Besvarelse til eksamen i Matematik F2, 2012

Partiel besvarelse - har ikke inkluderet alle detaljer! Med forbehold for tastefejl.

Opgave 1

Find og bestem typen af alle singulariteter for følgende funktioner:

a) $f(z) = \frac{z^3}{(z^2-3z)^5}$

b) $f(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

Angiv ordenen på eventueller poler eller om singulariteterne er essentielle.

Svar:
a) pol af orden 2 for $z = 0$ og af orden 5 for $z = 3$. b) Ingen singulariteter i den endelige komplekse plan. Hævelig singularitet for $z = 0$.

Opgave 2

Find Laurantrækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a) $f(z) = (z-2)\sin\left(\frac{1}{z+3}\right), \quad \text{hvor} \quad z_0 = -3$

b) $f(z) = \frac{z}{(z-2)(z+3)}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 2$

Svar:

a)

$$\begin{aligned} f(z) &= \Big(-5+(z+3)\Big)\left(\frac{1}{z+3} - \frac{1}{3!(z+3)^3} + \frac{1}{5!(z+3)^5}\cdots\right) \\ &= \Big(-5+(z+3)\Big)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+3)^{2n+1}} \end{aligned}$$

b)

$$f(z) = \frac{1}{z-2}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-2)^n}{5^n}\right)$$

Opgave 3

Beregn integralet

$$\oint \frac{1}{z^3(z-2)}\mathrm{dz}$$

langs en cirkel i den komplekse plan med radius $r = 4$ og centrum i $z = 0$.

Svar:
Man ser at integralet har en pol af orden 3 i $z = 0$ og en simpel pol i $z = 2$. De tilsvarende residuer findes og er $Res_{z=2} = 1/8$ og for $z = 0$ findes residuet lettest ved en ekspansion

$$\frac{1}{z^3(z-2)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right),$$

hvoraf man kan aflæse $Res_{z=0} = -1/8$. Dvs.

$$\oint \frac{1}{z^3(z-2)}\mathrm{dz} = 2\pi i(1/8 - 1/8) = 0$$

Opgave 4

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos\theta + 2\sin\theta}\ \mathrm{d}\theta$$

Svar:
Man omskriver $\sin\theta = \frac{1}{2i}(z - 1/z)$ og $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ samt benytter at $d\theta = dz/(iz)$ og får derved følgende integrale over enhedscirklen

$$\frac{1}{i}\oint \frac{1}{(1-i)z^2 + 3z + 1 + i}\ \mathrm{d}z$$

Polynomiet i nævneren har rødderne $z_1 = -(1+i)$ og $z_2 = -(1+i)/2$. Kun den ene rod z_2 er inden for enhedscirklen og det tilsvarende residue er $-i$. Dvs. integralet antager værdien:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos\theta + 2\sin\theta}\ \mathrm{d}\theta = 2\pi i(-i) = 2\pi$$

Opgave 5

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at finde den principale del (principal value) af integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \mathrm{dx}$$

Svar:
Bemærk at integralet egentlig ikke har nogen singularitet for $x = 0$ og den principale del af integralet er derfor lig det sædvanlige uegentlige integrale. Men vi benytter alligevel omskrivningen $\sin(ax) = \mathrm{Im}(\exp(iax))$ og bemærker, at $\exp(iaz)/z$ nu har en simpel pol for $z = 0$. Vi finder for $a > 0$ ved en kontourintegration ud i den komplekse plan og uden om polen i $z = 0$, at

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iaz)}{z} \mathrm{dz} = i\pi$$

Bemærk at vi her benytter Jordans lemma. D.v.s.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \mathrm{dx} = \mathrm{Im}(i\pi) = \pi$$

Tilsvarende regnes integralet for $a < 0$.

Opgave 6

Find rækkeudviklingen af funktionen

$$f(z) = \frac{z^2}{1-z} + \frac{2}{(z-3)}$$

for følgende tre tilfælde

a) $|z| < 1$ **b)** $1 < |z| < 3$ **c)** $|z| > 3$

Svar:
Besvarelsen følger besvarelsen af den tilsvarende opgave i eksamenssættet for 2011. Vi får

a)

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n$$

b)

$$f(z) = -z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n$$

c)

$$f(z) = -z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n$$

Opgave 7

Skriv funktionen $f(x) = x^3 + x^2$ defineret på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ som en række af Legendrepolynomier, d.v.s. find koefficienterne a_ℓ i

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(x)$$

Svar: Ved inspektion ses at $x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x)$ og $x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x)$, dvs.

$$f(x) = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x)$$

Opgave 8

Benyt Laplacetransformationen til at løse følgende ligning

$$\frac{du(t)}{dt} + \beta u(t) - \cos(\omega t) = 0,$$

når $u(0) = u_0$ og hvor β, ω og u_0 er konstanter. Du kan bruge direkte, at Laplacetransformationen af $\cos \omega t$ er $s/(s^2 + \omega^2)$.

Svar:
Efter Laplacetransformationen fås:

$$\bar{u}(s) = \frac{u_0}{s + \beta} + \frac{s}{(s + \beta)(s^2 + \omega^2)}$$

Man tager du den inverse Laplacetransformation på begge led og får for første led, at

$$L^{-1} \frac{u_0}{s + \beta} = u_0 \exp(-\beta t)$$

For det næste led findes poler for $s = \pm i\omega$ og $s = -\beta$ og derved kommer man frem til udtrykket:

$$L^{-1}\frac{s}{(s+\beta)(s^2+\omega^2)} = \frac{-\beta}{\beta^2+\omega^2}\exp(-\beta t) + \frac{\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}$$

Dvs. den samlede løsning er

$$u(t) = u_0\exp(-\beta t) + \frac{-\beta}{\beta^2+\omega^2}\exp(-\beta t) + \frac{\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}$$

Opgave 9

Find en konform afbildning $z = \phi(w)$ som afbilder mængden M af punkter $r\exp(i\theta)$, hvor $r > 0$ og $0 < \theta < \pi/3$, over på den øvre halvplan (Im $z > 0$). Benyt denne afbildning til at finde et potentiale u på M, som er nul langs kanten af M, dvs. langs den positive reelle akse og langs linien $r\exp(i\pi/3)$ for $r > 0$. Bemærk at et potentiale som sædvanlig opfylder Laplaceligningen og at det i den øvre halvplan kan skrives på formen $u(x, y) = ky$, hvor k er en konstant.

Svar:
Den korrekte afbildning som afbilder det nævnte domæne over på den øvre halvplan er $\phi(\omega) = \omega^3$. Dette ses ved, at ϕ afbilder linien givet ved $\omega = r\exp(i\pi/3)$ for $r > 0$ over på

$$\phi(r\exp(i\pi/3)) = -r^3$$

og linien $\omega = r\exp(i\pi/3)$ over på

$$\phi(r) = r^3.$$

Det bemærkes, at alle punkter mellem de to linier også afbilder til den øvre halvplan (tjek om det passer). Det tilsvarende potentiale u på M er så givet ved

$$u = -k\text{Re}(iz) = -k\text{Re}(i\phi(\omega)) = -k\text{Re}(i\omega^3)$$

I polære koordinater antager potentialet formen:

$$u = -k\text{Re}(i\omega^3) = kr^3\sin 3\theta$$

Dette potentiale er nul for $\theta = 0$ og $\theta = \pi/3$, hvilket svarer til de to sider på domænet M.