Eksamen i Matematik F2 d. 23. juni 2011

Løsninger/skitser til besvarelse af opgaverne (med forbehold for tastefejl).

Opgave 1

Bestem om en funktion f(z) af $z = x + iy$ er analytisk, hvis den har en real del $u(x, y)$ og en imaginær del $v(x, y)$ givet ved

a) $u(x, y) = x$ og $v(x, y) = -y$

b) $u(x, y) = 3x(x - 1) - 3y^2$ og $v(x, y) = y(6x - 3)$

Svar:

Benytter Caucy-Riemann og ser

a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1$, dvs. ikke-analytisk.

b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x - 3 = \frac{\partial v}{\partial y}$ og $\frac{\partial u}{\partial y} = -6y = -\frac{\partial v}{\partial x}$, dvs. analytisk.

Opgave 2

Find eksplicitte udtryk for alle de komplekse tal z som opfylder følgende ligninger

a) $e^z = 3i$

b) $\cosh z = 0$

Svar:

a) $z = \mathrm{Log}(3) + i\pi(2n + 1/2)$

b) $z = i\pi(1/2 + n)$

Opgave 3

Find alle residuer af følgende udtryk

$$\frac{1}{z^2(z-5)}$$

Svar:

Singulariteter findes i $z = 0$ og $z = 5$. Man finder at $Res(z = 5) = 1/25$ og $Res(z = 0)$ findes fra rækkeudviklingen omkring $z = 0$

$$\frac{1}{z^2(z-5)} = \frac{1}{-5z^2(1-z/5)} = \frac{1}{-5z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^k$$

dvs. $Res(z = 0) = -1/25$

Opgave 4

Beregn integralet

$$\oint \frac{\sin z}{z-i}\, \mathrm{d}z$$

for følgende veje:

1) en cirkel med radius 2 og centrum i $z = 0$.

2) en cirkel med radius 2 og centrum i $z = 2$.

Svar:

Integranden har en simpel pol i $z = i$ og et tilsvarende residue med værdi $(e^{-1} - e)/(2i)$

a) $\pi(e^{-1} - e)$

b) 0

Opgave 5

Beregn integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x$$

Svar:

Nævneren af integranden kan skrives på formen $(z - 2i)(z + 2i)$, dvs. der er en simpel pol i den øvre halvplan i $z = 2i$ og integralet har derfor værdien $\pi/2$.

Opgave 6

Beregn integralet

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

Svar:

Skrives de trigonometriske funktioner ved hjælp af de komplekse exponentialfunktioner f.eks. $\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i)$ og omformuleres integralet til et komplekst integrale langs enhedscirklen, så løses integralet ved at finde evt. residuer. Der fines et residue som har værdien $1/(8i)$ og derfor er integralet lig med $\pi/4$

Opgave 7

Find rækkeudviklingen af funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(2-z)}$$

for $1 < |z| < 2$.

Svar:

Første udtryk rækkedudvikles for værdier af $z > 1$ (har en singularitet i $z = 1$) og det andet udtryk rækkeudvikles for $z < 2$ (har en singularitet i $z = 2$), dvs.

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k$$

Opgave 8

Vis at funktionen

$$f(z) = \frac{z}{1-z}$$

afbilder enhedscirklen $|z| = 1$ (bortset fra punktet $z = 1$) over på en linie i den komplekse plan.

Svar:

Det kan vises at $Re(f(e^{i\theta})) = -1/2$ og at $Im(f(e^{i\theta}))$ antager værdier mellem $-\infty$ og ∞, hvilket netop svarer til en linie.

Opgave 9

Benyt Laplacetransformationen til at løse følgende ligning

$$u''(t) + u'(t) - 6u(t) = 0,$$

når $u'(0) = 1$ og $u(0) = 0$.

Svar:

Ved at Laplacetransformere ligningen, får man følgende ligning i $\hat{u}(s) = \int_0^\infty u(t)\exp(-st)dt$,

$$\hat{u}(s) = \frac{1}{s^2 + s - 6}$$

Ved hjælp af inverse Laplacetransformation finder man for $t \geq 0$

$$u(t) = \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}$$

og $u(t) = 0$ for $t < 0$.

Opgave 10

Vis at følgende integrale har den angivne værdi

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b\cos\theta)^2} d\theta = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}},$$

når det antages, at $a > b > 0$.

Svar:

Integralet omskrives til et komplekst integrale på enhedscirklen og $\cos\theta = (z + 1/z)/2$ omskrives på kompleks form, dvs. integranden kan omskrives på formen:

$$\frac{1}{(a + b\cos\theta)^2} = \frac{1}{a^2\left(1 + \frac{b}{2a}(z + \frac{1}{z})\right)^2} = \frac{z^2}{a^2\left(z + \frac{b}{2a}(z^2 + 1)\right)^2} = \frac{4z^2}{b^2(z - \alpha)^2(z - \beta)^2}$$

hvor

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 - (b/a)^2}}{b/a} \qquad \beta = \frac{-1 - \sqrt{1 - (b/a)^2}}{b/a}$$

Man kan nu vise at $|\alpha\beta| = 1$ og at de er reelle pga. $a > b > 0$. Dvs. man har en singularitet for $z = \alpha$. Det tilsvarende residue kan så beregnes og integralet løses ved hjælp af residue-sætningen.