigt elektrisk felt mellem anode og katode i et såkaldt kanalstrålerør. Efter accelerationen gendannedes atomar brint ved ionernes henfald. Spændingsforskellen reguleredes så atomernes hastighed var $u/c = 4.5 \times 10^{-3}$.



Figur 4.3: Kanalstrålerør anvendt af Ives og Stilwell til påvisning af den relativistiske Doppler-effekt.

Ved eksperimentet målttes frekvensen af en bestemt linie i brint-spektret. Lad denne frekvens være ν_0 i et system i hvilket brint-atomerne er i hvile. Værdien ν_0 er da i forvejen kendt fra spektroskopien. Spektret observeres nu fra både anode-ende (ν_+) og katode-ende (ν_-) af røret, og ifølge (4.5) finder man frekvenserne

$$\nu_+ = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}, \quad \text{og} \quad \nu_- = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}.$$

For middeltallet af de to frekvenser giver den relativistiske beskrivelse altså

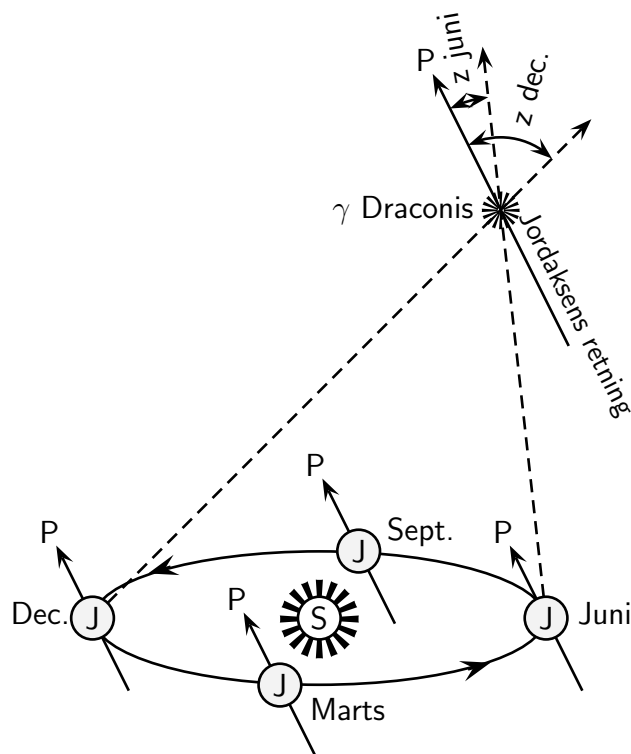
$$\bar{\nu}_{\text{rel}} = \frac{1}{2}(\nu_+ + \nu_-) = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (4.12)$$

Af (4.1) finder man på tilsvarende vis, at den klassiske beskrivelse af eksperimentet ville føre til et middeltal bestemt ved

$$\bar{\nu}_{\text{kl}} = \frac{\nu_0}{1 - u^2/c^2}. \quad (4.13)$$

I det foreliggende tilfælde er ν_0 omtrent 0.02 promille mindre end $\bar{\nu}_{\text{rel}}$, der igen er 0.02 promille mindre end $\bar{\nu}_{\text{kl}}$.

Forsøget udførtes nu på den måde, at lysstrålerne fra de to ender af udladningsrøret, sammen med lys fra hvilende brint-ioner ved hjælp af en spejlanordning sendtes ind i et interferensspektroskop. Ives og Stilwell kunne da konstatere, at der mellem ν_0 og middeltallet $\bar{\nu}$ var en forskel, som helt udelukkede den klassiske formel (4.13), men var i overensstemmelse med den relativistiske formel (4.12).



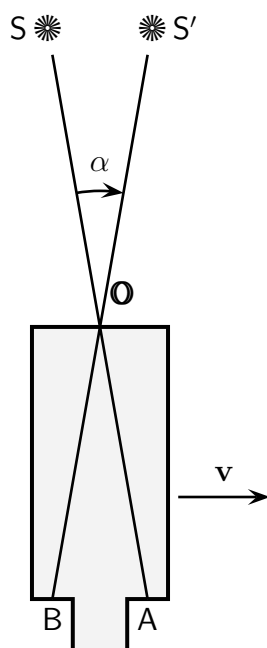
Figur 4.4: Ved en præcis observation af fiksstjernes position gennem året kan man eftervise lysets aberration, som er et resultat af Jordens hastighed i dens bane omkring Solen.

4.2 Lysets aberration

Enhver der har prøvet at køre gennem lodret faldende regn eller sne ved, at denne synes at ramme en skråt forfra, med en vinkel der afhænger af hastigheden, hvormed man kører. En lignende effekt gør sig gældende for lys, og er kendt under betegnelsen *lysets aberration*.

Lysets aberration opdagedes i 1727 af den engelske astronom J. Bradley (1692–1762) under sine bestræbelser på at konstatere en årlig parallakse af fiksstjernerne og dermed bevise Jordens bevægelse omkring Solen. For at undgå virkningerne af den atmosfæriske refraktion observerede Bradley hovedsagelig i nærheden af zenit. Det lykkedes Bradley at påvise en årlig variation i positionen af stjernen γ Draconis, men en nærmere analyse viste, at fænomenet ikke kunne tolkes som en parallakse, idet det ikke havde maksimum og minimum til de rigtige tidspunkter.

På Figur 4.4 ses Jorden J i fire forskellige stillinger af sin årlige bane omkring Solen S. Jordens akse har en konstant retning i rummet og peger derfor i alle stillinger mod himmel-polen P. Parallaksen skulle da give sig til kende ved, at synslinien fra Jorden til stjernen varierer, således at zenitdistancen z blev størst i december og mindst i juni. Ved jævndøgn i marts og september skulle z have en middelværdi. Observationerne viste imidlertid, at variationen af z var nul i juni og december, mens z var $40''$ større i september end i marts. Andre stjerner viste tilsvarende forskydninger, idet de alle omkring en middelposition ud-



Figur 4.5: Grundet lysets aberration forekommer stjernen at være i positionen S' og ikke i den sande position S .

førte små årlige bevægelser i elliptiske baner. Alle disse ellipser havde samme storakse $40''$, men forskellige lilleakser.

Idet Bradley indså, at de omtalte forskydninger i alle tilfælde var parallelle med Jordens øjeblikkelige hastighed, erkendte han dem som en følge af, at denne hastighed v ikke er forsvindende i forhold til lyshastigheden. Dette fænomen kaldes lysets *aberration* og forstås ud fra Figur 4.5, der viser en stjerne S , som sender lys ind gennem et kikkertobjektiv ved O . Er kikkerten i hvile vil der da dannes et billede af stjernen i objektivets brændplan ved A . Men er kikkerten i bevægelse med hastigheden v vinkelret på sin længderetning, vil billedet af S dannes i brændplanen ved B , idet kikkerten har bevæget sig stykket $|AB|$ i den tid, lyset er på vej igennem den fra O til brændplanen. Stjernen ses da ikke i retningen AOS , men i retningen BOS' , således at synslinien er forskudt vinklen $SOS' = \alpha$ i retning af kikkertens bevægelsesretning. Denne vinkel α bestemmes let ud fra sammenhængen

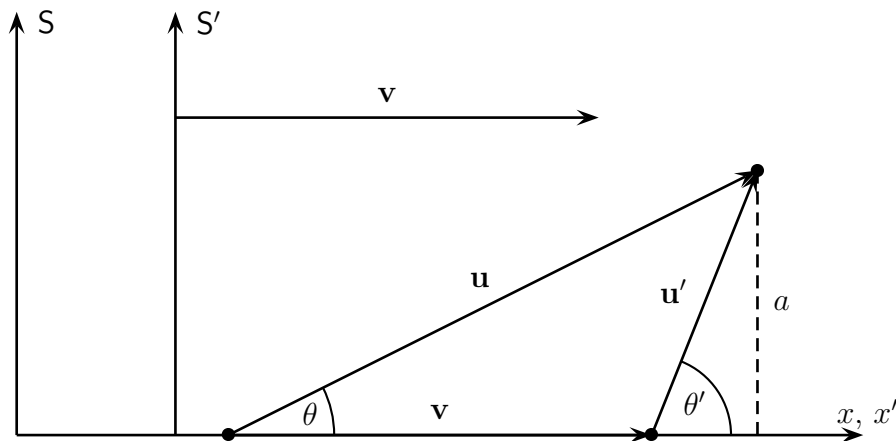
$$|AB| = \frac{v}{c} |OA|$$

hvoraf følger

$$\tan \alpha = \frac{v}{c}.$$

Da Jordens banehastighed er $v \simeq 30$ km/s og $c = 300\,000$ km/s, bliver $\alpha \simeq \tan \alpha \simeq 10^{-4} \simeq 20''$, svarende til at storaksen i alle aberrationsellipser bliver det dobbelte, hvilket stemmer godt med den observerede værdi.

Det er interessant at bemærke, at Bradley vendte de ovenfor beskrevne argumenter omkring og derigennem var i stand til at foretage en tidlig måling af lysets hastighed.



Figur 4.6:

4.2.1 Klassisk aberration

Mere alment fås den *klassiske aberrationsformel* ud fra Figur 4.6, der viser to inertialsystemer S og S' med den relative hastighed $\mathbf{v}$. En bevægelse foregår i S' med hastigheden $\mathbf{u}'$ under vinklen θ' med x' -aksen. I S har den hastigheden $\mathbf{u}$, der danner vinklen θ med x -aksen. Galilei-transformationen fører da til relationen

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{u}',$$

mens vi af trekkanterne på figuren får

$$\cot \theta = \frac{v + u' \cos \theta'}{a} \quad \text{og} \quad \cot \theta' = \frac{u' \cos \theta'}{a},$$

hvoraf

$$\frac{\cot \theta}{\cot \theta'} = \frac{v + u' \cos \theta'}{u' \cos \theta'}$$

eller

$$\cot \theta = \cot \theta' \left(1 + \frac{v}{u' \cos \theta'} \right). \quad (4.14)$$

Er der specielt tale om bevægelsen af en lysstråle, får vi heraf ved at sætte $u' = c$

$$\cot \theta = \cot \theta' \left(1 + \frac{v}{c \cos \theta'} \right). \quad (4.15)$$

4.2.2 Relativistisk aberration

Den *relativistiske aberrationsformel* fås derimod direkte fra formel (3.15) for retningen af en bevægelse, der med $u' = c$ giver

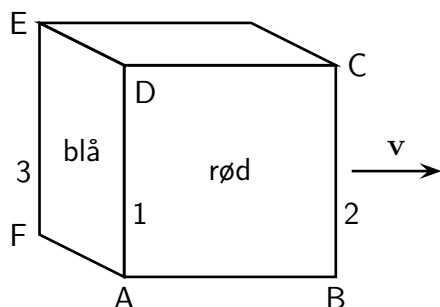
$$\cot \theta = \cot \theta' \frac{1 + \frac{v}{c \cos \theta'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.16)$$

4.3 Den tilsyneladende form af bevægede objekter

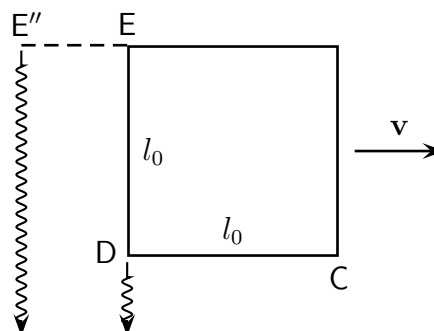
Vi skal i dette afsnit behandle spørgsmålet om, hvilken indflydelse længdeforkortningen har på den tilsyneladende form af bevægede objekter. Som vi har set, følger længdeforkortningen direkte af den vedtagne metode til længdemåling: længden af en stang defineres som afstanden mellem mærker, der samtidigt afsættes ud for dens endepunkter, idet samtidighed defineres ved hjælp af lyssignaler som omtalt i Afsnit 2.2.1.

Vi kan nu først indse, at man ikke foretager nogen længdemåling af et objekt i bevægelse hverken ved at *betragte* det med øjet, eller ved at *fotografere* det med et kamera. I begge tilfælde afbildes objektet (på nethinden eller på filmen) ved hjælp af lysstråler, der afgår fra de forskellige punkter A, B, C, ... af objektet, og ankommer til de tilsvarende billedpunkter A', B', C', ... på nethinden eller på filmen på samme tid. I almindelighed vil de stråler, der samtidigt ankommer til billedpunkterne, ikke være afgået samtidigt fra genstandspunkterne. For et objekt i bevægelse kan man derfor ikke betragte afstande på billedet som proportionale med de tilsvarende afstande på genstanden, der altså på grund af sin bevægelse vil afbildes med en vis forvrængning.

Hvorledes denne forvrængning vil ytre sig kan vi indse ved, som på Figur 4.7, at betragte en terning ABCDEF, hvis kanter har hvilelængden l_0 . Det antages at terningen bevæger sig med hastigheden v parallelt med kanten AB, og at iagttageren befinder sig langt borte i retning af fladen ABCD's normal.



Figur 4.7:

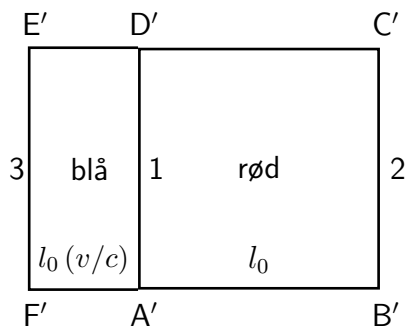
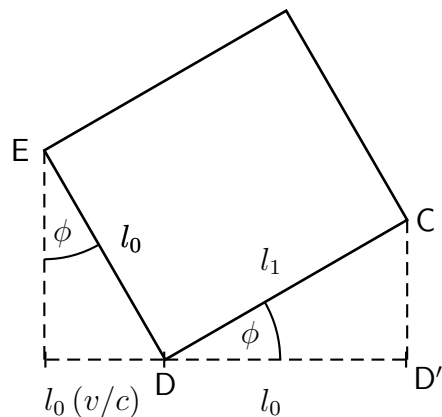


Figur 4.8:

Vi betragter først situationen ikke-relativistisk. Der er da ingen længdeforkortning, hvorfor iagttageren vil opfatte forfladen som kvadratisk med kantlængden l_0 . Imidlertid vil han se sidefladen i en vis forkortning. Dette skyldes, at han samtidig med lyset fra D også vil modtage lys fra hjørnet E, der afgik lidt tidligere på et tidspunkt, da E befandt sig i punktet E''. På Figur 4.8 er situationen vist set fra oven. Det fremgår heraf, at lyset fra E må afgå tiden l_0/c tidligere end lyset fra D for at ankomme samtidig til iagttageren. Men i dette tidsrum har terningen bevæget sig stykket

$$E''E = l_0 \frac{v}{c}.$$

Billedet af terningen vil derfor blive som vist på Figur 4.9 og altså bestå af et kvadrat A'B'C'D' med kanten l_0 , og et rektangel med bredden $l_0 v/c$ og højden l_0 . Eftersom iagttageren altså både ser forfladen og sidefladen af terningen vil han opfatte den som *drejet*

**Figur 4.9:****Figur 4.10:**

en vinkel ϕ , der af Figur 4.10 ses at være bestemt ved

$$\sin \phi = \frac{v}{c}.$$

Men tillige vil han slutte, at kanten DC er længere end l_0 . For efter en drejning på vinklen ϕ skulle DC vise sig med længden

$$DD'' = l_0 \cos \phi = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Da kanten DC viser sig med længden l_0 , vil iagttageren altså slutte, at den i virkeligheden har længden

$$l_1 = \frac{l_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

der altså takket være drejningen viser sig som

$$l_1 \cos \phi = l_0$$

Ved anlæggelsen af en ikke-relativistisk betragtning, vil iagttageren med andre ord ikke opfatte en forbipasserende terning som en terning, men som et parallelepipedum med kantlængden l_0 og l_1 som vist fra oven på Figur 4.10. På lignende måde kan man vise, at en kugle tilsyneladende vil trækkes ud i bevægelsesretningen og afbildes med et elliptisk omrids.

Vi betragter derefter fænomenet relativistisk. Vi ved da, at kanterne AB og DC på grund af længdeforkortningen reduceres til

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

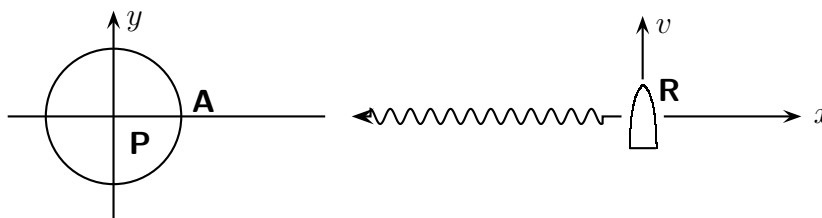
mens kanterne vinkelret derpå er uændrede. Men ved igen at betragte Figur 4.10 ser vi, at netop er den længde, hvormed terningkanten $DC = l_0$ vil vise sig efter en drejning på vinklen ϕ . Takket være længdeforkortningen vil en iagttager altså stadig se en forbipasserende terning som en terning, der blot er drejet en vis vinkel.

Man kan vise, at dette resultat gælder ikke blot for terninger, men for legemer af en vilkårlig form. Alle legemer vil derfor beholde deres tilsyneladende form uafhængigt af deres bevægelse. Dette må naturligvis ikke tolkes sådan at længdeforkortningen ikke eksisterer. Tværtimod – det er netop dens eksistens der bevirker en kompensation af den forlængelse af billedet, der skyldes lysets endelige hastighed.

Vi har ovenfor stiltiende forudsat, at lysstrålerne fra forskellige punkter af objektet til iagttageren var parallelle, dvs. at objektet kun spænder over en lille rumvinkel set fra iagttagerens plads. Er dette ikke tilfældet, vil der fremkomme forvrængninger som følge af, at de tilsyneladende drejning ϕ ikke bliver af samme størrelse for alle legemets punkter. Det kan dog vises, at et kugleformet legeme altid vil ses med et cirkulært omrids.

Opgaver 4

- 4.1** En bilist anklages for at have kørt over for rødt lys. Til sit forsvar fremfører hun, at lyset syntes grønt for hende p.g.a. Doppler-effekten. Hvis dette er sandt, hvor hurtigt skal hun da have kørt? [Forholdet mellem frekvensen af grønt og rødt lys kan antages at være $\nu(\text{grønt})/\nu(\text{rødt}) = 1.2$].
- 4.2** En iagttager er i hvile i punktet A på en planet P. Planeten er i hvile i et inertialsystem, som er bestemt ved det på figuren antydede koordinatsystem.



Et rumskib R bevæger sig med den konstante hastighed v i xy -planen i en retning der er parallel med y -aksen. I det øjeblik R passerer koordinatsystemets x -akse, udsendes der fra rumskibet et lasersignal, parallelt med x -aksen, rettet mod A. En iagttager i R noterer sig bølgelængden af det udsendte lys. Iagttageren i A modtager lyssignalet og noterer sig ligeledes bølgelængden. Den ene iagttager finder bølgelængden $6000 \text{ \AA}$, den anden finder bølgelængden $5400 \text{ \AA}$.

Angiv hvilken bølgelængde iagttageren i A finder, og bestem størrelsen af rumskibets hastighed v i forhold til P. Udtryk v i enheder af lyshastigheden c .

4.3 Det ekspanderende univers

Lyset fra en fjern galakse analyseres ved hjælp af et spektrometer. En spektrallinie, som observeres ved bølgelængden 730 nm , identificeres ud fra nabostribernes mønster til at være en brintlinje, som i laboratoriet har bølgelængden 487 nm . Under forudsætning af at ændringen i bølgelængden skyldes Doppler-effekten, beregn hvor hurtig den observerede galakse bevæger sig i forhold til Jorden. Det antages at galaksen bevæger sig på en lige linje væk fra Jorden.

Ifølge uafhængige målinger befinder den observerede galakse sig 5×10^9 lysår fra Jorden. Estimer på baggrund heraf hvor langt tilbage i tiden denne galaksen separeredes fra vores egen galakse – Mælkevejen – under den simple forudsætning, at de to galakser indbyrdes hastighed har været uforandret, siden deres veje skiltes. Astronomen Edwin Hubble opdagede i 1929, at denne tid – hvis reciprokke kaldes Hubble-konstanten – har omtrent den samme værdi for alle galakser, hvis afstande og hastigheder kan måles. Dette giver anledning til begrebet “det ekspanderende univers”.

I virkeligheden vil de to galakser indbyrdes hastighed næppe være konstant, idet den vil bremses ned af tyngdekraften. Vil dette forøge eller formindske tiden tilbage til starten på universets ekspansion.

Sidste nyt: De nyeste astronomiske målinger tyder på, at galaksernes indbyrdes hastighed ikke bremses, som netop antydtes. Derimod synes universets ekspansion at accelerere. Mekanismen bag dette er ikke forstået.

Kapitel 5

Rumtiden og fire-vektorer

Vi har i de foregående kapitler set, hvorledes opfattelsen af tiden i den specielle relativitetsteori er nøje påvirket af den relative bevægelse af iagttageren og det iagttagne fænomen. Hvor tidspunktet for en begivenhed ifølge Galilei-transformationen er en absolut størrelse, sker der ved Lorentz-transformationen en sammenblanding af tidspunktet for begivenheden og begivenhedens rumlige koordinater. Denne sammenhæng mellem rum og tid leder naturligt til opfattelsen af tiden som en fjerde dimension. Ifølge denne beskrivelse, som introduceredes af matematikeren Minkowski allerede i 1907, udfolder historien sig i et 4-dimensionalt (statisk) kontinuum, som er kendt under betegnelsen *rumtiden* eller *Minkowski-rummet*. Vi har allerede indført rumtiden som begreb i Kapitel 2 og skal nu fuldføre diskussionen.

5.1 Rumtiden

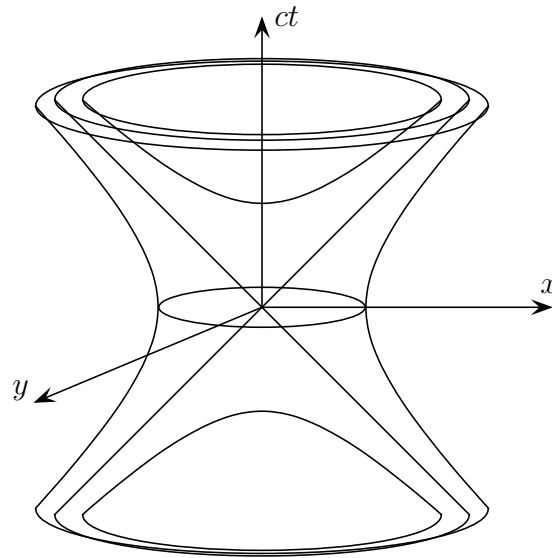
Et punkt i rumtiden er karakteriseret ved et sæt af fire tal (t, x, y, z) , af hvilke det første definerer et tidspunkt t , mens de øvrige tre definerer et punkt (x, y, z) i det sædvanlige 3-dimensionale rum. Talsættet (t, x, y, z) henleder derfor vor opmærksomhed på, hvad der sker til tiden t i punktet (x, y, z) , og definerer derfor, hvad vi allerede tidligere har kaldt en begivenhed. En sådan beskrivelse kunne man lige så vel have indført i den klassiske mekanik, men den ville her ikke lede til nogen ny fysisk indsigt. Det nye i den specielle relativitetsteori er eksistensen af den invariante 4-dimensionale differential-form

$$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (5.1)$$

At ds^2 virkelig er invariant, og altså har samme værdi i ethvert inertialsystem, har vi vist i (2.20). Bortset fra den særprægede sammenblanding af plus- og minus-tegn minder ds^2 om størrelsen

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (5.2)$$

som fuldstændig karakteriserer geometrien af det sædvanlige 3-dimensionale rum som værende Euklidisk. På samme måde som dr^2 er invariant under enhver rotation i det 3-dimensionale rum, er ds^2 altså invariant under enhver Lorentz-transformation. Og på samme måde, som invariansen af dr^2 bestemmer geometrien af det 3-dimensionale rum, bestemmer invariansen af ds^2 geometrien af rumtiden.



Figur 5.1: Et eksempel på et 3-dimensionalt rumtidsdiagram, som afbilder lyskeglen omkring begyndelsespunktet, $c^2t^2 - x^2 - y^2 = 0$ og de to hyperboloider $c^2t^2 - x^2 - y^2 = 1$ (indre to-delt) og $c^2t^2 - x^2 - y^2 = -1$ (ydre).

5.2 Tre-dimensionale rumtidsdiagrammer

Vi har allerede stiftet bekendtskab med rumtidsdiagrammer i Afsnit 2.9, hvor eksempler på 2-dimensionale diagrammer er vist i Figur 2.5 og Figur 2.6. Vi vil nu udvide formalismen til at omfatte også 3-dimensionale diagrammer. Gennem anvendelse af perspektiv har vi vænnet os til afbildninger af det sædvanlige 3-dimensionale rum på et fladt stykke papir. Rumtiden er 4-dimensional, og lader sig derfor på ingen måde afbilde på papiret i sin helhed. Lader vi imidlertid én dimension ude, f.eks. den rumlige z -retning, kan vi igen benytte den perspektivistiske metode og danne en meningsfuld afbildning. Imidlertid må vi ved betragtning af et sådant diagram forsøge at kompensere for fraværet af den sidste rumlige dimension ved at aflæse cirkler som sfærer, planer som Euklidisk rum etc. Som et eksempel viser Figur 5.1 hyperboloiderne

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 = \pm 1, \quad (5.3)$$

som fremkommer ved en drejning af de i Figur 2.6 viste hyperbler $c^2t^2 - x^2 = \pm 1$ omkring ct -aksen. Den indre (to-delte) hyperboloide repræsenterer alle begivenheder, der tilfredsstiller $c^2t^2 - x^2 - y^2 = 1$, mens den ydre hyperboloide repræsenterer begivenhederne, der tilfredsstiller $c^2t^2 - x^2 - y^2 = -1$. Idet hældningen af en fysisk partikels verdenslinie i forhold til lodret er et mål for partiklens hastighed, v/c , kan denne som tidligere anført ikke på noget sted overstige 45° . Fotoner repræsenteres ved rette linier som danner en vinkel på 45° med ct -aksen.

5.3 Lyskegler og intervaller

Den mest grundlæggende invariante struktur i rumtiden er sættet af såkaldte lyskegler, hvoraf der findes ét for hvert af rumtidens punkter (begivenheder) $\mathcal{P}$. En lyskegle består af mængden af verdenslinier for samtlige fotoner der passerer igennem $\mathcal{P}$, eller med andre ord beliggenheden af alle begivenheder $\mathcal{Q}$, der kan sende lys til eller modtage lys fra $\mathcal{P}$. Begivenhederne $\mathcal{Q}$ tilfredsstiller dermed ligningen

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0, \quad (5.4)$$

hvor Δ 'erne angiver differencen mellem koordinaterne af $\mathcal{P}$ og $\mathcal{Q}$. Med $\mathcal{P}$ liggende i origo, reducerer ligningen til $c^2t^2 - x^2 - y^2 = 0$, hvis vi lader z -koordinaten ude. Denne lyskegle genkendes på Figur 5.1, hvor den som en 45° kegle udgør asymptoten mellem de to hyperboloider. Opfattet sekventielt i tiden t i systemet S , repræsenterer denne lyskegle en cirkulær lys-front, der først samler sig omkring begyndelsespunktet og dernæst bevæger sig væk fra dette igen. På grund af invariansen af det definerende udtryk (5.4) under en Lorentz-transformation repræsenterer lyskeglen det samme fænomen i ethvert inertialsystem. Dette burde ikke overraske os, idet dette præcis var, hvad vi krævede igennem (2.8) og (2.9) under udledningen af Lorentz-transformationen. I den rigtige verden, hvor rummet er 3-dimensionalt, er det selvfølgelig ikke en cirkulær men en sfærisk lysfront der samler sig om begivenheden og bevæger sig væk igen. Alligevel er fænomenet kendt under betegnelsen *lyskeglen*.

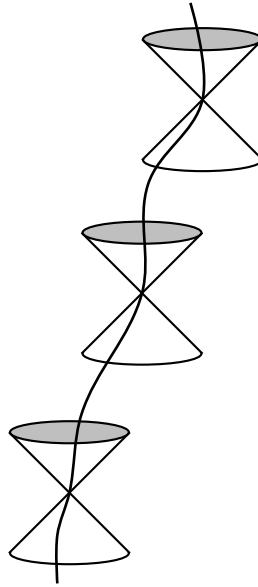
Figur 5.2 antyder, hvordan der til hvert punkt på en partikels verdenslinie hører en lyskegle. Idet enhver fysisk partikel bevæger sig langsommere end c , vil dens verdenslinie ligge indenfor enhver lyskegle der har sit begyndelsespunkt på den samme verdenslinie.

Vi vil nu undersøge den fysiske betydning af den fundamentale invariante form (5.1) i rumtiden, eller, endnu bedre, af den tilsvarende endelige version

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta t^2 \left(c^2 - \frac{\Delta r^2}{\Delta t^2} \right), \quad (5.5)$$

hvor Δ -ledene henviser til to begivenheder $\mathcal{P}$ og $\mathcal{Q}$, som ikke nødvendigvis er naboer. Betydningen af Δs^2 afhænger af dets fortegn, hvorfor vi har følgende tre tilfælde:

- i) Det simpleste tilfælde er $\Delta s^2 = 0$, hvor $\mathcal{P}$ og $\mathcal{Q}$ jo netop kan forbindes med et lyssignal;
- ii) I det tilfælde, hvor $\Delta s^2 > 0$, er $\Delta r^2/\Delta t^2 < c^2$ i ethvert inertialsystem. En fysisk partikel, og således også et ur, kan dermed bevæges med jævn hastighed fra $\mathcal{P}$ til $\mathcal{Q}$, eller omvendt. I urets *hvilesystem* S' forekommer $\mathcal{P}$ og $\mathcal{Q}$ i samme punkt, således at $\Delta s^2 = c^2\Delta t'^2$. Altså er *intervallet* $\Delta s = \sqrt{|\Delta s^2|}$ mellem $\mathcal{P}$ og $\mathcal{Q}$ i dette tilfælde c gange den forløbne tid (*egentiden*) på uret, som bevæger sig jævnt og retlinet mellem de to begivenheder.
- iii) I det sidste tilfælde, hvor $\Delta s^2 < 0$, er $\Delta r^2/\Delta t^2 > c^2$ i ethvert inertialsystem. Dette er situationen, der karakteriserer overlyshastigheder. Som det fremgår af diskussionen, der følger (2.24), vil der derfor gives et inertialsystem S' , hvor de to begivenheder sker til samme tidspunkt. I dette system er $\Delta s^2 = -\Delta r'^2$. Intervallet Δs er således den



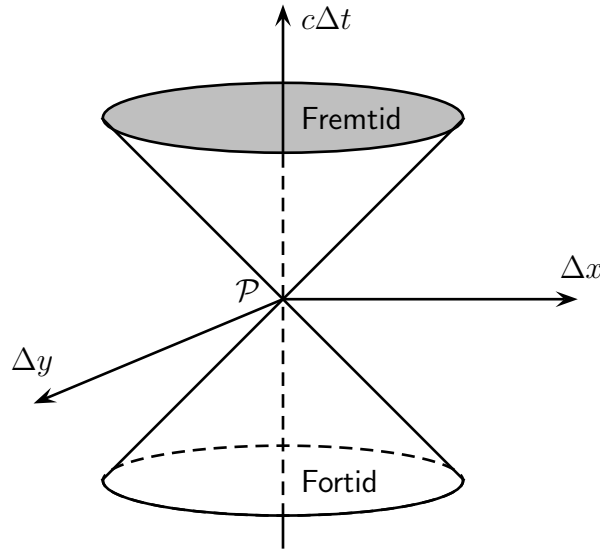
Figur 5.2: Til enhver begivenhed på en partikels verdenslinie hører en lyskegle. Partiklens verdenslinie ligger inden for enhver af disse lyskegler.

rumlige afstand mellem de to begivenheder i det system, hvori de er samtidige. Af (5.5) ser vi, at dette også er den korteste rumlige afstand, der kan tilskrives de to begivenheder i noget inertialsystem.

Af den ovenstående diskussion ser vi, at lyskeglen tilhørende enhver begivenhed $\mathcal{P}$ bevirker en meget vigtig, *kausal* opdeling af samtlige begivenheder i rumtiden i forhold til $\mathcal{P}$ (se Figur 5.3). Alle begivenheder på eller inden for den fremtidige lyskegle (dvs. lyskeglens øvre halvdel) kan påvirkes af $\mathcal{P}$, idet de nemlig kan nås med hastigheder $u \leq c$, og derfor kan modtage signaler fra $\mathcal{P}$. Endvidere vil begivenhederne i dette område, som vi har set i Afsnit 2.8, foregå senere end $\mathcal{P}$ for enhver iagttagere. Disse begivenheder siges dermed at udgøre $\mathcal{P}$'s *absolutte* (eller *kausale*) *fremtid*. Tilsvarende argumenter kan benyttes for begivenhederne på eller inden for $\mathcal{P}$'s fortidige lyskegle: de foregår tidligere end $\mathcal{P}$ for enhver iagttagere og kan påvirke $\mathcal{P}$ gennem signaler. De udgør dermed $\mathcal{P}$'s *absolutte* (eller *kausale*) *fortid*. For begge disse to klasser af begivenheder, der er kausalt forbundne med $\mathcal{P}$, gælder $\Delta s^2 \geq 0$. Ingen begivenhed i området uden for lyskeglen, hvor altså $\Delta s^2 < 0$, kan påvirke $\mathcal{P}$ eller blive påvirket af $\mathcal{P}$, da dette ville kræve udveksling af signaler med overlyshastighed. Som vi har set, findes der for enhver begivenhed i dette område et inertialsystem således at begivenheden heri er samtidig med $\mathcal{P}$. Vi kan derfor kalde området for $\mathcal{P}$'s *kausale nutid*.

5.4 Tre-vektorer

Vi vil i dette afsnit genopfriske nogle af de fremtrædende træk ved den sædvanlige vektorregning i det 3-dimensionale rum.



Figur 5.3: Lyskeglen omkring enhver begivenhed $\mathcal{P}$ opdeler rumtiden i tre distinkte områder: (i) Begivenheder i den kausale fortid kan påvirke $\mathcal{P}$; (ii) Begivenheder i den kausale fremtid kan påvirkes af $\mathcal{P}$; (iii) Begivenheder i området udenfor lyskeglen kan ikke have nogen kausal sammenhæng med $\mathcal{P}$.

En 3-vektor $\mathbf{a}$ kan defineres som et talsæt (a_1, a_2, a_3) , der afhænger af valget af referencesystem $\{x, y, z\}$. De forskellige vektor-operationer kan dernæst defineres via disse komponenter; f.eks. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ og $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Vektorene og vektor-operationerne kan imidlertid også tolkes absolut, altså uden reference til noget koordinatsystem. Vektoren $\mathbf{a}$ har således en vis længde og retning, vektorsummen $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ kan bestemmes via parallelogram-reglen, etc. Kun operationer, som har en sådan absolut betydning, er tilladte i vektor-regningen. For at kontrollere en vektor-ligning, så som $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, vil en iagttager normalt være nødsaget til at definere et referencesystem og dernæst kontrollere de tre komponent-ligninger $a_i = b_i + c_i$ ($i = 1, 2, 3$) hver for sig. Forskellige iagttagere vil benytte forskellige referencesystemer, og de tilsvarende komponentligninger vil derfor være forskellige. Men enten er alle lignings-sæt sande, eller også er de alle falske. Et sæt af komponentligninger, som er sand i ét koordinatsystem, er altså sand i alle systemer: dette er den mest basale egenskab ved vektor-regningen. Vi siger, at vektor-ligninger er *form-invariante* over for valget af referencesystem.

Prototypen på en 3-vektor er forskydnings-vektoren $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, som forbinder to punkter i rummet. Under en translation forbliver dens komponenter uforandrede, og under en rotation omkring begyndelsespunktet ændres komponenterne ifølge en lineær, homogen transformation af formen

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \alpha_{11} \Delta x + \alpha_{12} \Delta y + \alpha_{13} \Delta z \\ \Delta y' &= \alpha_{21} \Delta x + \alpha_{22} \Delta y + \alpha_{23} \Delta z \\ \Delta z' &= \alpha_{31} \Delta x + \alpha_{32} \Delta y + \alpha_{33} \Delta z,\end{aligned}\tag{5.6}$$

hvor α 'erne er funktioner af vinklerne, der bestemmer rotationen. Vi kan nu definere en 3-

vektor ved følgende sætning: *Enhver størrelse med tre komponenter (a_1, a_2, a_3) , som transformerer på samme måde som forskydningsvektoren $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ mellem to punkter i rummet, siges at udgøre en 3-vektor.*

Såfremt $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ begge transformerer som $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, vil summen $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ som følge af lineariteten af (5.6) gøre det samme. Summen af to vektorer er derfor en vektor. Tilsvarende følger det umiddelbart af (5.6), at hvis k er en *skalar invariant* (ofte blot kaldet en "skalar" eller en "invariant") – altså et tal, som er uafhængig af koordinatsystemet – så er også $k\mathbf{a} \equiv (ka_1, ka_2, ka_3)$ en vektor.

Såfremt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ er et punkt på en kurve i rummet, og hver af koordinaterne udtrykkes som funktion af kurvelængden l , så er "enheds-tangenten"

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \left(\frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl}, \frac{dz}{dl} \right) \quad (5.7)$$

en vektor. For hver af komponenterne har vi nemlig

$$\frac{dr_i}{dl} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta r_i}{\Delta l},$$

hvor Δr_i er komponenterne af en vektor og Δl er en skalar invariant. Kvotienten mellem disse to giver dermed ifølge ovennævnte argumentation komponenterne af en ny vektor, og grænseovergangen ændrer intet ved dette forhold. Betragter vi nu en partikelbevægelse, hvor koordinaterne er funktioner af tiden t , ser vi ved lignende argumenter, at hastigheden

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (5.8)$$

er en vektor. Generelt indser vi, at enhver differentiation af en vektor med hensyn til en skalar invariant giver en ny vektor. Således er også accelerationen $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt = (du_x/dt, du_y/dt, du_z/dt)$ en vektor. Multiplicerer vi dernæst henholdsvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{a}$ med massen m , som jo er en skalar, får vi to nye vektorer, nemlig impulsen $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ og kraften $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$.

Til enhver vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ hører en vigtig skalar, nemlig dens længde, som vi betegner $|\mathbf{a}|$ eller simpelthen a :

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad a \geq 0. \quad (5.9)$$

At dette er en invariant følger umiddelbart af, at $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ per definition er invariant i det Euklidiske rum, og at (a_1, a_2, a_3) transformerer som $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er to vektorer, så er også $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ en vektor, og dens længde må derfor være invariant. Vi finder

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), \end{aligned}$$

og idet a^2 og b^2 er invariante, følger også invariansen af skalarproduktet

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (5.10)$$

5.5 Fire-vektorer

På samme måde, som 3-vektorer er defineret i det sædvanlige rum, definerer vi 4-vektorer i den 4-dimensionale rumtid. Vi vil i dette afsnit udvikle regnereglerne for 4-vektorene i tæt analogi med 3-vektorene.

Prototypen på en 4-vektor $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ er forskydningsvektoren $\Delta\mathbf{X} = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, som forbinder to begivenheder i rumtiden. En 4-vektor defineres da ved, at den transformerer på samme måde som $\Delta\mathbf{X}$. Bemærk, at vi har valgt ct frem for t for nulte-komponenten, og at alle komponenter derved har enheden længde. Af åbenlyse årsager refererer man ofte til en 4-vektors nulte-komponent som den *tidslige* og de tre øvrige komponenter som de *rumlige*. 4-vektorer af samme type som $\Delta\mathbf{X}$, som altså er defineret ved differencen mellem to begivenheder, er iøvrigt kendt under betegnelsen *4-intervaller*.

Enhver 4-vektor kan altså repræsenteres ved et retningsbestemt linie-segment i rumtiden. De tilladte koordinatsystemer udgøres af samtlige inertialsystemer, og de relevante transformationer udgøres dermed af alle transformationer, der sammenknytter ét inertialsystem med et andet. Dette er de *generaliserede Lorentz-transformationer*, som er sammensat af (i) tidslige og rumlige translationer, (ii) rotationer omkring begyndelsespunktet og (iii) standard-Lorentz-transformationer, altså Lorentz-transformationer af typen (2.13), hvor de to systemer er i standardkonfigurationen. Disse transformationer giver anledning til en 4-dimensional analog til (5.6) for ethvert par af inertialsystemer, med 16 konstante α 'er i stedet for ni. Under både rumlige og tidslige translationer er komponenterne af $\Delta\mathbf{X}$ (og dermed af enhver 4-vektor) uforandrede. Under rumlige rotationer omkring begyndelsespunktet transformerer de tre rumlige komponenter af $\Delta\mathbf{X}$ (og dermed af enhver 4-vektor) som en 3-vektor, mens den tidslige komponent er uforandret. Under standard-Lorentz-transformationer transformerer komponenterne af enhver 4-vektor, $\mathbf{A}$, på samme måde som prototypen $(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, og vi finder dermed ved anvendelse af (2.16)

$$\boxed{\begin{aligned} A'_0 &= \gamma(A_0 - \beta A_1), \\ A'_1 &= \gamma(A_1 - \beta A_0), \\ A'_2 &= A_2, \\ A'_3 &= A_3, \end{aligned}} \quad (5.11)$$

hvor $\beta = v/c$. Idet vi som tidligere begrænser os til udelukkende at betragte homogene transformationer, altså transformationer, der lader begivenheden $(0, 0, 0, 0)$ uforandret, udgør også $\mathbf{X} = (ct, x, y, z)$ en 4-vektor, som vi kan kalde begivenhedens stedvektor. Ofte ser man $\mathbf{X}$ anført som prototypen på en 4-vektor, hvilket strengt taget kun er korrekt, hvis man husker at anføre, at man kun betragter homogene transformationer.

Idet transformationsligningerne (5.11) for 4-vektorer er af samme type som transformationsligningerne (5.6) for 3-vektorer, og altså er lineære og homogene, kan vi benytte præcis de samme argumenter som for 3-vektorer til at vise, at

- i) summen af to 4-vektorer er en 4-vektor;
- ii) produktet af en invariant skalar og en 4-vektor er en 4-vektor; og
- iii) differentialkvotienten mellem en 4-vektor og en invariant skalar er en 4-vektor.

Lad os her benytte lejligheden til at bemærke, at skalare størrelser, der er invariante overfor transformationer i 3-rummet, i almindelighed *ikke* er invariante over for Lorentz-transformationen. I særdeleshed er tiden, t , ikke en invariant, og vi opnår derfor ikke en 4-vektor ved at differentiere en 4-vektor med hensyn til t .

Kvadratet på en 4-vektor $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ er defineret ved

$$\mathbf{A}^2 = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2, \quad (5.12)$$

og dens invarians følger direkte af invariansen af kvadratet på prototypen $\Delta\mathbf{X} = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Den sidste betegnes også $\Delta\mathbf{s}$, hvilket retfærdiggør notationen (5.5), som vi har benyttet flere gange. *Størrelsen* eller *længden* af en 4-vektor $\mathbf{A}$ skrives $|\mathbf{A}|$ eller A og er defineret ved

$$A = \sqrt{|\mathbf{A}^2|} \geq 0. \quad (5.13)$$

For to givne 4-vektorer $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ og $\mathbf{B} = (B_0, B_1, B_2, B_3)$ er *skalarproduktet* defineret ved

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3. \quad (5.14)$$

Præcis som for (5.10) kan vi benytte invariansen af $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$ og $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$ til at udlede at også skalarproduktet er invariant.

Øvelse 5.1 *Eftervis ved direkte anvendelse af (5.11) at skalarproduktet, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, af to givne 4-vektorer er invariant over for en Lorentz-transformation.*

5.6 Fire-vektores geometri

Vi har i Afsnit 5.3 set, hvorledes lyskeglen i forhold til sit begyndelsespunkt inddeler alle rumtidens begivenheder i tre klasser afhængig af fortegnet på Δs^2 . Den samme inddeling overføres umiddelbart til forskydningsvektoren $\Delta\mathbf{s} \equiv \Delta\mathbf{X}$. Og idet der til enhver 4-vektor findes en forskydningsvektor med hvilken den er ensrettet, kan vi inddele alle 4-vektorer på tilsvarende vis. Vi kalder en 4-vektor $\mathbf{A}$ *tidsagtig* hvis $\mathbf{A}^2 > 0$, *lysagtig* hvis $\mathbf{A}^2 = 0$ og *rumagtig* hvis $\mathbf{A}^2 < 0$. I det første tilfælde peger $\mathbf{A}$ ind i lyskeglen, i det andet tilfælde peger den langs lyskeglen og i det tredje tilfælde peger den uden for lyskeglen. En 4-vektor med $\mathbf{A}^2 = 0$ kaldes også en nul-4-vektor. Da en 4-vektors kvadrat er invariant, kan man ikke ved nogen Lorentz-transformation forvandle en rumagtig 4-vektor til en tidsagtig, eller omvendt. Klassifikationen i de tre nævnte kategorier er altså den samme fra ethvert inertialsystem; den er med andre ord absolut.

Tidsagtige og lysagtige 4-vektorer har en del egenskaber til fælles, og betegnes under et *kausale* vektorer. I særdeleshed er fortegnet på deres nulte-komponent invariant, idet enhver iagttager vil opleve den samme tidslige rækkefølge langs den tilsvarende forskydningsvektor. Man kan derfor foretage en invariant opdeling af kausale vektorer, $\mathbf{A}$, i dem, der peger mod fremtiden ($A_0 > 0$), og dem, der peger mod fortiden ($A_0 < 0$).

For 3-vektorer ved vi, at enhver vektor $\mathbf{a}$ kan reduceres til formen $(a, 0, 0)$ ved at indlægge et koordinatsystem, hvis x -akse peger i vektorens retning. På tilsvarende vis kan vi for en 4-vektor $\mathbf{A}$ med komponenter (A_0, A_1, A_2, A_3) i systemet S eliminere A_2 og A_3 ved at rotere inertialsystemets rumlige akser så x -aksen peger i retningen (A_1, A_2, A_3) . Den nye

vektor vil da have formen $(A_0, B, 0, 0)$, hvor $B = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}$. Vi har nu følgende tre tilfælde, som afhænger af den relative størrelse af $|A_0|$ og B

- i) I det tilfælde, hvor $B = |A_0|$, er $\mathbf{A}$ en nul-4-vektor, og formen $(A_0, |A_0|, 0, 0)$ kan da ikke reduceres yderligere.
- ii) I det tilfælde, hvor $B < |A_0|$, er $\mathbf{A}$ tidsagtig. Der gives da et inertialsystem, hvor den kan skrives på formen $(\pm A, 0, 0, 0)$, hvor A er størrelsen af $\mathbf{A}$, og hvor fortegnet afhænger af, om $\mathbf{A}$ peger mod fremtiden eller mod fortiden.
- iii) I det tilfælde, hvor $B > |A_0|$, er $\mathbf{A}$ rumagtig. Der gives et da inertialsystem, hvor den kan skrives på formen $(0, A, 0, 0)$, hvor A igen er størrelsen af $\mathbf{A}$.

5.7 Egentiden

Lad os betragte en partikel, som i et inertialsystem S bevæger sig på en sådan måde, at det i det differentielle tidsrum dt tilbagelægger strækningen (dx, dy, dz) . Bevægelsen er således bestemt ved det differentielle 4-interval

$$ds = (cdt, dx, dy, dz). \quad (5.15)$$

Kvadratet på ds er den invariante skalar

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (5.16)$$

Idet også c^2 er en invariant, kan vi danne en tredje invariant ved at tage forholdet mellem de to

$$d\tau^2 \equiv \frac{ds^2}{c^2} = dt^2 \left\{ 1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} \right\}. \quad (5.17)$$

I partiklens øjeblikkelige hvilesystem S' (altså systemet, som i tidsrummet dt følger med partiklen, således at $dx' = dy' = dz' = 0$) reducerer (5.17) til $d\tau^2 = dt'^2$. Størrelsen $d\tau$ er derfor identisk med den i Afsnit 3.2 definerede *egentid*.

Af (5.17) får vi nu

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2},$$

hvor u er partiklens øjeblikkelige hastighed i S . Heraf følger sammenhængen

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(u). \quad (5.18)$$

Vi har hermed direkte vist sammenhængen, som vi benyttede allerede i (3.4).

5.8 Fire-hastigheden

Vi ønsker nu at konstruere en 4-vektor, der på tilsvarende måde, som vi kender det fra det sædvanlige rum, angiver en hastighed. Lad os starte ud med at bemærke, at vi ikke kan danne en 4-vektor blot ved at tilføje en nulte-komponent til den sædvanlige rumlige hastighed

$$\mathbf{u} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (5.19)$$

Her er (x, y, z) de tre rumlige komponenter af en 4-vektor. Men da t ikke er nogen 4-skalar, fremkommer der ikke komponenter af nogen 4-vektor, når vi differentierer med hensyn til t . Dette kan man iøvrigt også se direkte af transformationsligningerne (3.7) for hastigheds-komponenterne, idet disse ligninger ikke er identiske med Lorentz-transformationen (5.11).

Imidlertid kan vi danne en 4-vektor, hvis rumlige komponenter minder om den sædvanlige hastighed, ved i (5.19) at erstatte differentiationen med hensyn til t med differentiation med hensyn til den invariante egentid τ . Vi definerer derfor partiklens *4-hastighed* $\mathbf{U}$ som den afledede af 4-sted-vektoren $\mathbf{X} = (ct, x, y, z)$ med hensyn til egentiden τ

$$\mathbf{U} \equiv \frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right). \quad (5.20)$$

Ved at benytte kædereglene for differentiation tager dette udtryk formen

$$\mathbf{U} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right),$$

hvoraf vi ved at indføre (5.18) finder

$$\mathbf{U} = (\gamma c, \gamma u_x, \gamma u_y, \gamma u_z) \quad (5.21)$$

hvor $\gamma \equiv \gamma(u)$. Altså kan 4-hastigheden skrives på formen

$$\boxed{\mathbf{U} = \gamma(u) (c, \mathbf{u}).} \quad (5.22)$$

Her, som i mange andre tilfælde, finder vi, at de rumlige komponenter af en 4-vektor er komponenterne af en velkendt 3-vektor eller multipla af disse. Vi anvender da ofte notationen eksemplificeret ved (5.22). Af (5.22) ses det direkte, at 4-hastighedens rumlige komponenter for $u \rightarrow 0$ går over i den sædvanlige hastighed $\mathbf{u}$. Lad os yderligere bemærke, at $\mathbf{U}$ er tidsagtig og peger mod fremtiden.

Kvadratet på 4-hastigheden $U^2 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$ er som alle andre skalarprodukter en invariant. Hvis vi derfor bestemmer kvadratet i ét inertialsystem, vil resultatet have gyldighed i ethvert andet. Det står os dermed frit at udregne kvadratet i det system, hvori det falder os lettest. Af udtrykket (5.22) for 4-hastigheden finder vi

$$U^2 = \gamma^2(u)(c^2 - u^2), \quad (5.23)$$

som altså er gyldigt i ethvert system. Vælger vi nu partiklens hvilesystem, hvor $u = 0$, følger umiddelbart resultatet

$$U^2 = c^2. \quad (5.24)$$

Vi ser, at kvadratet ikke refererer til nogen for partiklen karakteristisk størrelse: Alle partikler har samme 4-hastighedskvadrat, uanset hvordan de bevæger sig i rum og tid.

Det er vigtigt at bemærke sig argumentationen, som vi benyttede for at komme frem til (5.24). Her opnåede vi et numerisk resultat på elegant vis ved at betragte problemet fra et hensigtsmæssig inertialsystem. Lignende metoder benyttes igen og igen ved arbejdet med 4-vektorer.

5.8.1 Eksempel: Hastighedstransformationerne fra 4-hastigheden

I Kapitel 4 udledte vi formler for, hvordan hastigheder transformerer mellem to inertialsystemer i indbyrdes bevægelse. Vi vil nu vise, hvordan disse formler kan udledes direkte fra transformationsegenskaberne for 4-hastigheden.

Hertil betragter vi en partikel, som bevæger sig med hastigheden $\mathbf{u}$ i systemet S . Vi søger nu partiklens hastighed $\mathbf{u}'$ i systemet S' , som bevæger sig på sædvanlig måde med hastigheden v i forhold til S . Partiklens 4-hastighed i de to systemer betegnes henholdsvis $\mathbf{U}$ og $\mathbf{U}'$. Ifølge udtrykket for 4-hastigheden (5.22) har vi

$$\mathbf{U}' = \gamma(u') (c, u'_x, u'_y, u'_z) \equiv (U'_0, U'_1, U'_2, U'_3),$$

og dermed

$$u'_x = c \frac{U'_1}{U'_0}, \quad u'_y = c \frac{U'_2}{U'_0}, \quad u'_z = c \frac{U'_3}{U'_0}.$$

Som enhver anden 4-vektor, transformerer 4-hastigheden ifølge Lorentz-transformationen, således at

$$U'_0 = \gamma(U_0 - \beta U_1), \quad U'_1 = \gamma(U_1 - \beta U_0), \quad U'_2 = U_2, \quad U'_3 = U_3,$$

hvor vi har anvendt den omvendte transformation af (5.11). Ved at indsætte disse i udtrykkene ovenfor følger nu, at

$$\begin{aligned} u'_x &= c \frac{U_1 - \beta U_0}{U_0 - \beta U_1} = c \frac{u_x - \beta c}{c - \beta u_x} = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \\ u'_y &= c \frac{U_2}{\gamma(U_0 - \beta U_1)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_x/c^2)}, \\ u'_z &= c \frac{U_3}{\gamma(U_0 - \beta U_1)} = \frac{u_z}{\gamma(1 - vu_x/c^2)}. \end{aligned}$$

Vi ser, at de hermed udledte transformationsrelationer er identiske med relationerne (3.7).

5.9 4-accelerationen

En partikels 4-acceleration $\mathbf{A}$ defineres ved

$$\mathbf{A} \equiv \frac{d^2 \mathbf{X}}{d\tau^2} = \frac{d\mathbf{U}}{d\tau}, \quad (5.25)$$

hvor vi igen har differentieret med hensyn til den invariante egentid τ . Ved at benytte kædereglen for differentiation og resultatet (5.18) finder vi

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma c, \gamma \mathbf{u}),$$

og hermed sammenhængen med 3-accelerationen $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$

$$\mathbf{A} = \gamma \left(c \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{u} + \gamma \mathbf{a} \right). \quad (5.26)$$

4-accelerations rumlige del er altså i almindelighed ikke ensrettet med $\mathbf{a}$.

I partiklens øjeblikkelige hvilesystem, hvor $u = 0$, og dermed $d\gamma/dt = 0$, reducerer 4-accelerationen til

$$\mathbf{A} = (0, \mathbf{g}). \quad (5.27)$$

Vi har her indført betegnelsen $\mathbf{g}$ for den såkaldte *egen-acceleration*, altså accelerationen i det øjeblikkelige hvilesystem. En partikels 4-acceleration er altså en nul-vektor ($A^2 = 0$), hvis og kun hvis dens egen-acceleration er nul. I modsat fald er $\mathbf{A}$ rumagtig.

Idet kvadratet på 4-hastigheden er konstant, $U^2 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = c^2$, finder vi ved at differentiere med hensyn til egentiden

$$\frac{dU^2}{d\tau} = 2\mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = 2\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (5.28)$$

Der gælder altså i almindelighed sammenhængen

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (5.29)$$

En partikels 4-hastighed og 4-acceleration er således ortogonale, uafhængigt af hvordan partiklen bevæger sig i rumtiden. Dette henleder vores opmærksomhed på det faktum, at 4-hastigheden og 4-accelerationen på visse områder er meget forskellige fra deres 3-dimensionale analoger.

5.9.1 Transformation af acceleration

Ligesom vi i Afsnit 5.8.1 udledte transformationsreglerne for hastigheden fra 4-hastigheden, kan vi udlede transformationsregler for accelerationen fra 4-accelerationen. Vi vil her indskrænke os til at bestemme transformationen mellem partiklens øjeblikkelige hvilesystem og laboratoriesystemet.

I partiklens øjeblikkelige hvilesystem S' er 4-accelerationen ifølge (5.27) givet ved

$$\mathbf{A}' = (0, \mathbf{g}) = (0, g_x, g_y, g_z), \quad (5.30)$$

hvor $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$ er partiklens egen-acceleration. Idet partiklen jo er i hvile i S' , har den i S hastigheden $\mathbf{u} = (v, 0, 0)$, og i dette system gælder da sammenhængen

$$a_x = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{A_1}{\gamma} - v \frac{d\gamma}{dt} \right] = \frac{1}{\gamma^2} [A_1 - \beta A_0], \quad (5.31)$$

som fås ved benyttelse af første-komponenten af udtrykket (5.26) for 4-accelerationen. Her har vi undervejs benyttet, at $d\gamma/dt = A_0/\gamma c$, som følger umiddelbart af nulte-komponenten af samme udtryk. Vi reducerer nu ovenstående udtryk ved at benytte Lorentz-transformationen ifølge hvilken $A'_1 = \gamma(A_1 - \beta A_0)$ og finder endelig ved sammenligning med (5.30) resultatet

$$a_x = \frac{g_x}{\gamma^3}. \quad (5.32)$$

Ved i (5.26) at indsætte $u_y = u_z = 0$ finder vi tilsvarende

$$a_y = \frac{g_y}{\gamma^2}, \quad \text{og} \quad a_z = \frac{g_z}{\gamma^2}. \quad (5.33)$$

Vi her hermed bestemt accelerationens transformationsegenskaber mellem det øjeblikkelige hvilesystem og laboratoriesystemet. Vi bemærker, at accelerationen i modsætning til i det klassiske tilfælde ikke er invariant over for en transformation mellem to inertialsystemer. Vi bemærker ligeledes, at partiklens acceleration i laboratoriesystemet går mod nul, når dens hastighed nærmer sig c . Dette sikrer selvfølgelig at partiklen ikke kan accelereres forbi lyshastigheden.

Opgaver 5

5.1 Tre begivenheder $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ og $\mathcal{P}_3$ har i et inertialsystem rumtids-koordinater (ct, x) med værdierne $(2, 1)$, $(7, 4)$ og $(5, 6)$. Fastlæg ved at betragte de relevante rumtidsintervaller hvilke par af begivenheder, der kan have årsagssammenhæng.

5.2 To begivenheder $\mathcal{P}_1$ og $\mathcal{P}_2$ har i et inertialsystem S rumtids-koordinater (ct, x) med værdierne $(0, 0)$ og $(1, 2)$. Find hastighederne af systemer, som bevæger sig på sædvanlig vis i forhold til S, således at: a) de to begivenheder er samtidige; og b) $\mathcal{P}_2$ forekommer tiden $1/c$ før $\mathcal{P}_1$. [*Bemærk:* Idet vi her regner rumlige koordinater dimensionsløse, får tiden dimension af hastighed⁻¹. Hvis dette volder vanskeligheder, indsæt da selv længdeenheder (f.eks. meter) for koordinaterne.]

5.3 Verificer invariansrelationen

$$U^2 = c^2,$$

hvor $\mathbf{U}$ er en partikels 4-hastighed, ved direkte substitution for γ -faktoren i (5.23).

5.4 En 4-vektor har komponenterne (V_0, V_1, V_2, V_3) i et inertialsystem S. Find dens komponenter (i) i et system der er sammenfaldende med S bortset fra, at retningen af x - og y -akserne er vendt omkring; (ii) i et system som er sammenfaldende med S undtagen for en 45° drejning af xy -planet omkring begyndelsespunktet; (iii) i et system der har de rumlige akser parallelle med dem i S, men som bevæger sig med hastigheden v i y -retningen.

Kapitel 6

Relativistisk mekanik

6.1 Forudsætninger

Alt hvad vi indtil nu har lært, har været baseret på et detaljeret studie af relativitetsprincippet to postulater uden tilføjelse af yderligere hypoteser. Vi har her set, hvordan den Newtonske opfattelse af rum og tid kunne erstattes af en noget mere kompliceret men ikke desto mindre elegant og harmonisk rumtids-struktur, som imødekommer relativitetsprincippet. Idet, som tidligere bemærket, den klassiske mekanik udspiller sig på en baggrund af rum og tid, kan man imidlertid ikke ændre modellen for denne baggrund uden at måtte tilpasse den øvrige fysik i overensstemmelse hermed. Og på samme måde som det er tilfældet for rumtiden, må vi kræve, at den nye fysik tilfredsstiller relativitetsprincippet.

Hovedparten af fysiske lovmæssigheder refererer ikke udelukkende til længde og tid, men også til ikke-kinematiske størrelser så som kræfter, masser, etc. Yderligere aksiomer må derfor specificere hvordan disse størrelser transformerer fra ét inertialsystem til et andet. For at tilfredsstille relativitetsprincippet må den matematiske udformning af samtlige fysiske love være *forminvariant*: Lovene skal have samme form i alle inertialsystemer.

Sammenfattende drejer den specielle relativitetsteori sig om Lorentz-invariant fysik. Newtons mekanik er Galilei-invariant, men ikke Lorentz-invariant, og den er derfor ikke i overensstemmelse med det specielle relativitetsprincip. Vort program er altså at revidere den klassiske mekanik således, at den går over i en ny form for beskrivelse, som er invariant over for Lorentz-transformationen. På den anden side ved vi fra erfaringen, at den klassiske mekanik ikke kan være fuldstændig forkert. Faktisk er næsten ethvert makroskopisk fænomen på udmærket vis beskrevet ved den klassiske mekanik. Dette inkluderer så følsomme operationer som at sende rumsonder til Månen og til fjerne planeter. Med opfindelsen af partikelacceleratorer har man imidlertid afsløret enorme uoverensstemmelser med den klassiske mekanik, mens den nye mekanik giver en perfekt beskrivelse. For et stort antal anvendelsesområder, som kun implicerer hastigheder, der er små i forhold til lyshastigheden, udgør den nye og den klassiske mekanik parallelle beskrivelser. Man vælger da af bekvemmelighedshensyn den klassiske beskrivelse. For store hastigheder har man imidlertid intet valg: kun den nye mekanik giver en korrekt beskrivelse. Man kan i store træk anvende afvigelsen af γ -faktoren fra værdien 1 som et mål for graden af fejl, man gør ved at anvende den klassiske beskrivelse. For klassiske anvendelser er dette tal forsvindende,

men i laboratorieeksperimenter med elementar-partikler er γ -faktorer af størrelsesordenen 10^4 ikke usædvanlige, og i kosmisk stråling har man observeret protoner med γ -faktorer på helt op til 10^{11} . Her vil altså den klassiske mekanik være fuldstændig forkert.

Sammenfattende må vi altså kræve for den nye mekaniks love, (i) at de har samme form i ethvert inertialsystem, og (ii) at de for ikke-relativistiske hastigheder er konforme med de Newtonske love.

6.2 Den nye mekaniks aksiomer

Vi søger nu en Lorentz-invariant beskrivelse af mekanikken, som i det klassiske tilfælde beskrives ved Newtons love. Idet vi indskrænker os til at betragte punktformede legemer, beskæftiger mekanikken sig primært med partikelkollisioner, partikelsystemer og partikler i eksterne felter. Lad os dog her understrege, at tyngdekraften antages fraværende i den specielle relativitetsteori, idet denne finder sin beskrivelse i den generelle relativitetsteori gennem en krumning af rumtiden.

Før vi påbegynder etableringen af den relativistiske mekanik, bør det understreges, at denne ikke lader sig *udlede* ved logiske argumenter, men at vi må indføre aksiomer og derefter kontrollere de afledede fysiske lovmæssigheder empirisk.

Kraften, som er et centralt begreb i den klassiske mekanik, spiller en mindre fremtrædende rolle i relativitetsteorien, hvor den primært manifesterer sig gennem den elektromagnetiske Lorentz-kraft. Tyngdekraften er som allerede nævnt fraværende. Det er derfor bekvemt at benytte impulsbevarelsen (som jo i den klassiske mekanik er et afledet resultat) som udgangspunkt for den relativistiske mekanik.

6.2.1 Fire-impulsen og den relativistiske impuls

Idet vi søger en Lorentz-invariant mekanik, er det hensigtsmæssigt at basere formuleringen på 4-vektorer. Lorentz-invariansen er da automatisk sikret. Kravet om impulsbevarelse må da involvere partiklers *4-impuls*, og vi søger nu en hensigtsmæssig definition af denne.

Lad os starte med at antage, at den til enhver partikel knyttede inertielle masse, m , som vi kender fra den klassiske mekanik, er en Lorentz-invariant størrelse. Vi kan da definere en partikels 4-impuls i analogi med, hvordan 3-impulsen er defineret, nemlig

$$\boxed{\mathbf{P} = m\mathbf{U}}, \quad (6.1)$$

hvor $\mathbf{U}$ er 4-hastigheden. Ligesom $\mathbf{U}$ er $\mathbf{P}$ hermed tidsagtig og peger mod fremtiden. Idet $U^2 = c^2$ ifølge (5.24) får vi umiddelbart for enhver 4-impuls

$$P^2 = m^2 c^2. \quad (6.2)$$

Ved anvendelse af komponent-formen (5.22) for $\mathbf{U}$ finder vi

$$\mathbf{P} = m\mathbf{U} = m\gamma(u)(c, \mathbf{u}) \equiv (\gamma(u)mc, \mathbf{p}), \quad (6.3)$$

hvor vi ved den sidste ligning har indført notationen

$$\boxed{\mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u}}. \quad (6.4)$$

Formalismen leder altså naturligt til størrelsen $\mathbf{p}$, som vi kalder den *relativistiske impuls*. Bemærk, at den relativistiske impuls for små hastigheder, $u/c \ll 1$, går over i den klassiske impuls $m\mathbf{u}$. Bemærk, yderligere at grundet γ -faktoren kan den relativistiske impuls vokse uden begrænsning, selvom hastigheden u er begrænset af c .

6.2.2 Fire-impuls-bevarelse

Vi tager nu som grundlæggende aksiom for den relativistiske mekanik, at *4-impulsen er bevaret i ethvert partikelsammenstød*. Summen af 4-impulsen før et sammenstød er altså den samme som summen af 4-impulsen efter et sammenstød, altså

$$\boxed{\sum_{i=1, N^{\text{før}}} \mathbf{P}_i = \sum_{j=1, N^{\text{efter}}} \mathbf{P}_j}, \quad (6.5)$$

hvor i løber over alle $N^{\text{før}}$ partikler før sammenstødet, og j løber over alle N^{efter} partikler efter sammenstødet. Bemærk, at N^{efter} kan være forskellig fra $N^{\text{før}}$, ligesom sammenstødet kan være elastisk såvel som uelastisk. Da (6.5) er en relation mellem 4-vektorer er vores grundlæggende aksiom automatisk Lorentz-invariant; den vil gælde i ethvert inertialsystem. Den første af vore forudsætninger er dermed opfyldt.

Ved anvendelse af komponentformen (6.3) for $\mathbf{P}$ kan den grundlæggende bevarelsessætning (6.5) udtrykkes som to separate sætninger, nemlig bevarelsen af den relativistisk impuls,

$$\sum_{i=1, N^{\text{før}}} \mathbf{p}_i = \sum_{j=1, N^{\text{efter}}} \mathbf{p}_j, \quad (6.6)$$

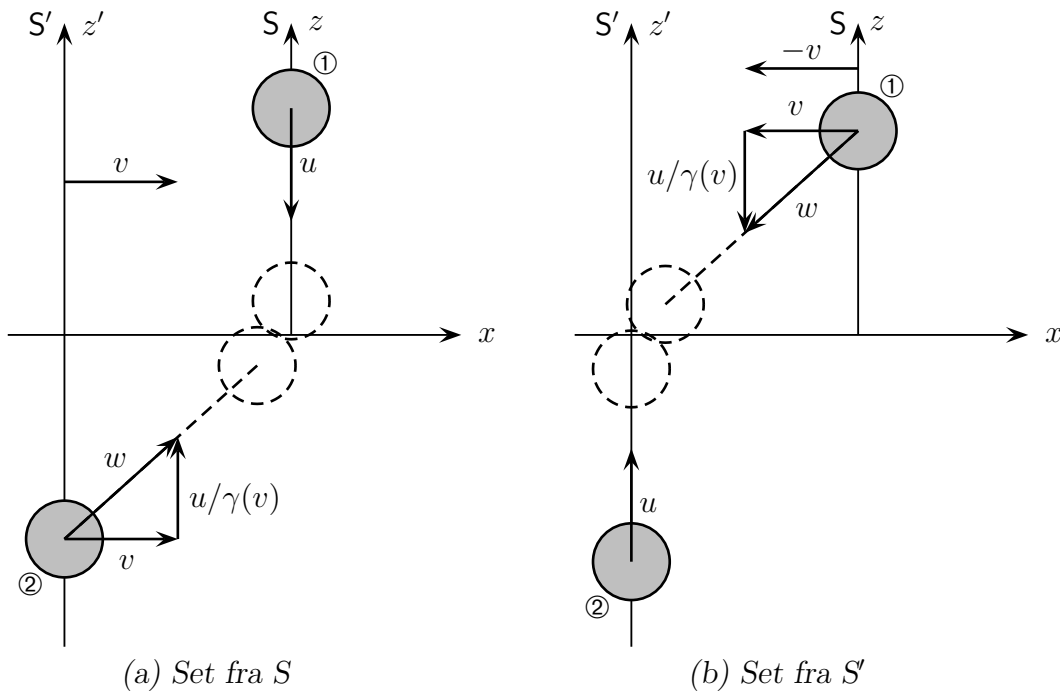
og bevarelsen af størrelsen $\gamma(u)m$,

$$\sum_{i=1, N^{\text{før}}} \gamma(u_i)m_i = \sum_{j=1, N^{\text{efter}}} \gamma(u_j)m_j. \quad (6.7)$$

I den ikke-relativistiske grænse ($u/c \ll 1$) hvor $\gamma \simeq 1$, tilsvarende (6.6) og (6.7) åbenbart den klassiske mekaniks sætninger om henholdsvis impuls- og masse-bevarelse. Hermed tilfredsstiller vores relativistiske lov forudsætningerne, nemlig at den er Lorentz-invariant og konform med den Newtonske mekanik. Også i den formelle grænse $c \rightarrow \infty$ går vore nye love over i de klassiske bevarelsessætninger.

6.2.3 Eksempel: Impulsbevarelse i stød mellem to partikler

Lad os nu ved et konkret eksempel se, hvorledes definitionen (6.4) af den relativistiske impuls leder til impulsbevarelse i partikelsammenstød. Til dette brug betragter vi et sammenstød mellem to identiske partikler, som bevæger sig med samme hastighed u men i modsat retning langs de respektive z -akser i de to sædvanlige inertialsystemer S og S' . Hver af dem vil da ifølge (3.7) have en hastighed set fra det andet system, hvis z -komponent har størrelsen $q = u/\gamma(v)$. Lad os antage, at partiklerne kolliderer og smelter sammen til én partikel i det øjeblik S og S' er sammenfaldende (se Figur 6.1). Af symmetriårsager kan den nye, sammensmeltede partikel ikke have nogen hastighed i z -retningen i nogen af



Figur 6.1: To partikler bevæger sig med samme hastighed u men i modsat retning langs de respektive z -akser i de to inertialsystemer S og S' og smelter sammen ved sammenstødet. Af symmetriårsager må systemets impuls langs z -aksen være nul efter stødet. Ifølge antagelsen om impulsbevarelse må det samme da være tilfældet før stødet. Det følger heraf, at den relativistiske impuls må være givet ved udtrykket (6.4).

systemerne. Impulsbevarelse i S betyder da, at de to partikler før stødet må have lige store z -impulser. Vi benytter nu udtrykket (6.4) for den relativistiske impuls og finder

$$\gamma(u)mu = \frac{\gamma(w)mu}{\gamma(v)}.$$

hvor venstresiden er (størrelsen af) z -impulsen af partiklen, der bevæger sig langs z -aksen, og højresiden er (størrelsen af) z -impulsen af partiklen, der bevæger sig langs z' -aksen og har farten w i forhold til S . Ved at forkorte igennem med mu finder vi da relationen

$$\gamma(u) = \frac{\gamma(w)}{\gamma(v)}.$$

Vi kunne nu vise, at denne relation er opfyldt ved at anvende transformationsegenskaberne (3.11) for γ -funktionen. Imidlertid vælger vi at benytte os af et trick. Hertil lader vi $u \rightarrow 0$ (vi betragter altså en sekvens af eksperimenter med stadig lavere værdi af u), hvorved følgelig $w \rightarrow v$. Ligningen ovenfor er dermed opfyldt, hvorved vi har verificeret, at impulsen er bevaret i det betragtede stød. Vi konkluderer således, at vi med (6.4) har et tilfredsstillende udtryk for den relativistiske impuls.

Indskud 6.1 Udtrykket (6.4) for den relativistiske impuls skrives til tider på formen

$$\mathbf{p} = m(u)\mathbf{u},$$

hvor man altså har opgivet forestillingen om, at en partikels masse er en Lorentz-invariant, og i stedet opfatter massen som en funktion af hastigheden

$$m(u) \equiv \gamma(u)m.$$

Her angiver m partiklens masse i klassisk forstand, altså den inertielle masse for små hastigheder, $u/c \ll 1$. Denne kaldes nu partiklens hvilemasse for at skelne den fra den relativistiske masse $m(u)$.

Lad os understrege, at vi her **ikke** benytter os af denne sprogbug. Vi fortsætter således med at opfatte massen som en invariant og lader den relativistiske impuls være defineret ved (6.4).

6.3 Relativistisk energi

Lad os nu kigge nærmere på ligning (6.7), som i den ikke-relativistiske grænse tilsvarende den klassiske mekaniks massebevarelse. I det almene tilfælde, er det åbenbart ikke massen, der er bevaret, men en størrelse $\sum \gamma(u)m$, som afhænger af partiklernes hastighed. I den klassiske mekanik kender vi kun én sådan bevaret størrelse, nemlig den kinetiske energi af partikler i elastiske sammenstød. Her må bevarelsen imidlertid gælde i alle sammenstød, både elastiske og uelastiske, så $\sum \gamma(u)m$ kan ikke repræsentere den kinetiske energi. Imidlertid er jo den totale energi bevaret i ethvert sammenstød. Kunne det da være, at $\sum \gamma(u)m$ repræsenterede partikelsystemets *totale energi*, og at totalenergien af den enkelte partikel dermed repræsenteredes ved størrelsen $\gamma(u)m$. Svaret på dette spørgsmål viser sig at være "ja".

Til belysning af dette forhold foretager vi rækkeudviklingen

$$\gamma(u)m = m \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2}mu^2\right) + \dots \quad (6.8)$$

Her identificerer vi det andet led som det klassiske udtryk for den kinetiske energi divideret med kvadratet på lyshastigheden. På grund af den enorme størrelse af c^2 vil dette led for ikke-relativistiske hastigheder være forsvindende sammenlignet med massen. Det har derfor ikke kunnet observeres under klassiske forhold, og dette har ledt til den klassiske mekaniks princip om massebevarelse.

Vi kan nu indse, at på samme måde som den kinetiske energi bidrager til γm , må enhver anden energiform gøre det. En af de ting, der jo netop kendetegner energi, er, at den kan omdannes fra én form til en anden. Tænk vi os f.eks., at to ens kugler med modsat rettede hastigheder kolliderer og smelter sammen til et legeme i hvile, er $\sum \gamma m$ ifølge forudsætningen konstant under hele processen. Men ved sammenstødet omdannes kuglernes kinetiske energi jo til varmeenergi, og varmeenergien må derfor nu give et bidrag af samme størrelse til $\sum \gamma m$, som den kinetiske energi gav tidligere. Derefter kunne vi igen tænke os at omforme varmeenergien til en anden energiform etc. Uanset hvilken form

energien er på, vil energimængden være den samme, og da også $\sum \gamma m$ er bevaret, må konklusionen da blive, at *enhver* energiform bidrager på samme måde til γm .

Hvis vi således betragter et fysisk system i hvile, så vil i det mindste en del af dets masse måtte tilskrives de forskellige indre energiformer, som er tilstede i systemet. Fra det makroskopiske, via det atomare og helt ned til det subnukleare niveau ved vi, der er frihedsgrader med tilhørende energier. Logisk set kunne man tænke sig, at det kun var en del af det fysiske systems masse, der således kunne tilskrives indre energiformer. Einstein tog imidlertid det for hans tid modige skridt at ækvivalere hele massen med energi ifølge den berømte relation

$$E_0 \equiv mc^2. \quad (6.9)$$

Her kaldes energien E_0 for systemets *hvileenergi*, idet den jo netop angiver energien af et system i hvile. I dag ved vi fra f.eks. annihilationen af elektroner og positroner, at elementarpartiklers masse lader sig omdanne fuldstændig til strålingsenergi. Einsteins berømte ligning er derfor eksperimentelt meget velfunderet.

Vender vi nu tilbage til en partikel i fri bevægelse, vil dennes *totale energi* ifølge ovenstående argumentation være

$$E = \gamma mc^2. \quad (6.10)$$

Den *kinetiske energi* T defineres da som forskellen mellem partiklens totale energi og dens hvileenergi

$$T = E - E_0, \quad (6.11)$$

således at

$$T = (\gamma - 1)mc^2. \quad (6.12)$$

Ved rækkeudvikling af T genfinder vi selvfølgelig, som i (6.8), det klassiske udtryk $\frac{1}{2}mu^2$ som det ledende led. De øvrige led udgør den relativistiske "korrektion". Bemærk at i et *elastisk* stød, hvor enhver partikels masse er uændret, leder (6.7) til bevarelsen af den kinetiske energi.

Med udtrykket (6.10) for den totale energi tager 4-impulsen (6.3) den vigtige form

$$\mathbf{P} = (E/c, \mathbf{p}). \quad (6.13)$$

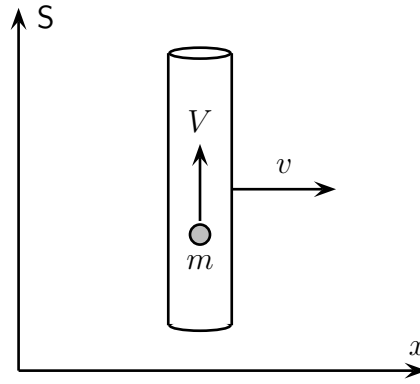
Lad os slutte dette afsnit af med at anføre den ofte benyttede sammenhæng mellem en partikels hastighed, impuls og energi

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{u} \quad (6.14)$$

som følger af direkte anvendelse af definitionerne (6.4) og (6.10).

6.3.1 Eksempel: Ækvivalensen mellem indre energi og masse

Til demonstration af ækvivalensen mellem et systems indre energi og dets masse betragter vi et rør, hvori en kugle kan bevæge sig uden gnidning. Udefra kan kuglen ikke ses, og dens bevægelse kan derfor regnes som en indre frihedsgrad.



Figur 6.2: Den kinetiske energi T af kuglen, der bevæger sig i røret, vil bidrage med størrelsen T/c^2 til systemets inertielle masse.

Vi lader i udgangspunktet røret med massen M , ligge i hvile vinkelret på x -aksen i et inertialsystem S . Kuglen med massen m bevæger sig med den konstante hastighed V . Idet alene kuglen bevæger sig, er systemets kinetiske energi da

$$T = \{\gamma(V) - 1\}mc^2,$$

Vi tænker os nu røret udsat for en forbigående kraftpåvirkning, hvorefter det bevæger sig med den konstante hastighed v i x -aksens retning, men stadig vinkelret på denne. Vi vil nu beregne systemets kinetiske energi, når denne tilstand er nået.

Da røret i S bevæger sig med hastigheden v , er dets kinetiske energi bestemt ved

$$T_1 = \{\gamma(v) - 1\}Mc^2.$$

For at kunne udtrykke kuglens kinetiske energi, må vi kende dens nye hastighed $\mathbf{u}$ i systemet S . Denne kan lettest findes, idet vi forestiller os et nyt inertialsystem S' , der følger røret og dermed bevæger sig med hastigheden v i forhold til S . I dette system må kuglens hastighed $\mathbf{w}$ have komponenterne $\mathbf{w} = (0, V, 0)$, idet en kraftpåvirkning som den antagne ikke kan ændre impulsen i y -aksens retning. Idet de to hastigheder $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ altså er ortogonale finder vi af transformationsformlen (3.11) for γ -faktoren, at $\gamma(u) = \gamma(v)\gamma(V)$. Kuglens kinetiske energi er dermed

$$T_2 = \{\gamma(v)\gamma(V) - 1\}mc^2.$$

Systemets samlede energiforøgelse som følge af kraftpåvirkningen bliver da

$$\Delta T = T_1 + T_2 - T,$$

der ved hjælp af de fundne udtryk giver

$$\Delta T = \{\gamma(v) - 1\}Mc^2 + \{\gamma(v)\gamma(V) - 1\}mc^2 - \{\gamma(V) - 1\}mc^2.$$

Dette udtryk kan omskrives til

$$\Delta T = \{\gamma(v) - 1\} [M + m + m\{\gamma(V) - 1\}] c^2.$$

Ved at betragte sidste faktor ser vi, at dette udtryk kan fortolkes som udtrykket for den kinetiske energi af et system, der bevæger sig med hastigheden v i S , således som røret og kuglen under et gør efter kraftpåvirkningen. Systemets masse må da være givet ved faktoren i den skarpe parentes. Vi ser da, at systemets masse er summen $M + m$ af rørets og kuglens masser plus det forventede tillægsled

$$\Delta m = \{\gamma(V) - 1\}m = T/c^2.$$

6.3.2 Eksempel: $E_0 = mc^2$ og makroskopiske legemer

For et makroskopisk legeme er hvileenergien mc^2 enorm: Hvert gram indeholder en energimængde på 9×10^{13} J, som nogenlunde tilsvare Hiroshima-bomben. En meget lille del af denne energi hidrører fra den termiske bevægelse af molekylerne, der udgør legemet, og kan afgives som varmeenergi. En del hidrører fra de intermolekylære og interatomare bindingsenergier og kan i visse tilfælde delvist afgives ved forbrænding eller ved kemiske eksplosioner. En meget større del hidrører fra kernebindingerne og kan også tiltider frisættes, som f.eks. i kernekraftværker og i kernevåben. Den største del af energien (omkring 99%) hidrører fra hvileenergien af nukleonerne (protoner og neutroner) og elektronerne, der udgør atomerne. Kun gennem annihilation mellem stof og antistof kan denne sidste del af energien frigøres.

6.3.3 Eksempel: Solens udstråling

Ved solkonstanten forstås den energimængde, der i form af solstråling falder på en fladeenhed, anbragt vinkelret på strålingens retning. Den er ved jordoverfladen 1368 W/m^2 . Den totale effekt af solens elektromagnetiske stråling – kaldet solens luminositet – er derfor

$$L_{\odot} = 4\pi R^2 \cdot 1368 \text{ W/m}^2 = 3.85 \times 10^{26} \text{ W}$$

Solens totale energitab er lidt større, idet den elektromagnetiske stråling ledsages af udstråling af elementarpartikler kaldet neutrinoer, som kun vekselvirker yderst svagt med stof, og derfor ikke regnes med i solkonstanten.

Vi må nu forvente, at Solens energitab ifølge ækvivalensen mellem masse og energi er ledsaget af et massetab bestemt ved

$$-\frac{\Delta m}{\Delta t} > \frac{3.85 \times 10^{26} \text{ W}}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 4.3 \times 10^9 \text{ kg/s}.$$

6.4 De relativistiske bevarelseslove

Lad os for en kort bemærkning vende tilbage til udgangspunktet for vores opbygning af den relativistiske mekanik, nemlig antagelsen om at 4-impulsen er bevaret i ethvert partikelsammenstød. Denne antagelse fik udtryk gennem ligningerne (6.6) og (6.7), som vi nu forstår udtrykker henholdsvis bevarelsen af partikelsystemets relativistiske impuls og totale energi. Bemærk, at relationerne (6.6) og (6.7) er henholdsvis rumlige og tidslige komponenter af 4-vektoren-relationen (6.5). Men idet enhver 4-vektor transformerer ved

Lorentz-transformationen (5.11), som jo sammenblander de tidslige og rumlige komponenter, indser man let, at hvis to givne 4-vektorer har identiske tidslige komponenter i ethvert inertialsystem, så må også deres rumlige komponenter være identiske, og omvendt. (Situationen er parallel til det sædvanlige 3-dimensionale tilfælde: Hvis to givne vektorer har identiske x -komponenter for enhver orientering af koordinatsystemet, så må de to vektorer være identiske.) Det følger logisk heraf, at enhver af bevarelsessætningerne (6.6) og (6.7) hver for sig medfører den fulde lov (6.5). Udtrykt anderledes, følger impulsbevarelsen som en direkte konsekvens af energibevarelsen, og omvendt. Bemærk, at situationen her står i modsætning til situationen i den klassiske mekanik, hvor impulsbevarelsen og energibevarelsen er to logisk uafhængige fænomener.

6.5 Sammenhængen mellem energi og impuls

Mellem energien E og den relativistiske impuls $\mathbf{p}$ kan vi udlede en betydningsfuld relation ved at betragte kvadratet på 4-impulsens. For denne får vi ved at benytte (6.13)

$$P^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = E^2/c^2 - p^2. \quad (6.15)$$

I partiklens hvilesystem, hvor $p = 0$ og $E = mc^2$, reducerer udtrykket til

$$P^2 = m^2 c^2. \quad (6.16)$$

Da P^2 imidlertid er invariant, er de to udtryk ækvivalente, således at

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.} \quad (6.17)$$

Da E er en positiv størrelse, har vi

$$E = T + mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (6.18)$$

For små hastigheder, således at $pc \ll mc^2$, finder vi heraf

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4}} = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 c^2} + \dots \right) \\ &\simeq mc^2 + \frac{p^2}{2m}, \end{aligned}$$

hvorfor (6.18), som vi allerede tidligere har anført, går over i det klassiske udtryk $T = p^2/2m = \frac{1}{2}mv^2$. For meget store hastigheder, således at $pc \gg mc^2$, finder vi

$$E \simeq pc.$$

Denne approksimation benyttes ofte i højenergifysikken.

6.6 Masseløse partikler

I den relativistiske mekanik kan vi inkludere endog masseløse partikler såsom fotoner. Ved at sætte $m = 0$ i (6.17) finder vi $E^2 = p^2 c^2$, og dermed

$$p = E/c. \quad (6.19)$$

En masseløs partikel vil dermed ifølge (6.13) have 4-impulsen

$$\mathbf{P} = E/c(1, \mathbf{n}), \quad (6.20)$$

hvor $\mathbf{n}$ er enhedsvektoren, der beskriver partiklens bevægelsesretning. Idet 4-impulsen altså er lysagtig (og dermed ifølge (6.1) og (5.20) enhver forskydningsvektor på partiklens bane har samme egenskab) følger det, at enhver masseløse partikel bevæger sig med lyshastigheden. Dette kan også indses ved anvendelse af (6.14).

Resultatet (6.19) kunne for en overfladisk betragtning synes at være i modstrid med definitionen (6.4) af den relativistiske impuls, $\mathbf{p} \equiv \gamma(u)m\mathbf{u}$, da man ved at sætte $m = 0$ i dette udtryk, synes at opnå, at masseløse partikler vil have impulsen nul. Dette er imidlertid en fejlslutning, idet jo $\gamma(u)$ giver en uendelig netop værdi for $u = c$. Det kan tværtimod vises, at resultatet (6.19) er konsistent med impulsdefinitionen (6.4).

Øvelse 6.1 *Betragt en partikel med den konstante energi E og massen m . Benyt nu udtrykket (6.10) for partiklens energi til med udgangspunkt i impulsdefinitionen (6.4) at opskrive et udtryk for impulsens størrelse som alene afhænger af E og m og naturkonstanten c . Foretag nu grænseovergangen $m \rightarrow 0$ og kontroller at resultatet er i overensstemmelse med (6.19).*

6.6.1 Doppler-effekten fra transformationen af fotonens 4-impuls

Vi kan nu demonstrere, hvorledes udtrykket (4.4) for den relativistiske Doppler-effekt følger direkte af transformationsegenskaberne for fotonens 4-impuls. Til dette brug har vi brug for et resultat fra kvantemekanikken, som siger, at der gælder følgende sammenhæng mellem en fotonens energi og frekvens

$$E = h\nu \quad (6.21)$$

hvor h er Planck's konstant.

Lad os betragte en foton der bevæger sig langs x -aksen i systemet S med energien E . Den har da 4-impulsen

$$\mathbf{P} = E/c(1, 1, 0, 0).$$

Fotonens 4-impuls i S' kan nu bestemmes ved hjælp af Lorentz-transformationen (5.11). Her er vi imidlertid kun interesserede i energien, hvorfor vi kan nøjes med at beregne nulte-komponenten. Herved fås

$$E' = \gamma(E - \beta E) = E \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

Idet vi benytter proportionaliteten (6.21) af E og ν fås da umiddelbart relationen

$$\frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}},$$

i overensstemmelse med (4.4).

På tilsvarende vis kan også transformationsegenskaberne for retningen af en fotonens bevægelse og dermed udtrykket (4.16) for lysets aberration bestemmes.

6.6.2 Eksempel: Compton-spredning

Som et eksempel på anvendelsen af den relativistiske spredningsmekanik på masseløse partikler betragter vi Compton-spredningen, hvorved fotoner spredes på elektroner. Vi betragter en foton med energien E som støder sammen med en hvilende elektron med massen m , og derved spredes med vinklen θ . Efter spredningsprocessen har fotonen energien E' , som vi ønsker at beregne.

Vi skriver 4-impulsbevarelsen på formen

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}'_1 + \mathbf{P}'_2,$$

hvor partikel 1 er fotonen, partikel 2 er elektronen og hvor de mærkede impulser refererer til slutttilstanden. Udtrykket kan omskrives til

$$\mathbf{P}'_2 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}'_1,$$

som ved kvadrering giver

$$P'^2_2 = P^2_1 + P^2_2 + P'^2_1 + 2\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 - 2\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}'_1 - 2\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}'_1.$$

For de invariante kvadrater på 4-impulserne har vi ifølge (6.2), $P^2_1 = P'^2_1 = 0$ og $P^2_2 = P'^2_2 = m^2c^2$, hvorefter altså

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}'_1 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}'_1.$$

Ved spredningsprocessen ændres fotonens bevægelsesretning fra at være bestemt ved enhedsvektoren $\mathbf{n}$ til at være bestemt ved enhedsvektoren $\mathbf{n}'$, hvor ifølge forudsætningerne $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \cos \theta$. Fotonens 4-impuls før og efter vekselvirkningen er derfor henholdsvis

$$\mathbf{P}_1 = E/c(1, \mathbf{n}), \quad \text{og} \quad \mathbf{P}'_1 = E'/c(1, \mathbf{n}').$$

Elektronen er i hvile før vekselvirkningen, hvorfor dens 4-impuls er

$$\mathbf{P}_2 = mc(1, 0).$$

Indsætter vi nu de tre 4-impulser i udtrykket ovenfor, finder vi

$$\frac{EE'}{c^2}(1 - \cos \theta) = Em - E'm,$$

som efter omskrivning giver det eftersøgte resultat for fotonenergien

$$E' = \frac{Emc^2}{E(1 - \cos \theta) + mc^2}.$$

6.7 Tyngdepunktssystemet og den invariante masse

For mange anvendelser er det nyttigt at betragte problemet fra et inertialsystem, hvori den totale impuls er nul. Et sådan system eksisterer for ethvert partikelsystem. I analogi med den klassiske mekanik kalder man dette system for *tyngdepunktssystemet*, selvom dette egentlig er en lidt misvisende betegnelse. En bedre betegnelse ville være nul-impuls-systemet.

Lad os betragte et vilkårligt inertialsystem S og i dette et system af partikler der lejlighedsvist vekselvirker via sammenstød men ellers er frie. Partiklerne bevæger sig da jævnt mellem sammenstødene. Vi definerer nu systemets totale energi, totale impuls og totale 4-impuls som den *øjeblikkelige* sum over de tilsvarende størrelser for hver af partiklerne, altså

$$E = \sum_i E_i, \quad \mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P}_i = \sum_i (E_i/c, \mathbf{p}_i) = (E/c, \mathbf{p}). \quad (6.22)$$

På grund af bevarelseslovene er enhver af disse størrelser konstant i tiden.

Idet $\mathbf{P}$ er en sum af 4-vektorer, synes det åbenbart af den selv må være en 4-vektor. Helt så simpelt er det imidlertid ikke. Havde enhver iagttagere været enig om hvilke $\mathbf{P}_i$ 'er, der indgik i summen $\sum \mathbf{P}_i$, så ville $\sum \mathbf{P}_i$ klart være en 4-vektor. Men summen udregnes jo til et bestemt tidspunkt i hvert system, og det kan dermed være forskellige $\mathbf{P}_i$ 'er der udgør summen i de forskellige systemer. Imidlertid gælder der jo 4-impulsbevarelse ved hvert eneste sammenstød mellem to partikler, og i hvert system kunne man således foretage sin sum over præcis de samme $\mathbf{P}_i$ 'er som i S , og få det samme resultat som for den øjeblikkelige sum (se Figur 6.3). Så $\mathbf{P}$ er altså virkelig en 4-vektor.

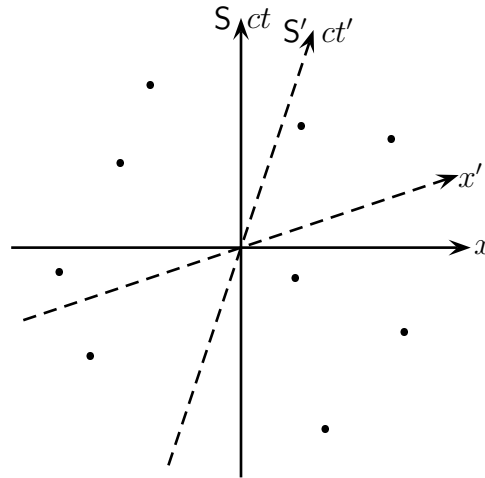
I almindelighed indeholder partikelsystemet både masseløse partikler og partikler med endelig masse. Tilsvarende indeholder summen $\sum \mathbf{P}_i$ både lysagtige ($m = 0$) og tidsagtige ($m > 0$) 4-vektorer, som alle peger mod fremtiden. Man indser da let (f.eks. gennem geometriske argumenter), at $\mathbf{P}$ vil være tidsagtig og pege mod fremtiden. Eneste undtagelse herfra er tilfældet, hvor systemet består udelukkende af masseløse partikler, der alle bevæger sig parallelt. Der findes da i almindelighed et system, hvori de rumlige komponenter af $\sum \mathbf{P}$ er nul, altså $\sum \mathbf{p} = 0$. Dette system er tyngdepunktssystemet, og heri er systemets 4-impuls

$$\mathbf{P}_{\text{CM}} = (Mc, \mathbf{0}), \quad (6.23)$$

hvor M kaldes systemets *invariante masse* og er givet ved

$$Mc = \sqrt{P^2} = \sqrt{E^2/c^2 - p^2}. \quad (6.24)$$

Vi ser altså, at den invariante masse er for partikelsystemet, hvad massen er for en enkelt partikel. Det er præcis den masse vi ville måle, hvis vi ikke var opmærksomme på den sammensatte natur af et system (som for en makroskopisk legeme, som er sammensat af molekyler i indbyrdes bevægelse). Lad os her gøre den vigtige iagttagelse, at bevarelsen af 4-impulsen for et isoleret system, leder til bevarelse af systemets invariante masse. Den invariante masse er altså bevaret for et isoleret system.



Figur 6.3: I et rumtidsdiagram er afsat begivenhederne tilsvarende de lejlighedsvis sammenstød mellem partiklerne i et partikelsystem. Den totale 4-impuls $\mathbf{P}$ er defineret som den øjeblikkelige sum over partiklernes 4-impuls. Øjeblikket i S kunne f.eks. tilsvare x -aksen. Øjeblikke i S tilsvare ikke øjeblikke i S' . I S' kunne $\mathbf{P}'$ da f.eks. udregnes til øjeblikket tilsvarende x' -aksen (jvnf. diskussionen i Afsnit 2.10.1). I almindelighed vil der da gives sammenstød, der forekommer før udregningen af $\mathbf{P}$ i S , men efter udregningen af $\mathbf{P}'$ i S' , og omvendt. På trods af dette, transformerer $\mathbf{P}$ som en 4-vektor, idet 4-impulsen jo er bevaret i hvert sammenstød mellem to partikler. Vi kunne dermed vælge i S' at udregne $\mathbf{P}'$ efter x' -aksen og få samme resultat, som ved udregning efter x' -aksen.

6.7.1 Eksempel: Elektron-positron-sammenstød

Vi betragter en proces hvor en elektron (e^-) og en positron (e^+) bringes til sammenstød. Idet positronen er elektronens anti-partikel, kan de to partikler herved annihilere og den frigivne energi omdannes til andre partikler ifølge Einsteins formel $E = mc^2$. I det givne tilfælde, hvor elektronen og positronen tænkes at være modsat rettede og hvor begge har impulsen $p = 1.55 \text{ GeV}/c$, skabes en ny partikel kaldet en J/ψ ved reaktionen $e^+ + e^- \rightarrow J/\psi$. Vi ønsker nu at bestemme massen af den skabte partikel. (Vedr. de her anvendte enheder, se det følgende indskud.)

Da 4-impulsen er bevaret ved processen, ønsker vi altså at beregne den invariante masse af elektron-positron-systemet før stødet. Vi starter med at konstatere, at elektronen og positronen har identiske masser, idet de er hinandens anti-partikler. Dernæst ser vi, at for begge partikler er hvileenergien $mc^2 = 0.511 \text{ MeV}$ forsvindende i forhold til $pc = 1.55 \text{ GeV}$, hvorfor vi kan benytte approksimationen $E = pc$. De to partiklers 4-impuls er da

$$\mathbf{P}_{e^-} = (p, \mathbf{p}) \quad \text{og} \quad \mathbf{P}_{e^+} = (p, -\mathbf{p}).$$

Systemets samlede 4-impuls,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{e^-} + \mathbf{P}_{e^+} = (2p, 0),$$

har da det invariante kvadrat $P^2 = 4p^2$, og den invariante masse er derfor

$$M = \frac{1}{c} \sqrt{P^2} = 2p/c.$$

Ved indsættelse af talværdier finder vi nu massen af J/ψ partiklen

$$M = 2 \cdot 1.55 \text{ GeV}/c^2 = 3.1 \text{ GeV}/c^2.$$

Indskud 6.2 *Energienheden elektronvolt*

I den moderne fysik, navnlig i højenergifysikken, har der udviklet sig en specialiseret sprogbrug, hvor energier regnes i enheder af elektronvolt (eV). Her er 1 eV det arbejde, som det elektriske felt udfører på en elektron, når denne gennemløber et spændingsfald på 1 Volt. Elektronvolt er da en meget lille enhed, idet feltets arbejde jo er

$$W = (-1.6022 \times 10^{-19} \text{ C})(-1 \text{ V}) = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ J},$$

således at

$$\boxed{1 \text{ eV} = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ J}.} \quad (6.25)$$

I praktiske anvendelser benytter man ofte enhederne keV, MeV, GeV og TeV, som er henholdsvis 10^3 eV, 10^6 eV, 10^9 eV og 10^{12} eV.

Som et eksempel udregner vi elektronens hvileenergi i elektronvolt, og finder

$$E_0 = m_e c^2 = (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3.0 \times 10^8 \text{ m/s})^2 \frac{1 \text{ eV}}{1.6022 \times 10^{-19} \text{ J}} = 0.511 \text{ MeV}.$$

En partikels masse angives nu ved den tilsvarende hvileenergi målt i elektronvolt, således at f.eks. elektronmassen er

$$m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2.$$

Tilsvarende ved vi, at også størrelsen pc har enheden energi. Impuls udtrykkes derfor i enheder af eV/c.

I moderne accelerators kan man tildele elementarpartikler energier, der ligger mange størrelsesordner over deres hvileenergier. Ved LHC acceleratoren, som er under konstruktion ved CERN i Geneve, vil protoner, som har massen $938 \text{ MeV}/c^2$, accelereres op til energier på $E \simeq 7 \text{ TeV}$. Ifølge (6.18) har man da $E \simeq pc$, og protonernes impuls er således $7 \text{ TeV}/c$.

6.7.2 Tærskelenergien

Et vigtigt anvendelsesområde for den relativistiske mekanik er såkaldte tærskelproblemer. Som et eksempel betragter vi produktion af anti-protoner ved sammenstødet mellem to protoner.

I ethvert sammenstød mellem elementarpartikler, hvor der er tilstrækkelig energi til rådighed, kan der produceres nye partikler, som enten kan være af samme type som de kolliderende partikler eller af en anden type. I enhver partikelproduktion må ikke alene loven om 4-impulsen bevarelse være overholdt; reaktionen må også tilfredsstille loven om

den totale elektriske ladningsbevarelse samt en del andre bevarelseslove, som kendes fra partikelfysikken.

Vi betragter nu produktion af et proton-antiproton-par gennem reaktionen

$$p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p}), \quad (6.26)$$

hvor $\bar{p}$ angiver antiprotonen. Vi antager, at den ene proton i begyndelsestilstanden er i hvile i laboratoriet, og ønsker nu at vide, hvor stor en energi den anden proton mindst skal have for at processen kan foregå. Denne energi benævnes *tærskelenergien* for processen.

Ifølge 4-impulsbevarelsen gælder der

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_f \quad (6.27)$$

hvor $\mathbf{P}_1$ og $\mathbf{P}_2$ er 4-impulserne af henholdsvis den hvilende og den indkommende proton i begyndelsestilstanden, mens $\mathbf{P}_f$ er den *totale* impuls af sluttilstanden. Ved at kvadrere finder vi

$$(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) \cdot (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = \mathbf{P}_f \cdot \mathbf{P}_f.$$

Her er højresiden $\mathbf{P}_f \cdot \mathbf{P}_f \equiv P_f^2$ forbundet med sluttilstandens invariante masse gennem relationen $P_f^2 = M_f^2 c^2$. Ved tærskelenergien – altså den mindste energi hvorved processen kan foregå – vil alle partikler i sluttilstanden have den kinetiske energi nul i tyngdepunktssystemet. De fire partikler vil altså ligge i hvile i forhold til hinanden. Systemets invariante masse vil da være $4M$, hvor M er protonmassen. Vi udregner nu venstresiden og finder

$$P_1^2 + P_2^2 + 2\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = 16M^2 c^2. \quad (6.28)$$

De invariante normer P_1^2 og P_2^2 for de to protoner er

$$P_1^2 = P_2^2 = M^2 c^2,$$

som vi indsætter i (6.28), hvorefter vi finder

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = 7M^2 c^2. \quad (6.29)$$

Vi definerer nu 4-impulserne til de to protoner i begyndelsestilstanden, idet vi antager at den indkommende proton (2) har 3-impulsen $\mathbf{p}$,

$$\begin{aligned} P_1 &= (Mc, 0), \\ P_2 &= (E/c, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Vi finder således

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = EM \quad (6.30)$$

hvoraf vi ved sammenligning med (6.29) endelig finder det søgte resultat

$$E = 7Mc^2 \quad (6.31)$$

Den totale relativistiske energi E af den indkommende proton må altså mindst være $7Mc^2$ for at processen (6.26) kan foregå. Trækker vi protonens hvileenergi fra, fås, at den kinetiske energi af den indkommende proton mindst må være $T = 6Mc^2 = 5.6 \text{ GeV}$.

Det kan bemærkes, at for at producere en “ekstra hvileenergi” på $2Mc^2$ skal man altså bruge en kinetisk energi på $6Mc^2$ i laboratoriesystemet. Årsagen er den åbenbare, at for at tilfredsstille impulsbevarelsen, må partiklerne i sluttstanden tildeles en kinetisk energi. Og denne energi må således også være tilstede i begyndelsestilstanden. Havde vi i stedet arrangeret det således, at to protoner mødte hinanden med lige store og modsatrettede impulser, ser vi umiddelbart at reaktionen (6.26) ville kunne foregå, hvis hver af protonerne havde den kinetiske energi $T = Mc^2$.

6.8 Bindingsenergien

I dette og det følgende afsnit betragter vi to vigtige begreber fra anvendelsen af ækvivalensen mellem masse og energi, nemlig *bindingsenergien* og *reaktionsenergien*.

Vi betragter et isoleret system bestående af to partikler, som påvirker hinanden med konservative kræfter. Systemet iagttages fra tyngdepunktssystemet, og vi antager at partiklernes hastigheder her er så små, at vi kan anvende den klassiske mekaniks love. Da kraftfeltet er konservativt, eksisterer der en potentialfunktion

$$U = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

hvor $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ er partiklernes stedvektorer. Potentialfunktionen antages at have værdien nul, når partiklerne fjernes uendelig langt fra hinanden. Ifølge princippet om energibevarelse, er summen af systemets potentielle og totale kinetiske energi konstant, altså

$$T + U = \text{konst.}$$

I det tilfælde hvor den gensidige kraft er tiltrækkende, kan $T + U$ være negativ, og de to partikler vil da være bundne til hinanden.

Vi tænker os nu, at vi ønsker at fjerne de to partikler uendelig langt fra hinanden på en sådan måde, at de er i hvile i sluttstanden. Vi siger da, at partiklerne er asymptotisk frie. For at adskille de to partikler må vi udføre et arbejde for at modvirke partiklernes gensidige tiltrækningskraft. Herved tilføjer vi systemet den positive energimængde $-(T + U)$. Dette tilsvarende en massetilvækst, og det bundne systems masse må således være mindre end summen af de to frie partiklers masser. Vi definerer nu systemets *bindingsenergi* som forskellen i hvileenergien mellem de adskilte bestanddele og det sammensatte system:

$$E_B = \{M(\text{frie}) - M(\text{bundne})\} c^2. \quad (6.32)$$

6.8.1 Eksempel: Brintatomets bindingsenergi

Som et eksempel betragter vi brintatomet, som består af en elektron og en proton, der er bundet til hinanden af den elektromagnetiske kraft. Den potentielle energi er givet ved

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

som går asymptotisk mod nul når separationen r vokser. Bindingsenergien for et brintatom i grundtilstanden, som tilsvarende ionisationsenergien, er 13.6 eV. Brintatomets masse er altså $13.6 \text{ eV}/c^2$ mindre end summen af masserne af en proton og en elektron.

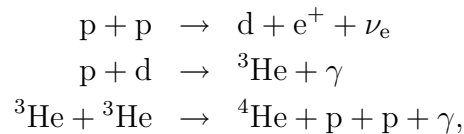
6.8.2 Eksempel: Deuteronens bindingsenergi

I kernefysikken møder man bindingsenergier, der er omtrent en million gange større end hvad der er tilfældet i atomfysikken. Som et eksempel betragter vi deuteronen, som er en bunden tilstand af en neutron og en proton. Bindingsenergien er her givet ved

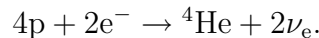
$$\begin{aligned} E_B &= \{M(n) + M(p) - M(H^2)\} c^2 \\ &= \{939.57 \text{ MeV}/c^2 + 938.27 \text{ MeV}/c^2 - 1875.61 \text{ MeV}/c^2\} c^2 \\ &= 2.23 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

6.8.3 Eksempel: Solens og stjerner energiproduktion

Den vigtigste energikilde i Solen og de fleste andre stjerner er kerneprocesser, hvorved brint omdannes til helium. Omdannelsen forløber via den følgende sekvens af kernereaktioner



hvor de to første trin forløber to gange, hver gang det sidste trin forløber en gang. De to positroner som produceres i første trin, annihilere umiddelbart med to elektroner, og den totale reaktion bliver dermed



Den frigivne energi pr. dannet heliumkerne beregnes nu fra masseregnskabet

$$\{4M(p) + 2M(e^+) - M({}^4\text{He})\} c^2 = (4 \times 938.27 + 2 \times 0.51 - 3727.22) \text{ MeV} = 25.9 \text{ MeV}.$$

Bemærk, at der skabes to neutrinoer, ν_e , for hver dannet heliumkerne. Neutrinoer vekselvirker kun meget svagt med stof, og næsten alle neutrinoer, der produceres i Solens centrum, undslipper Solen og stråles ud i det tomme rum. Solen er således en vigtig neutrinkilde. Omtrent 2% af Solens energiproduktion udstråles som neutrinoer. Fra Solens udstråling kan man beregne den forventede neutrinoflux ved Jorden til at være $6 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

6.9 Reaktionsenergien

Nært beslægtet med bindingsenergien er begrebet reaktionsenergi. Ikke alle sammensatte systemer har en masse, som er mindre end summen af bestanddelenes masser, og nogle fundamentale partikler henfalder således spontant til andre partikler hvis kombinerede masse er mindre end moder-partiklens. I disse tilfælde giver forskellen i masse anledning til frigivelse af energi ved henfaldet eller reaktionen. Vi definerer *reaktionsenergien* som

$$Q = \{M(\text{partikler før}) - M(\text{partikler efter})\} c^2 \quad (6.33)$$

Reaktionsenergien er altså lig med bindingsenergien med modsat fortegn. Hvis Q er positiv, siger vi at reaktionen er *exoterm*; dvs. den frigiver energi. Hvis Q er negativ, er reaktionen *endoterm*; der kræves tilførsel af energi, for at den foregår.

6.9.1 Eksempel: Neutron-henfald

Vi betragter det spontane henfald af en fri neutron ved processen $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. For at finde den frigivne energi ved dette henfald må vi beregne forskellen i masserne før og efter henfaldet. Neutrinoen ν_e vides at have en meget lille masse (længere har man endog ment, den var masseløs), som vi kan ignorere i dette regnskab. Vi finder derfor

$$\begin{aligned} Q &= \{M(n) - M(p) - M(e^-)\} c^2 \\ &= \{939.57 \text{ MeV}/c^2 - 938.28 \text{ MeV}/c^2 - 0.511 \text{ MeV}/c^2\} c^2 \\ &= 0.78 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Reaktionsenergien ved dette henfald er meget lille, og da processen går via den såkaldte svage kraft, er neutronens levetid ret stor; omtrent et kvarter. Man kunne spørge, hvorfor der overhovedet findes neutroner, da Universets alder jo unægtelig er betydelige længere end et kvarter. Det skyldes, at ovennævnte beregning kun er gyldig for frie neutroner. For neutroner, som er bundne i en atom-kerne er reaktionsenergien faktisk negativ. Altså er det energetisk fordelagtigt, at neutronerne forbliver neutroner. At dette er tilfældet, kan man kvalitativt forstå derved, at en proton i modsætning til neutronen ville blive Coulomb-frastødt af de andre protoner i kernen. Hvis protonens potentielle energi i feltet fra de andre protoner ville overskride den ovennævnte reaktionsenergi, vil processen ikke foregå.

6.10 Fire-kraften og tre-kraften

Den eneste påvirkning af en partikels bevægelse vi hidtil har betragtet var fra sammenstød, og vi er kommet ganske langt uden af ty til kraftbegrebet. Dette spiller imidlertid også en vigtig rolle i den relativistiske mekanik, som f.eks. ved beskrivelsen af ladede partikler i et elektromagnetisk felt.

Vi starter med at definere 4-kraften på en partikel med massen m

$$\mathbf{F} = \frac{d}{d\tau} \mathbf{P} = \frac{d}{d\tau} (m\mathbf{U}) = m\mathbf{A}, \quad (6.34)$$

hvor vi har antaget, som vi vil gøre i det følgende, at partiklens hvileenergi og dermed dens masse ikke påvirkes af kraften gennem f.eks. deformation eller eksitation, og at derfor $dm/d\tau = 0$. Vi bemærker, at i fraværet af en kraft forbliver $\mathbf{P}$ konstant. Fra komponentformen (6.13) af $\mathbf{P}$ finder vi nu

$$\mathbf{F} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \gamma(u) \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \gamma(u) \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \mathbf{f} \right), \quad (6.35)$$

hvor vi har indført den *relativistiske 3-kraft* defineret ved

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \gamma(u) m \mathbf{u} \}. \quad (6.36)$$

I den ikke-relativistiske grænse reducerer $\mathbf{f}$ til den velkendte Newtonske kraft. Bemærk hvordan *effekten* dE/dt , altså hastigheden med hvilken kraften udfører arbejde på partiklen

og derved overfører energi til denne, danner partner med 3-kraften i 4-vektoren $\mathbf{F}$, på samme måde som energien danner partner med 3-impulsen i 4-vektoren $\mathbf{P}$.

Af (6.34) følger, idet $\mathbf{U}$ og $\mathbf{A}$ ifølge (5.29) er ortogonale, at

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (6.37)$$

Tilsvarende finder vi ved anvendelse af komponent-formerne (6.13) og (6.35)

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} = \gamma^2(u) \left(\frac{dE}{dt} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right). \quad (6.38)$$

Ved sammenligning af de to udtryk får vi således umiddelbart sammenhængen

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = \frac{dE}{dt}, \quad (6.39)$$

hvorved $\mathbf{F}$ tager den alternative komponent-form

$$\mathbf{F} = \gamma(u) \left(\frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}{c}, \mathbf{f} \right). \quad (6.40)$$

Af (6.39) ser vi, at der også i det relativistiske tilfælde gælder sammenhængen

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = dE, \quad (6.41)$$

som siger, at kraftens arbejde er lig med tilvæksten i partiklens energi.

6.10.1 Transformationsregler for kraften

Med udgangspunkt i udtrykket for 4-kraften (6.40) og transformationsreglerne (5.11) for 4-vektorer kan vi finde transformationsreglerne for 3-kraften. Vi vil imidlertid her nøjes med at betragte det tilfælde, hvor vi kender kraften i partiklens øjeblikkelige hvilesystemet og ønsker at finde den transformerede kraft i et andet system.

Vi lader systemet S' være partiklens øjeblikkelige hvilesystem, som antages at bevæge sig på sædvanlig måde i forhold til systemet S . Idet partiklen i S' har den øjeblikkelige hastighed $u' = 0$ er 4-kraften i dette system ifølge (6.40) givet ved

$$\mathbf{F}' = (0, f'_x, f'_y, f'_z). \quad (6.42)$$

Af Lorentz-transformationen (5.11) finder vi heraf 4-kraftens rumlige komponenter i S

$$F_1 = \gamma(v) f'_x, \quad F_2 = f'_y, \quad F_3 = f'_z. \quad (6.43)$$

Imidlertid kan vi finde de samme komponenter ved at benytte definitionen (6.40), idet partiklen jo i S har hastigheden v ,

$$F_1 = \gamma(v) f_x, \quad F_2 = \gamma(v) f_y, \quad F_3 = \gamma(v) f_z. \quad (6.44)$$

Ved at sammenholde (6.43) og (6.44) finder vi nu

$$f_x = f'_x, \quad f_y = f'_y/\gamma, \quad f_z = f'_z/\gamma, \quad (6.45)$$

hvorved vi har bestemt de ønskede transformationsegenskaber. Specielt ser vi altså, at kraftkomponenten i bevægelsesretningen, f_x , er den samme i laboratoriesystemet som i partiklens øjeblikkelige hvilesystem.

6.11 Den relativistiske bevægelsesligning

Vi vil nu betragte det tilfælde, hvor en forskrift foreligger for, hvordan den relativistiske 3-kraft på en partikel afhænger af omgivelsernes fysiske tilstand. Ligningen (6.36) får hermed et fysisk indhold og udgør da den *relativistiske bevægelsesligning*.

Af (6.36) finder vi ved at gennemføre differentiationen

$$\mathbf{f} = \gamma m \frac{d\mathbf{u}}{dt} + m\mathbf{u} \frac{d\gamma}{dt} = \gamma m \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \mathbf{u}, \quad (6.46)$$

hvor vi i sidste lighed har benyttet (6.39) med $E = \gamma mc^2$. Vi ser heraf, at accelerationen $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$ vil ligge i planet udspændt af $\mathbf{f}$ og $\mathbf{u}$, men at den i almindelighed ikke vil være ensrettet med $\mathbf{f}$. Hvis vi undtager det tilfælde hvor $\mathbf{u} = 0$, vil $\mathbf{f}$ og $\mathbf{u}$ kun være ensrettede når det sidste led i (6.46) er proportional med $\mathbf{f}$, og dette sker kun når $\mathbf{f}$ og $\mathbf{u}$ er enten ortogonale eller parallelle. Vi vil nu betragte eksempler på disse to tilfælde.

6.11.1 Cyklotronbevægelsen

Som et eksempel, der har særlig interesse i relativistiske problemer, kan vi betragte elektromagnetiske kræfter. Kraften på en partikel med ladning q , der bevæger sig i et elektrisk felt $\mathbf{E}$ og et magnetfelt $\mathbf{B}$ – den såkaldte Lorentz-kraft – er givet ved det velkendte udtryk

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (6.47)$$

som har vist sig også at have gyldighed i den relativistiske beskrivelse.

For en ladet partikel i et konstant magnetfelt reducerer Lorentz-kraften til

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (6.48)$$

Kraften er da stedse vinkelret på hastigheden, hvorfor sidste led i (6.46) forsvinder, og bevægelsesligningen reducerer til

$$\gamma m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q(\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (6.49)$$

Accelerationen er altså vinkelret på hastigheden, hvorfor partiklen vil foretage en jævn cirkelbevægelse i planet vinkelret på $\mathbf{B}$ -feltet. Man viser let, at radius i cirkelbevægelsen, den såkaldte *cyklotronradius*, vil være

$$r_c = \frac{\gamma m u}{qB} = \frac{p}{qB}, \quad (6.50)$$

hvor $u = |\mathbf{u}|$ og $B = |\mathbf{B}|$. Cyklotronradius er altså proportional med impulsen, og måling af en ladet partikels afbøjning i et kendt magnetfelt kan således benyttes til at bestemme partiklens impuls.

Eksempel 6.1 Cyklotronen

I en cyklotron accelereres ladede partikler op til relativistiske hastigheder i et cirkulært strålerør. Bevægelsen har altså fast radius. Man må således ifølge (6.50) forøge magnetfeltet i takt med impulsen for at holde partiklerne på deres bane.

6.11.2 Hyperbolsk bevægelse

For en ladet partikel i et konstant elektrisk felt reducerer Lorentz-kraften til

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}. \quad (6.51)$$

Lad os betragte det tilfælde, hvor partiklen starter sin bevægelse fra hvile. Den vil da være påvirket af en kraft, der til stadighed er ensrettet med hastigheden, og kraften vil dermed ifølge (6.45) have samme styrke, f , også i partiklens øjeblikkelige hvilesystem. Partiklen vil altså have den konstante egen-acceleration $g = f/m$.

Lad os arrangere inertialsystemet S således, at partiklen heri starter sin bevægelse i $x = 0$ til tiden $t = 0$, og at kraften er rettet efter x -aksen. Vi søger nu partiklens relativistiske bevægelsesligning, som erstatning for det klassiske, parabolske udtryk $x = \frac{1}{2}gt^2$.

Vi har allerede i Afsnit 2.10.2 set hvordan en konstant egen-acceleration er sammenknyttet med en hyperbolsk bevægelse, og med resultatet fra Opgave 2.6 kunne vi via diverse omskrivninger komme frem til en løsning på det aktuelle problem. Her vil vi imidlertid gennemføre udregningerne direkte.

Sammenhængen mellem partiklens konstante egen-acceleration g og accelerationen, du/dt , i S er ifølge (5.32) givet ved

$$g = \gamma^3 \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}[u\gamma(u)], \quad (6.52)$$

hvor vi for sidste ligning har benyttet identiteten $d(\gamma v) = \gamma^3 dv$, som let eftervises. Ved integration med hensyn til t fås heraf

$$gt = u\gamma(u) = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (6.53)$$

hvor vi har benyttet, at $u = 0$ til tiden $t = 0$. Ved isolering af u fås da

$$u = \frac{gt}{\sqrt{1 + g^2 t^2 / c^2}}. \quad (6.54)$$

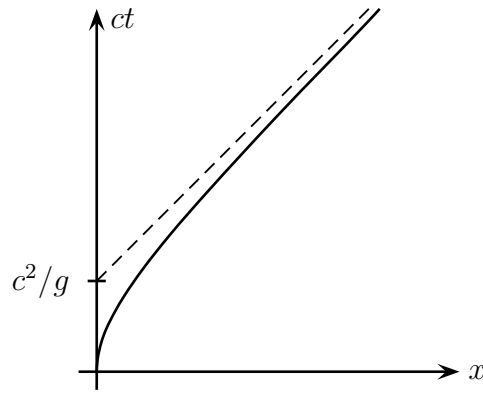
Vi ser, at for små tider, $t \ll c/g$, er $u \simeq gt$, som forventet i det ikke-relativistiske tilfælde. Videre ser vi, som ventet, at $u \rightarrow c$ for $t \gg c/g$.

Ved at integrere endnu engang med hensyn til t finder vi dernæst den tilbagelagte strækning

$$x = \frac{c^2}{g} \left[\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}} - 1 \right], \quad (6.55)$$

hvor vi har benyttet grænsebetingelsen $x = 0$ for $t = 0$. Korrektheden af dette udtryk eftervises enklest ved differentiation. For små tider, $t \ll c/g$, genfinder vi ved rækkeudvikling det klassiske udtryk $x = \frac{1}{2}gt^2$. Udtrykket (6.55) kan skrives på formen

$$\left(\frac{xg}{c^2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{gt}{c} \right)^2 = 1, \quad (6.56)$$



Figur 6.4: En partikel, der udsættes for en konstant kraft, har konstant egenacceleration og udfører en hyperbolsk bevægelse.

eller tilsvarende

$$(x + c^2/g)^2 - (ct)^2 = (c^2/g)^2, \quad (6.57)$$

og bevægelsen ses således at danne en hyperbel i rumtidsdiagrammet med en asymptote, givet ved lyskeglen $x = ct - c^2/g$, som skitseret på Figur 6.4. Bemærk, at et lyssignal, der udsendes til tiden $t = c/g$ fra $x = 0$ vil følge asymptoten og dermed aldrig nå partiklen. Asymptoten kaldes det accelererede systems *begivenheds-horisont*, idet en iagttagere i det accelererede system ikke vil kunne modtage information om begivenheder, der sker i $x = 0$ til tider $t \geq c/g$.

Vi kan finde et udtryk for γ -funktionen ved at dividere (6.53) med (6.54), altså

$$\gamma = \sqrt{1 + (gt/c)^2} = 1 + gx/c^2, \quad (6.58)$$

hvor den sidste omskrivning følger af (6.55). Partiklens energi

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + mgx \quad (6.59)$$

vokser dermed lineært med den tilbagelagte vejlængde akkurat som i det klassiske tilfælde. Dette er selvfølgelig konsistent med (6.41).

Vi kan nu benytte (3.4) til at finde egentiden i det bevægede system, altså tiden man ville aflæse på et *ideelt* ur, der følger med partiklen. Vi finder

$$\tau = \int_0^t \frac{d\theta}{\gamma} = \int_0^t \frac{d\theta}{\sqrt{1 + (g\theta/c)^2}},$$

som kan vises at medføre, at

$$\tau = \frac{c}{g} \ln \left[\frac{gt}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c} \right)^2} \right]. \quad (6.60)$$

Egentiden vokser altså logaritmisk for $t \rightarrow \infty$.

6.11.3 Eksempel: Muon-acceleratoren

Det har været foreslået at konstruere en accelerator, hvor en stråle af positive muoner (μ^+) bringes til at kollideres med en stråle af negative muoner (μ^-), på tilsvarende vis som i Afsnit 6.7.1, hvor vi betragtede sammenstød mellem elektroner og positroner. Man støder imidlertid her ind i det problem, at muoner har en levetid på kun $\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6}$ s. Lad os antage, at man ønsker at accelerere muonerne op til en energi på 200 GeV. Idet muon-massen er $m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$, vil de her have en γ -faktor på ~ 1900 , og muonernes laboratorie-levetid er da 4.2×10^{-3} s, hvilket anses som tilstrækkelig til at bringe dem til kollision. Imidlertid kan man frygte, at man ikke kan accelerere muonerne op tilstrækkelig hurtigt, således at en stor del af dem vil henfalde, før de når den tiltænkte energi. Vi vil nu betragte accelerationsprocessen, som foregår ved hjælp af en kraftig elektromagnetisk bølge. Bølgen arrangeres således at muonerne til stadighed befinder sig på bølgefronten, hvor de vil opleve et tilnærmelsesvis homogent elektrisk felt.

Vi betragter nu en muon i et homogent elektrisk felt med styrken $E = 20 \text{ MV/m}$. Muonen antages at starte i hvile, og da den skal opnå en energi på 200 GeV, må accelerationen foregå over en strækning med længden $x = 10 \text{ km}$. Muonens egen-acceleration er

$$g = \frac{Eq}{m_\mu} = \frac{(20 \text{ MV/m})(1e)}{106 \text{ MeV}/c^2} = \frac{20 \text{ MeV/m}}{106 \text{ MeV}} (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 1.7 \times 10^{16} \text{ m/s}^2.$$

Vi har her benyttet definitionen på energi-enheden elektronvolt, og i denne forbindelse, at muonen har samme ladning e som elektronen. Af (6.56) kan vi nu ved indsættelse bestemme værdien af den dimensionsløse størrelse,

$$\frac{gt}{c} = 187.$$

Heraf følger umiddelbart, at tiden t for accelerationsprocessen i laboratoriesystemet er

$$t = (c/g) 187 = 3.3 \times 10^{-6} \text{ s}.$$

Ved anvendelse af (6.60) finder vi nu egentiden for processen, altså

$$\tau = (c/g) \ln[187 + 187] = 1.0 \times 10^{-7} \text{ s}.$$

Vi ser, at egentiden tilsvarende 4.6% af muonens levetid, og muonstrålens intensitet vil da kun aftage med 4.5% ved accelerationsprocessen.

Opgaver 6

- 6.1 Hvor hurtig skal en partikel bevæge sig for at dens kinetiske energi er lig dens hvileenergi?
- 6.2 Hvor hurtig skal en 1 kg tung kanonkugle bevæge sig for at have samme kinetiske energi som en proton fra den kosmiske stråling, som bevæger sig med en γ -faktor på 10^{11} .

- 6.3** Et legeme vejer 3 kg og bevæger sig 8 m langs x -aksen i den tid det tager lyset at bevæge sig 10 m. Beregn legemets energi, impuls, og kinetiske energi. Udtryk gerne resultaterne i kg, idet vi f.eks. siger at hvileenergien er $E_0/c^2 = 3$ kg. Hvilken kinetisk energi ville Newton have forudsagt for dette legeme?
- 6.4** I hvert af de følgende tilfælde, opskriv 4-impulsen $\mathbf{P} = (E/c, p_x, p_y, p_z)$ i det givne koordinatsystem. Alle partikler har massen m .
- (a) En partikel bevæger sig i laboratoriet i den positive x -aksens retning med en kinetisk energi der er lig med tre gange dens hvileenergi.
 - (b) Den samme partikel observeres fra en raket, fra hvilken dens kinetiske energi er lig dens hvileenergi.
 - (c) En anden partikel bevæger sig i y -aksens retning i laboratoriet med en impuls det er to gange dens hvileenergi divideret med c .
 - (d) En tredje partikel bevæger sig i den negative x -retning i laboratoriet med total-energi lig med fire gange dens hvileenergi.
 - (e) En sidste partikel bevæger sig med lige store impulskomponenter i x -, y - og z -retningen i laboratoriet og med en kinetisk energi der er lig med fire gange hvileenergien.
- 6.5** To planeter A og B antages at være i hvile i forhold til hinanden i et inertialsystem. En iagttager på A finder, at et lyssignal afsendt fra B til tiden t_1 ankommer til A til tiden t_2 . Begge tidspunkter er målt i planeternes hvilesystem.
- Et rumskib R med massen m bevæger sig med jævn hastighed langs den rette linje, der forbinder de to planeter. En iagttager om bord i rumskibet finder, at afstanden mellem A og B er L målt i rumskibets hvilesystem.
- Bestem et udtryk for rumskibets hastighed v og dets kinetiske energi T i forhold til planeternes hvilesystem.
- 6.6** En pion ($m_\pi = 273m_e$), som ligger i hvile, henfalder til en muon ($m_\mu = 207m_e$) og en neutrino ($m_\nu = 0$). Find den kinetiske energi og impulsen af muonen og neutrinoen, idet elektronmassen er $m_e = 0.511$ MeV.
- 6.7** Et atom er anslået til et energiniveau, der ligger ΔE over grundtilstanden. Det anslåede atom henfalder i hvile til grundtilstanden under udsendelse af en foton. Find fotonens energi, idet atomets rekyl tages med i betragtning.
- 6.8** En partikel med massen m , som bevæger sig med hastigheden $v/c = 4/5$, støder uelastisk sammen med en tilsvarende partikel i hvile. Bestem hastigheden og massen af den sammensatte partikel.
- 6.9** En π^0 -meson med massen $m = 135$ MeV/ c^2 bevæger sig med jævn hastighed langs laboratoriesystemets x -akse og har en kinetisk energi på 1000 MeV. π^0 -mesonen er ustabil og henfalder til to γ -kvanter (fotoner). Henfaldet foregår således, at den ene foton bevæger sig langs den positive y' -aksen i π^0 -mesonens hvilesystem. Laboratoriesystemet og π^0 -systemet bevæger sig på sædvanlig måde i forhold til hinanden.

- Find størrelsen af π^0 -mesonens hastighed og impuls i laboratoriesystemet.
- Find den anden fotonens retning i π^0 -systemet.
- Find vinklen mellem de to γ -kvanter bevægelsesretninger i laboratoriesystemet.

6.10 Et proton-antiproton-par kan produceres ved sammenstød mellem en foton og en hvilende proton

$$\gamma + p \rightarrow p + (p + \bar{p}).$$

Bestem fotonens minimum-energi udtrykt ved protonens hvileenergi, mc^2 , for at processen kan foregå. Sammenlign resultatet med tærskelenergien i proton-proton-sammenstød.

6.11 Foton-raketten

En foton-raket benytter elektromagnetisk stråling som drivkraft. Raketten er i hvile i begyndelsestilstanden, hvor den har massen M_I . Den udsender nu fotoner i én retning, hvorved den selv opnår hastigheden U i den modsatte retning. Dens masse er da M_F . Opskriv 4-impulsen af raketten og de udsendte fotoner i begyndelses- og sluttilstanden og udled, sammenhængen

$$\frac{M_F}{M_I} = \sqrt{\frac{c - U}{c + U}}.$$

6.12 Den relativistiske raket

En raket accelererer fra hvile langs en ret linje og opnår derved hastigheden u . Accelerationen foregår ved, at en gas udsendes med den konstante hastighed V_G i forhold til raketten. Det antages, at der ingen ydre kræfter virker på raketten.

Vis, ved at benytte impulsbevarelse, energibevarelse og udtrykket for sammensætning af parallelle hastigheder, at sammenhængen mellem rakettenes øjeblikkelige masse, m , og hastighed, u , er bestemt ved differentialligningen

$$m \frac{du}{dm} + V_G \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = 0.$$

Vis, at forholdet mellem rakettenes masse i slutttilstanden, M_F , og i begyndelsestilstanden, M_I , er givet ved sammenhængen

$$\frac{M_F}{M_I} = \left(\frac{c - U}{c + U} \right)^{c/2V_G},$$

hvor U er rakettenes hastighed i slutttilstanden. Bemærk, at dette reducerer til udtrykket for foton-raketten, når vi sætter $V_G = c$.

Vis, at for $c \rightarrow \infty$ går dette udtryk over i det klassiske resultat

$$\frac{M_F}{M_I} = e^{-U/V_G}.$$

- 6.13** Vis at en foton ikke spontant kan henfalde til et elektron-positron-par. [*Hint*: benyt 4-impuls-bevarelse.] I det elektriske felt fra en stationær kerne kan processen imidlertid forløbe. Beregn tærskelenergien for processen, idet massen af kernen er M og af elektronen (og positronen) er m .
- 6.14** Jordens atmosfære bombarderes af kosmisk stråling, som hovedsagelig består af protoner. Disse protoner dækker et bredt energispektrum, som fra målinger synes at strække sig op over 10^{20} eV. Disse såkaldte UHECR (*ultra high energy cosmic rays*) udgør et teoretisk problem, idet man ikke kan forklare, hvordan de kan udbrede sig over lange afstande gennem rummet. Problemet er, at protonerne forventes at vekselvirke med den såkaldte kosmiske baggrundsstråling, som består af mikrobølger med en temperatur på 2.7 K.

Beregn protonens tærskelenergi for reaktionen $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$, idet $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$, $m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}/c^2$ og baggrundsstrålingens temperatur tilsvarende en fotonenergi på $E_\gamma = 233 \text{ } \mu\text{eV}$.

Appendiks A

Invariant? Bevaret? Konstant?

Er lyshastigheden en konstant? Er den en invariant? Er massen bevaret i sammenstød? Er den en invariant? Eller en konstant? Eller måske begge dele? Mange begreber fra hverdagssproget er overtaget af videnskaben og anvendes i sammenhænge, der går langt ud over hverdagen. De tre adjektiver *invariant*, *bevaret* og *konstant* har præcise meninger i relativitetsteorien.

Invariant: I relativitetsteorien er en størrelse invariant, hvis den har den samme værdi, når den måles i forskellige inertialsystemer. Den første blandt de relativistiske invariante er lyshastigheden: Den har samme værdi i ethvert inertialsystem. En anden vigtig invariant er normen af 4-intervallet mellem to begivenheder: Iagttagere i ethvert inertialsystem er enige om størrelsen af denne norm, og dermed egentiden eller egenafstanden. En tredje vigtig invariant er massen af en partikel. Der findes mange andre invariante, hver med sin anvendelighed.

En del vigtige størrelser kvalificerer sig ikke som invariante. Tiden mellem to begivenheder er ikke en invariant. Den er forskellig for to iagttagere i indbyrdes bevægelse. Heller ikke afstanden mellem to begivenheder er en invariant. Også den er forskellig fra det ene inertialsystem til det andet. Ligeledes er en partikels energi og impuls ikke invariante.

Bevaret: En størrelse er bevaret, hvis den har samme værdi før og efter en eller anden hændelse, eller hvis den er uforandret under en vekselvirkning. Den totale 4-impuls af et isoleret system af partikler er bevaret ved en indbyrdes vekselvirkning mellem partiklerne. I et givet inertialsystem betyder dette, at den totale energi er bevaret. Det samme gælder for hver komponent af den totale impuls. Kvadratet på systemets 4-impuls, og dermed systemets masse, er også bevaret ved en sådan vekselvirkning. Derimod er summen af de særskilte masser af systemets partikler i almindelighed ikke bevaret ved en vekselvirkning.

Konstant: En størrelse, der er konstant, ændrer sig ikke med tiden. Hastigheden af Rundetårn målt af en iagttagere på Niels Bohr Institutet er konstant, nemlig nul. Rundetårns hastighed målt på denne måde er således konstant, men ikke invariant: målt fra en passerende raket bevæger Rundetårn sig med en svimlende hastighed! Er Rundetårns hastighed bevaret? Bevaret i forhold til hvilken hændelse? Der gives intet *før*

eller *efter* til hvilket udtrykket “bevaret” her kan referere. Udtrykket “bevaret” kan simpelthen ikke anvendes om Rundetårns hastighed.

Det er sandt at lyshastigheden i vakuum er konstant; den forandrer sig ikke med tiden. Det er også sandt, men en hel igennem anden udtalelse, at lyshastigheden er invariant; altså at den har samme værdi for forskellige iagttagere i indbyrdes jævn, retlinet bevægelse. Det er sandt at den totale 4-impuls for et isoleret system er konstant; den forandrer sig ikke med tiden. Det er ligeledes sandt, men en hel igennem anden udtalelse, at den totale 4-impuls af et isoleret system er bevaret ved en stødproces eller ved en vekselvirkning mellem systemets partikler.

Når man hører ordene *invariant*, *bevaret* eller *konstant* gør man klog i at lytte godt efter det tilhørende *med hensyn til*, som altid skulle udtrykkes eller være indforstået. *Konstant* betyder sædvanligvis (men ikke altid) *med hensyn til* tiden. *Bevaret* betyder sædvanligvis (men ikke altid) *med hensyn til* en stødproces eller en vekselvirkning. *Invariant* kan have mindst lige så mange betydninger, som der findes geometrier til beskrivelse af Naturen: I den Euklidiske geometri er afstanden mellem to punkter invariant *med hensyn til* koordinatsystemer, som er roterede i forhold til hinanden. I 4-rummet er egentiden og massen invariante *med hensyn til* inertialsystemer i indbyrdes bevægelse. Den fulde betydning af ordene *invariant*, *bevaret* og *konstant* afhænger således i almindelighed af omstændighederne under hvilken begreberne anvendes.

Appendiks B

Rækkeudvikling i relativitetsteorien

I relativitetsteorien har man igen og igen behov for at estimere værdien af γ -funktionen

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (\text{B.1})$$

i den ikke-relativistiske grænse, hvor $v \ll c$. Dette gøres ved rækkeudvikling.

Det første vi bemærker er, at γ er en funktion af v^2/c^2 og derfor er af formen

$$f(\epsilon) = (1 - \epsilon)^a, \quad (\text{B.2})$$

hvor $a = -\frac{1}{2}$. For små værdier af ϵ vælger vi at rækkeudvikle til første orden omkring $\epsilon = 0$, således at

$$f(\epsilon) \simeq f(0) + \epsilon \left. \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \quad (\text{B.3})$$

Ved at følge normale differentiationsregler får vi

$$\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} = -a(1 - \epsilon)^{a-1}, \quad (\text{B.4})$$

hvoraf

$$\left. \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = -a. \quad (\text{B.5})$$

Vi indsætter nu i (B.3) og har dermed vist sammenhængen

$$(1 - \epsilon)^a \simeq 1 - a\epsilon. \quad (\text{B.6})$$

Anvender vi nu dette på γ -funktionen, finder vi

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}. \quad (\text{B.7})$$

Indeks

- γ -funktionen, 23
 - transformation af, 45
- 3-vektor, 64–66
- 4-acceleration, 71–73
- 4-hastighed, 70–71
- 4-impuls, 75–76, 79
 - bevarelse af, 76, 81
- 4-kraft, 91–92
- 4-vektor, 67–69
- aberration, 54–56
 - klassisk, 56
 - relativistisk, 56
- acceleration, 4, 71–73
 - transformation af, 72
- accelerator, 87
- begivenhed, 3, 61
- bevægelsesligning, 93
- bindingsenergi, 89
- brintatom, 89
- Compton-spredning, 84
- cyklotron, 93
- deuteron, 90
- Doppler-effekt, 48–53, 83
 - klassisk, 48
 - relativistisk, 50
 - transversal, 52
- egen-acceleration, 33, 35, 72, 94
- egentid, 18, 40, 63, 69, 95
- elektrisk felt, 93
- elektromagnetisk kraft, 93
- elektromagnetisme, 5
- elektron-positron-sammenstød, 86
- elektronvolt, 87
- emissionsteorien, 6
- energi
 - hvile, 79
 - kinetisk, 79
 - sammenhæng med impuls, 82
 - total, 79
- Feynman-ur, 40
- fortid, kausal, 64
- foton, 83
- fremtid, kausal, 64
- Galilei-transformation, 3–4
- hastighed
 - Galilei-transformation, 4
 - Lorentz-transformation, 44–46
- hvileenergi, 79
- hvilelængde, 17, 36
- hvilemasse, 78
- hyperbolsk bevægelse, 33, 93–96
- ideelt ur, 40
- impuls
 - bevarelse af, 76
 - relativistisk, 76
 - sammenhæng med energi, 82
- inertialsystem, 1–2
- interferometer, 8–9
- interval, 26, 62
- invariant masse, 85
- kausalitet, 27, 64
- kernereaktion, 90
- koordinat-gitter, 19
- kosmisk stråling, 43
- kraft, 5, 91–94
 - transformationsregler for, 92
- Lorentz-faktor, 23

- Lorentz-kraft, 93
- Lorentz-transformation, 23
 - differensform, 25
 - differentialform, 25
 - grafisk repræsentation af, 29–34
 - udledning af, 20–23
- lysets hastighed, 6, 12–19
- lyskegle, 29, 62
- længde, 17
- længdeforkortning, 36, 40
- magnetfelt, 93
- masse, 2, 4, 75, 79
 - bevarelse af, 76, 78
- masseløse partikler, 83
- mekanik
 - klassisk, 1–5
 - relativistisk, 74–96
- meter, 19
- Michelson-Morley-forsøget, 7–11
- neutrino, 90
- neutron
 - henfald af, 91
- Newtons love, 1–2
- overlyshastighed, 27–28
- partikelhenfald, 43
- partikelsammenstød, 76–77, 86, 87
- reaktionsenergi, 90
- referencesystem, 2
- relativistisk hastighedsgrænse, 26
- relativitetsprincip
 - klassisk, 4–5
 - speciel, 12–13
- retning af bevægelse, 46
- rumtid, 28–34, 61–69
- rumtidsdiagram, 28–34, 62–64, 86
- samtidig, 15, 24
- sekund, 19
- signal, 27
- solens energiproduktion, 90
- standardkonfiguration, 3
- stjerners energiproduktion, 90
- tidsforlængelse, 38–43
- tvillingeparadoks, 41–42
- tyngdekraft, 75
- tyngdepunktssystem, 85
- tærskelenergi, 87
- vandrelængde, 36
- varighed, 18
- verdenslinie, 29, 62
- verdenspunkt, 29
- vinkel, transformation af, 37
- æter, 5–11