

# Eksamen i Matematik F2 d. 23. juni 2011

Eksamenssættet indeholder 10 opgaver (som vægtes lige). Bøger, noter, lommeregnere og computere er tilladte hjælpemidler og besvarelsen kan skrives med blyant, kuglepen eller andre skriveredskaber, blot det er læseligt. Ved besvarelsen lægges der vægt på, at det klart fremgår, hvorledes resultater opnås, men stringente matematiske beviser vil ikke være nødvendige. En besvarelse som "lommeregneren giver" kan være korrekt, men vil ikke tillægges stor vægt.

## Opgave 1

Bestem om en funktion  $f(z)$  af  $z = x + iy$  er analytisk, hvis den har en real del  $u(x, y)$  og en imaginær del  $v(x, y)$  givet ved

a)  $u(x, y) = x$  og  $v(x, y) = -y$

b)  $u(x, y) = 3x(x - 1) - 3y^2$  og  $v(x, y) = y(6x - 3)$

## Opgave 2

Find eksplicitte udtryk for alle de komplekse tal  $z$  som opfylder følgende ligninger

a)  $e^z = 3i$

b)  $\cosh z = 0$

## Opgave 3

Find alle residuer af følgende udtryk

$$\frac{1}{z^2(z - 5)}$$

## Opgave 4

Beregn integralet

$$\oint \frac{\sin z}{z - i} dz$$

for følgende veje:

1) en cirkel med radius 2 og centrum i  $z = 0$ .

2) en cirkel med radius 2 og centrum i  $z = 2$ .

## Opgave 5

Beregn integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

## Opgave 6

Beregn integralet

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) d\theta$$

## Opgave 7

Find rækkeudviklingen af funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(2-z)}$$

for  $1 < |z| < 2$ .

## Opgave 8

Vis at funktionen

$$f(z) = \frac{z}{1-z}$$

afbilder enhedscirklen  $|z| = 1$  (bortset fra punktet  $z = 1$ ) over på en linie i den komplekse plan.

## Opgave 9

Benyt Laplacetransformationen til at løse følgende ligning

$$u''(t) + u'(t) - 6u(t) = 0,$$

når  $u'(0) = 1$  og  $u(0) = 0$ .

## Opgave 10

Vis at følgende integrale har den angivne værdi

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos \theta)^2} d\theta = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}},$$

når det antages, at  $a > b > 0$ .