

## Eksamen i Matematik F2, 18. juni 2019

Eksamenssættet indeholder 8 opgaver (som vægtes lige). Bøger og noter er tilladte hjælpemidler. Lommeregner, computere og andre elektroniske hjælpemidler er IKKE tilladte. Ved besvarelsen lægges der vægt på, at det klart fremgår, hvorledes resultater opnås, men stringente matematiske beviser vil ikke være nødvendige. Opgaverne kan besvares med kuglepen og/eller blyant. **BEMÆRK AT SÆTTET FORTSÆTTER PÅ BAGSIDEN.**

### Opgave 1

Skriv følgende to funktioner på formen  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , hvor  $u(x, y)$  er realdelen og  $v(x, y)$  er imaginærdelen,

a)  $f(z) = z^2 + z$

b)  $f(z) = i^z$

Vi angiver som sædvanlig de komplekse tal på formen  $z = x + iy$ , hvor  $x$  og  $y$  er reelle.

### Opgave 2

Bestem konvergensradiussen for den uendelige række:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n z^n}{(2n)^n}$$

### Opgave 3

Find Laurent-rækkerne omkring punkterne  $z_0$  for funktionerne

a)

$$f(z) = \frac{\sin(z-2)}{z-2}, \quad \text{hvor } z_0 = 2$$

b)

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)e^z}, \quad \text{hvor } z_0 = 2$$

c)

$$f(z) = z \cos\left(\frac{1}{z+2}\right), \quad \text{hvor } z_0 = -2$$

#### Opgave 4

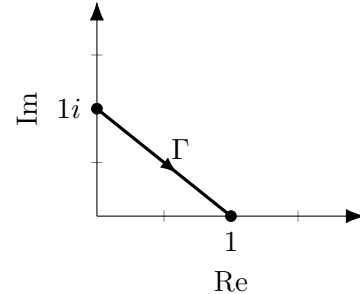
Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{10 + 6 \cos \theta} d\theta$$

#### Opgave 5

Udregn værdien af følgende integrale, hvor integrationsvejen  $\Gamma$  består af et liniesegment pegende fra punktet  $z = i$  til  $z = 1$  (se figuren),

$$\int_{\Gamma} z^2 dz$$



#### Opgave 6

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at udregne integralet (langs den reelle akse)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x + 3i)(x - 2i)^3} dx$$

Husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver.

#### Opgave 7

Benyt Laplace-transformationen til at løse følgende system af differentialligninger for  $x(t)$  og  $y(t)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -a^2 x(t) + \sin t \end{aligned}$$

med startbetingelserne  $x(0) = 0$  og  $y(0) = 0$ . Det kan også antages at  $a$  er forskellig fra  $\pm 1$ .

#### Opgave 8

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at udregne integralet (langs den reelle akse)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x + 1)(x + 4)} dx$$

Angiv en passende integrationsvej og husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver.