Eksamen i Matematik F2 d. 20. juni 2013

Eksamenssættet indeholder 9 opgaver (som vægtes lige). Bøger, noter, lommeregnere og computere er tilladte hjælpemidler og besvarelsen kan skrives med blyant, kuglepen eller andre skriveredskaber, blot det er læseligt. Ved besvarelsen lægges der vægt på, at det klart fremgår, hvorledes resultater opnås, men stringente matematiske beviser vil ikke være nødvendige.

Opgave 1

Find og bestem typen af alle singulariteter for følgende funktioner:

a) $f(z) = \frac{z^2}{(2z^2-z)^7}$

b) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$

Angiv ordenen på eventueller poler eller om singulariteterne er essentielle.

Opgave 2

Find Laurantrækkerne for funktionerne

a) $f(z) = z^2 e^{(z+2)}$, omkring $z = 0$

b) $f(z) = \frac{\cos(z^2)-1}{z^3}$, omkring $z = 0$

Opgave 3

Beregn integralet

$$\oint \frac{1}{z^2(z-3)} \mathrm{dz}$$

langs en cirkel i den komplekse plan med radius $r = 2$ og centrum i $z = 0$.

Opgave 4

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\frac{5}{4}+\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

Opgave 5

Udtryk funktionen

$$f(\theta) = \sin^2(\theta)\cos(\theta)$$

ved hjælp af Legendre-polynomierne på formen $P_\ell(\cos\theta)$. Dvs. find koefficienterne a_ℓ i ekspansionen

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos\theta)$$

Opgave 6

Find rækkeudviklingen af funktionen

$$f(z) = \frac{\cos z}{z} + \frac{z^2}{(z-1)}$$

for følgende tilfælde

$$\text{a) } 0 < |z| < 1 \qquad \text{og} \qquad \text{b) } |z| > 1$$

Opgave 7

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at finde principalværdien (principal value) af integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x+i)(x^2+1)} \mathrm{dx}$$

Opgave 8

Vis at den konforme afbildning (for $\mathrm{Im}(w) > 0$)

$$z = \log(w)$$

afbilder den øvre halvplan $\mathrm{Im}(w) > 0$ over på en uendelig lang kanal beskrevet ved mængden M af punkter $M = \{z \mid 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$.

- Find nu et potentiale u på M, som er nul langs kanten af M, dvs. langs den positive reelle akse og langs linien $z = i\pi + r$ for $r \in \mathbb{R}$.
- Beregn også gradienten ved hjælp af det komplekse potentiale.

Bemærk at et potentiale som sædvanligt opfylder Laplace-ligningen $\nabla^2 u = 0$ og at det i den øvre halvplan kan skrives på formen $u(x, y) = ky$, hvor k er en konstant.

Opgave 9

Benyt Fourier-transformationen mht. variablen x og Laplace-transformationen mht. variablen t til at vise at løsningen til den partielle differentialligning

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + u(t,x) = 0,$$

er $u(t,x) = e^{-t} g(x-t)$, hvis $u(0,x) = g(x)$ og det antages at $u(t,x)$ går exponentielt hurtigt mod 0 for $|x| \to \infty$. (Hint: Benyt først begge transformationer og derefter de tilsvarende inverse transformationer).