Svar til eksamen i Matematik F2 d. 20. juni 2013

Partiel besvarelse med forbehold for fejl.

Opgave 1

Find og bestem typen af alle singulariteter for følgende funktioner:

a) $f(z) = \frac{z^2}{(2z^2-z)^7}$

b) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$

Angiv ordenen på eventueller poler eller om singulariteterne er essentielle.

Svar:

a) pol af orden 5 i $z = 0$ og pol af orden 7 i $z = 1/2$.

b) Essentielle singulariteter i $z = \pm i$.

Opgave 2

Find Laurantrækkerne for funktionerne

a) $f(z) = z^2 e^{(z+2)}, \quad \text{omkring} \quad z = 0$

b) $f(z) = \frac{\cos(z^2)-1}{z^3}, \quad \text{omkring} \quad z = 0$

Svar:

a) $f(z) = z^2 e^{(z+2)} = e^2 z^2 e^z = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k+2}$

b) $f(z) = \frac{\cos(z^2)-1}{z^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{4k-3}$

Opgave 3

Beregn integralet

$$\oint \frac{1}{z^2(z-3)} \mathrm{dz}$$

langs en cirkel i den komplekse plan med radius $r = 2$ og centrum i $z = 0$.

Svar:
Integralet har inden for integrationsvejen en singularitet i $z = 0$, d.v.s.

$$\oint \frac{1}{z^2(z-3)} \mathrm{dz} = 2\pi i Res(z=0) = -2\pi i/9$$

Opgave 4

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\frac{5}{4} + \cos\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

Svar:
Man omskriver $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ samt benytter at $d\theta = dz/(iz)$ og får derved følgende integrale over enhedscirklen

$$\frac{1}{i}\oint \frac{z + \frac{1}{z}}{z^2 + \frac{5}{2}z + 1}\, \mathrm{d}z$$

Polynomiet i nævneren har rødderne $z_1 = -2$ og $z_2 = -1/2$. Kun den ene rod z_2 er inden for enhedscirklen og det tilsvarende residue er $i\frac{5}{3}$. Samtidig er der en simpel pol i $z = 0$ som har residuet $-i$. Dvs. integralet antager værdien:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\frac{5}{4} + \cos\theta}\, \mathrm{d}\theta = 2\pi i(\frac{5}{3}i - i) = -\frac{4\pi}{3}$$

Opgave 5

Udtryk funktionen

$$f(\theta) = \sin^2(\theta)\cos(\theta)$$

ved hjælp af Legendre-polynomierne på formen $P_\ell(\cos\theta)$. Dvs. find koefficienterne a_ℓ i ekspansionen

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos\theta)$$

Svar:
Vi omskriver udtrykket ved at introducere $x = \cos\theta$ og får

$$f(x) = (1 - x^2)x = x - x^3 = \frac{2}{5}P_1(x) - \frac{2}{5}P_3(x)$$

Opgave 6

Find rækkeudviklingen af funktionen

$$f(z) = \frac{\cos z}{z} + \frac{z^2}{(z-1)}$$

for følgende tilfælde

$$\text{a) } 0 < |z| < 1 \qquad \text{og} \qquad \text{b) } |z| > 1$$

Svar:
a)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k-1}/(2k)! - \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+2}$$

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{k-1}$$

Opgave 7

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at finde principalværdien (principal value) af integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x+i)(x^2+1)} \mathrm{dx}$$

Svar:
Lukker integralet med en semicirkel in den øvre halvplan. Her findes en simpel pol i $z = i$ og yderligere skal tages hensyn til bidraget fra den simple pol på aksen i $z = 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x+i)(x^2+1)} \mathrm{dx} = \pi i R(z=0) - 2\pi i R(z=i) \;=\; \pi - \pi/2 = \pi/2$$

Opgave 8

Vis at den konforme afbildning (for $\mathrm{Im}(w) > 0$)

$$z = \log(w)$$

afbilder den øvre halvplan $\mathrm{Im}(w) > 0$ over på en uendelig lang kanal beskrevet ved mængden M af punkter $M = \{z \mid 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$.

- Find nu et potentiale u på M, som er nul langs kanten af M, dvs. langs den positive reelle akse og langs linien $z = i\pi + r$ for $r \in \mathbb{R}$.
- Beregn også gradienten ved hjælp af det komplekse potentiale.

Bemærk at et potentiale som sædvanligt opfylder Laplace-ligningen $\nabla^2 u = 0$ og at det i den øvre halvplan kan skrives på formen $u(x, y) = ky$, hvor k er en konstant.

Svar: Logaritmefunktionen afbilder $w = r\exp(i\theta)$ over på $\log(w) = \log(r) + i\theta$. Eftersom $\log(r)$ antager værdier mellem $\pm\infty$ og $0 < \theta < \pi$ ses at afbildningen afbilder den øvre halvplan på den nævnte kanal. For at finde potentialet benyttes den inverse afbildning $w = e^z$.

$$u = -k\mathrm{Re}(iw) = -k\mathrm{Re}(ie^z) = -k\mathrm{Re}(ie^{x+iy}) = ke^x \sin y$$

Det komplekse potentiale er givet ved udtrykket

$$\phi = -kie^z$$

Gradienten er givet ved

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^* = kie^{z^*} = ke^x(\sin y + i\cos y)$$

Opgave 9

Benyt Fourier-transformationen mht. variablen x og Laplace-transformationen mht. variablen t til at vise at løsningen til den partielle differentialligning

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + u(t,x) = 0,$$

er $u(t,x) = e^{-t} g(x - t)$, hvis $u(0,x) = g(x)$ og det antages at $u(t,x)$ går exponentielt hurtigt mod 0 for $|x| \to \infty$. (Hint: Benyt først begge transformationer og derefter de tilsvarende inverse transformationer).

Svar:
Efter man har anvendt begge transformationer har man følgende ligning ($\tilde{u}$ angiver FT og $\hat{u}$ LT)

$$\hat{\tilde{u}}(s,k) = \frac{\tilde{u}(0,k)}{s + ik + 1}$$

Den inverse LT giver vha. Bromwich-integralet

$$\tilde{u}(t,k) = \tilde{u}(0,k) e^{-t} e^{-ikt}$$

hvilket igen efter den inverse FT leder til

$$u(t,x) = u(0, x - t)e^{-t} = g(x - t)e^{-t}$$

(dvs. en translation og en eksponentiel dæmpning).