Eksamen i Matematik F2 d. 98. juni 2014

Eksamenssættet indeholder 9 opgaver (som vægtes lige). Bøger, noter, lommeregnere og computere er tilladte hjælpemidler og besvarelsen kan skrives med blyant, kuglepen eller andre skriveredskaber, blot det er læseligt. Ved besvarelsen lægges der vægt på, at det klart fremgår, hvorledes resultater opnås. Stringente matematiske beviser vil ikke være nødvendige.

Opgave 1

Find alle z som opfylder følgende ligning

$$\cos z \sinh z = 0$$

Opgave 2

Bestem konvergensradiussen for den uendelige række:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n z^n}{n^n}$$

Opgave 3

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin\theta + \cos\theta} \, \mathrm{d}\theta$$

Opgave 4

Beregn den inverse Laplace-transformation af udtrykket

$$\hat{u}(s) = \frac{1}{s^2(s+3i)}$$

Opgave 5

Udtryk funktionen

$$f(\theta) = 1 - \cos\theta - \frac{3}{2}\sin^2(\theta)$$

ved hjælp af Legendre-polynomierne på formen $P_\ell(\cos\theta)$. Dvs. find koefficienterne a_ℓ i ekspansionen

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos\theta)$$

Opgave 6

Find rækkeudviklingen af funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

for a) $|z| < 1$ og for b) $|z| > 1$.

Opgave 7

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at finde principalværdien (principal value) af integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x-1)(x-i)} \mathrm{dx}$$

Opgave 8

Find en konform afbildning på formen

$$z = w^{\alpha}$$

som afbilder mængden M af punkter $w = r\exp(i\theta)$, hvor $r > 0$ og $0 < \theta < 2\pi$ over på den øvre halvplan (Im $z > 0$) – dvs. bestem α således at den komplekse plan pånær den positive reelle akse afbildes over på den øvre halvplan.

Benyt denne afbildning til at finde et potentiale u på M, som går mod nul langs kanten af M, dvs. når man nærmer sig den positive reelle akse fra oven og fra neden.

Bemærk at et potentiale som sædvanligt opfylder Laplace-ligningen $\nabla^2 u = 0$, og at det i den øvre halvplan kan skrives på formen $u(x, y) = ky$, hvor k er en konstant.

Beregn yderligere gradienten af potentialet ved hjælp af den komplekse form $u(w)$.

Opgave 9

Benyt Fourier-transformationen mht. variablen x og Laplace-transformationen mht. variablen t til at finde løsningen til den partielle differentialligning

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 1,$$

hvis $u(0, x) = 0$. Antag at Fourier-transformationen af $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ er $ik\tilde{u}(t, k)$ hvor $\tilde{u}(t, k)$ er Fourier-transformationen af $u(x, t)$ - med andre ord, der kan ses bort fra værdien af $u(t, x)$ for $|x| \to \infty$.

Hint: Beregningerne bliver en smule lettere, hvis man, efter at have anvendt begger transformationer, anvender den inverse Fourier-transformation før den inverse Laplace-transformation.