Eksamen i Matematik F2 d. 21. juni 2012

Eksamenssættet indeholder 9 opgaver (som vægtes lige). Bøger, noter, lommeregnere og computere er tilladte hjælpemidler og besvarelsen kan skrives med blyant, kuglepen eller andre skriveredskaber, blot det er læseligt. Ved besvarelsen lægges der vægt på, at det klart fremgår, hvorledes resultater opnås, men stringente matematiske beviser vil ikke være nødvendige. En besvarelse som "lommeregneren giver" kan være korrekt, men vil ikke tillægges stor vægt.

Opgave 1

Find og bestem typen af alle singulariteter for følgende funktioner:

a) $f(z) = \frac{z^3}{(z^2-3z)^5}$

b) $f(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

Angiv ordenen på eventueller poler eller om singulariteterne er essentielle.

Opgave 2

Find Laurantrækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a) $f(z) = (z-2)\sin\left(\frac{1}{z+3}\right), \quad \text{hvor} \quad z_0 = -3$

b) $f(z) = \frac{z}{(z-2)(z+3)}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 2$

Opgave 3

Beregn integralet

$$\oint \frac{1}{z^3(z-2)}\mathrm{dz}$$

langs en cirkel i den komplekse plan med radius $r = 4$ og centrum i $z = 0$.

Opgave 4

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos\theta + 2\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Opgave 5

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at finde den principale del (principal value) af integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \mathrm{dx}$$

Opgave 6

Find rækkeudviklingen af funktionen

$$f(z) = \frac{z^2}{1-z} + \frac{2}{(z-3)}$$

for følgende tre tilfælde

a) $|z| < 1$ **b)** $1 < |z| < 3$ **c)** $|z| > 3$

Opgave 7

Skriv funktionen $f(x) = x^3 + x^2$ defineret på intervallet $-1 \le x \le 1$ som en række af Legendrepolynomier, d.v.s. find koefficienterne a_ℓ i

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(x)$$

Opgave 8

Benyt Laplacetransformationen til at løse følgende ligning

$$\frac{du(t)}{dt} + \beta u(t) - \cos(\omega t) = 0,$$

når $u(0) = u_0$ og hvor β, ω og u_0 er konstanter. Du kan bruge direkte, at Laplacetransformationen af $\cos \omega t$ er $s/(s^2 + \omega^2)$.

Opgave 9

Find en konform afbildning $z = \phi(w)$ som afbilder mængden M af punkter $r \exp(i\theta)$, hvor $r > 0$ og $0 < \theta < \pi/3$, over på den øvre halvplan (Im $z > 0$). Benyt denne afbildning til at finde et potentiale u på M, som er nul langs kanten af M, dvs. langs den positive reelle akse og langs linien $r \exp(i\pi/3)$ for $r > 0$. Bemærk at et potentiale som sædvanlig opfylder Laplaceligningen og at det i den øvre halvplan kan skrives på formen $u(x, y) = ky$, hvor k er en konstant.