Opgave 1

Skriv følgende to funktioner på formen $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, hvor $u(x, y)$ er realdelen og $v(x, y)$ er imaginærdelen,

a) $f(z) = z^2 + z$

b) $f(z) = i^z$

Vi angiver som sædvanlig de komplekse tal på formen $z = x + iy$, hvor x og y er reelle.

svar:

a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ og $v(x, y) = 2xy + y$

b) $u(x, y) = e^{-\pi/2y} \cos(\pi x/2)$ og $v(x, y) = e^{-\pi/2y} \sin(\pi x/2)$

Opgave 2

Bestem konvergensradiussen for den uendelige række:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n z^n}{(2n)^n}$$

svar:

Benytter kvotienttesten og ser

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^n}{(2n)^n} \right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2n} = 0$$

Dvs., $R = \infty$.

Opgave 3

Find Laurent-rækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a)

$$f(z) = \frac{\sin(z-2)}{z-2}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 0$$

b)

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)e^z}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 2$$

c)

$$f(z) = z \cos\left(\frac{1}{z+2} \right), \quad \text{hvor} \quad z_0 = -2$$

svar:

a)

$$\frac{\sin(z-2)}{z-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-2)^{2k}}{(2k+1)!}$$

b)

$$\frac{1}{(z-2)e^z} = \frac{e^{-2}e^{2-z}}{(z-2)} = e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-2)^{k-1}}{k!}$$

c)

$$z \cos\left(\frac{1}{z+2}\right) = (-2 + (z+2)) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \frac{(-1)^k}{(z+2)^{2k}}$$

Opgave 4

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{10 + 6\cos\theta} \, \mathrm{d}\theta$$

svar:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{3}{10+6\cos\theta} \, \mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} \frac{3}{10+3z+3/z} \, \frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + \frac{10}{3}z + 1} \, \mathrm{d}z$$

Det følger heraf, at

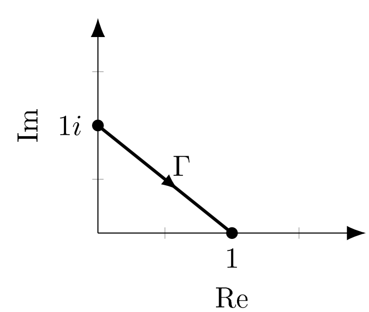
$$I = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z+\frac{1}{3})(z+3)} \, \mathrm{d}z = 2\pi i Res(z=-1/3) = \frac{3\pi}{4}$$

Da $z = -3$ ligger uden for integrationsvejen er det kun residuet i $z = -1/3$, som bidrager til integralet.

Opgave 5

Udregn værdien af følgende integrale, hvor integrationsvejen Γ består af et liniesegment pegende fra punktet $z = i$ til $z = 1$ (se figuren),

$$\int_\Gamma z^2 dz$$



svar:

Vi ser, at på integrationsvejen er $z = t + i(1-t)$, og foretager den tilhørende substitution ($dz = (1-i)dt$)

$$\int_\Gamma z^2 dz = \int_0^1 (t + i(1-t))^2 (1-i)dt = (1-i)\int_0^1 \Big(2it(1-t) + 2t - 1\Big)dt = \frac{1+i}{3}$$

Opgave 6

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at udregne integralet (langs den reelle akse)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+3i)(x-2i)^3}\mathrm{dx}$$

Husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver.

svar:

Ser direkte, at der er en simpel pol i $z = -3i$, og en pol af 3. orden i $z = 2i$, vælger derfor at lukke integrationsvejen i nedre halvplan (bemærk at fortegnet derved skal ændres)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+3i)(x-2i)^3}\mathrm{dx} = -2\pi i Res(-3i) = -\frac{2\pi}{125}$$

Opgave 7

Benyt Laplace-transformationen til at løse følgende system af differentialligninger for $x(t)$ og $y(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= y(t) \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} &= -a^2 x(t) + \sin t \end{aligned}$$

med startbetingelserne $x(0) = 0$ og $y(0) = 0$.

svar:

Efter at have benyttet Laplace-transformationen fås

$$\begin{aligned} s\hat{x} - \hat{y} &= 0 \\ s\hat{y} + a^2\hat{x} &= \frac{1}{1+s^2} \end{aligned}$$

Kombineres de to ligninger, får vi at

$$\hat{x} = \frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+1)}$$

Anvendes den inverse laplacetransformation på dette udtryk fås

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \frac{e^{st}}{(s+ia)(s-ia)(s+i)(s-i)} ds$$

Vælges $\lambda > Re(a)$ og udregnes residuet for de fire simple poler fås

$$x(t) = \frac{a\sin(t) - \sin(at)}{a(a^2-1)}$$

og

$$y(t) = \dot{x} = \frac{a\cos(t) - a\cos(at)}{a(a^2-1)}$$

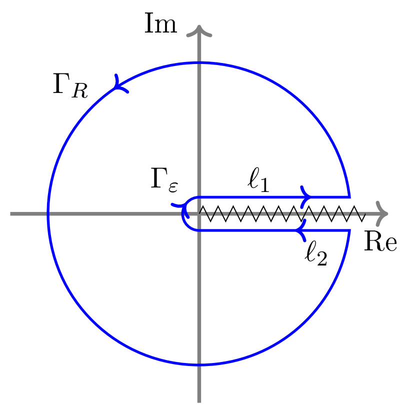
Opgave 8

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at udregne integralet (langs den reelle akse)

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+1)(x+4)}\ \mathrm{d}x$$

Angiv en passende integrationsvej og husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver.

svar:



For at bruge Cauchys sætning indfører vi ekstra integrationsveje som hjælp til at udregne integralet, en langs den nedre side af opskæringslinien ℓ_2, en langs en cirkel i uendelig Γ_R og en langs en lille halvcirkel omkring venstre side af origo Γ_ϵ.

Vi ser at integrationen langs den ydre cirkel ikke bidrager til integralet idet

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \leq 2\pi R \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)| \overset{R\to\infty}{\to} 0.$$

Vi har her brugt, at (for alle z på Γ_R)

$$|zf(z)| \overset{R\gg 1}{\approx} R(R^{1/2}/R^2) = R^{-1/2} \quad \overset{R\to\infty}{\to} \quad 0$$

og at nævneren i integranden for store radier er: $1 + R^2 \approx R^2$.

Sagt i ord, så er integralet mindre end eller lig med maksimumsværdien af integranden langs integrationsvejen ganget med længden af integrationsvejen, som er $2\pi R$. Da maksimumsværdien går hurtigere mod nul end længden af integrationsvejen vil integralet være nul. På lignende vis, ser vi nu, at bidraget fra Γ_ϵ er nul når radius, ϵ, går mod nul,

$$\left|\int_{\Gamma_\epsilon} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \le \pi\epsilon \max_{z\in\Gamma_\epsilon} |f(z)| \overset{\epsilon\to 0}{\to} 0$$

idet (for alle z på Γ_ϵ)

$$|zf(z)| \overset{\epsilon\ll 1}{\approx} \epsilon(\epsilon^{1/2}) = \epsilon^{3/2} \quad \overset{\epsilon\to 0}{\to} \quad 0$$

Vi har her benyttet, at nævneren i integranden for små radier: $1+\epsilon^2 \approx 1$.

I grænserne for hhv. store og små radier på de cirkulære veje kan vi se bort fra Γ_ϵ og Γ_R, og derfor får vi, at

$$\oint_{\ell_1+\Gamma_R+\ell_2+\Gamma_\varepsilon} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\ell_1+\ell_2} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i\Big(Res(-1) + Res(-4)\Big)$$

Integralet langs ℓ_2 svarer til at integrere x fra uendelig til nul, men bemærk, at vi ikke kan krydse opskæringslinien, og derfor vil x langs ℓ_2 antage værdien $e^{2\pi i}x$, som indsættes i integranden, og vi får derved

$$\int_{\ell_1+\ell_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{(x+1)(x+4)}\ \mathrm{d}x + \int_\infty^0 \frac{(xe^{2\pi i})^{1/2}}{(x+1)(x+4)}\ \mathrm{d}x = 2\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{(x+1)(x+4)}\ \mathrm{d}x$$

Det skal nu være lig summen af residuerne

$$2\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{(x+1)(x+4)}\ \mathrm{d}x = 2\pi i\left(\frac{i}{3} - \frac{2i}{3}\right) = 2\pi/3$$

Vi får nu

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{(x+1)(x+4)}\ \mathrm{d}x = \pi/3$$