Svar til eksamen i Matematik F2 d. 19. juni 2014

Partiel (og mangelfuld) besvarelse med forbehold for fejl.

Opgave 1: Find alle z som opfylder følgende ligning

$$\cos z \sinh z = 0$$

Svar:

$$z = \pi(n + \frac{1}{2}), \text{ for } n \in \mathbb{Z}$$

eller

$$z = i\pi n, \text{ for } n \in \mathbb{Z}$$

Opgave 2: Bestem konvergensradiussen for den uendelige række:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n z^n}{n^n}$$

Svar: Fra både kvotient og rodkriteriet ses, at konvergensradiussen er $R = \infty$.

Opgave 3: Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin\theta + \cos\theta} \, \mathrm{d}\theta$$

Svar: Ved en omskrivning til et kontourintegrale langs enhedscirklen fås udtrykket:

$$\oint \frac{1}{2 + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint \frac{2}{(1-i)z^2 + 4z + (1+i)} dz$$

Polynomiet i nævneren har rødder

$$z_{\pm} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{1-i},$$

hvor kun z_+ ligger inden for enhedscirklen. Ved at benytte omskrivningen

$$(1-i)z^2 + 4z + (1+i) = (1-i)(z - z_-)(z - z_+)$$

findes residuet i z_+ fra følgende grænse

$$\lim_{z \to z_+} (z - z_+) \frac{2}{i(1-i)(z - z_+)(z - z_-)} = \frac{1}{\sqrt{2}i}$$

og derfor fås

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\pi$$

Opgave 4: Beregn den inverse Laplace-transformation af udtrykket

$$\hat{u}(s) = \frac{1}{s^2(s+3i)}$$

Svar: Udtrykket har singulariteter af endelig orden i punkter $s=0$ og $s=-3i$, de tilsvarende residuer af

$$\frac{e^{st}}{s^2(s+3i)}$$

Ved rækkeudvikling omkring $s=0$ ses, at

$$\frac{e^{st}}{s^2(s+3i)} = \frac{1}{s^2}\frac{e^{st}}{s+3i} = \frac{1}{s^2}\left((1+st+\ldots)\frac{1}{3i}(1-\frac{2}{3i}+\ldots)\right) = \frac{1}{s^2}+\left(\frac{t-\frac{1}{3i}}{3i}\right)\frac{1}{s}+\ldots$$

Residuet kan nu aflæses

$$R(s=0) = \frac{t-\frac{1}{3i}}{3i}$$

Residuet i $s=-3i$ er givet ved

$$R(s=-3i) = \lim_{s\to-3i}(s+3i)\frac{e^{st}}{s^2(s+3i)} = -\frac{e^{-3it}}{9}$$

Vi få derfor, at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{e^{st}}{s^2(s+3i)}ds = \frac{t}{3i}+\frac{1}{9}-\frac{e^{-3it}}{9}$$

Opgave 5: Udtryk funktionen

$$f(\theta) = 1-\cos\theta-\frac{3}{2}\sin^2(\theta)$$

ved hjælp af Legendre-polynomierne på formen $P_\ell(\cos\theta)$. Dvs. find koefficienterne a_ℓ i ekspansionen

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos\theta)$$

Svar: Ved inspektion ses, at

$$f(\theta) = P_2(\cos\theta) - P_1(\cos\theta)$$

Opgave 6: Find rækkeudviklingen af funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

for a) $|z| < 1$ og for b) $|z| > 1$.
Svar:
a)

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} z^n$$

b)

$$f(z) = -\frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

Opgave 7: Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at finde principalværdien (principal value) af integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x-1)(x-i)}\mathrm{dx}$$

Svar:

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x-1)(x-i)}\mathrm{dx} = 2\pi i R(x=i) + \pi i R(x=1) + \pi i R(x=0) = -(1+i)\frac{\pi}{2}$$

Opgave 8: Find en konform afbildning på formen

$$z = w^\alpha$$

som afbilder mængden M af punkter $w = r\exp(i\theta)$, hvor $r > 0$ og $0 < \theta < 2\pi$ over på den øvre halvplan (Im $z > 0$) – dvs. bestem α således at den komplekse plan pånær den positive reelle akse afbildes over på den øvre halvplan.

Benyt denne afbildning til at finde et potentiale u på M, som går mod nul langs kanten af M, dvs. når man nærmer sig den positive reelle akse fra oven og fra neden.

Bemærk at et potentiale som sædvanligt opfylder Laplace-ligningen $\nabla^2 u = 0$, og at det i den øvre halvplan kan skrives på formen $u(x, y) = ky$, hvor k er en konstant.

Beregn yderligere gradienten af potentialet ved hjælp af den komplekse form $u(w)$.

Svar: Den rigtige værdi er $\alpha = 1/2$. Det tilsvarende komplekse potentiale er så

$$u(z) = -kiz^{1/2}$$

Gradienten af potentialet er givet ved

$$2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^* = -kiz^{-1/2}$$

Opgave 9: Benyt Fourier-transformationen mht. variablen x og Laplace-transformationen mht. variablen t til at finde løsningen til den partielle differentialligning

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 1,$$

hvis $u(0,x) = 0$. Antag at Fourier-transformationen af $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ er $ik\tilde{u}(t,k)$ hvor $\tilde{u}(t,k)$ er Fourier-transformationen af $u(x,t)$ - med andre ord, der kan ses bort fra værdien af $u(t,x)$ for $|x| \to \infty$.

Hint: Beregningerne bliver en smule lettere, hvis man, efter at have anvendt begger transformationer, anvender den inverse Fourier-transformation før den inverse Laplace-transformation.

Svar: Efter Fourier-transformationen fås

$$\frac{\partial \tilde{u}(t,k)}{\partial t} + ik\tilde{u}(t,k) = \sqrt{2\pi}\delta(k)$$

Anvendes nu Laplace-transformationen, så fås

$$s\hat{\tilde{u}}(s,k) + ik\hat{\tilde{u}}(s,k) = \frac{\sqrt{2\pi}\delta(k)}{s}$$

Dvs. løsningen er

$$\hat{\tilde{u}}(s,k) = \frac{\sqrt{2\pi}\delta(k)}{s(s+ik)}$$

Efter at have anvendt den inverse Fourier-transformation fås

$$\hat{u}(s,x) = \frac{1}{s^2}$$

Hvilket efter den inverse Laplace-transformation giver

$$u(t,x) = t$$