

Eksamen i Matematik F2 d. 18. juni 2015

Eksamenssættet indeholder 8 opgaver (som vægtes lige). Bøger, noter, lommeregner, computere og andre elektroniske hjælpemidler er tilladte. Ved besvarelsen lægges der vægt på, at det klart fremgår, hvorledes resultater opnås, men stringente matematiske beviser vil ikke være nødvendige.

Opgave 1

Find eksplícitte udtryk for alle de komplekse tal z som opfylder følgende ligning

$$\tan(z) \tanh(z) = 0$$

Opgave 2

Find Laurantrækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a) $f(z) = (z^2 - 2z + 4) \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$, hvor $z_0 = 2$

b) $f(z) = \frac{e^z}{(z-\pi)}$, hvor $z_0 = \pi$

Opgave 3

Beregn integralet

$$\oint \frac{z^2(z - \frac{\pi}{2})}{\cos z} dz$$

langs en cirkel i den komplekse plan med radius $r = \pi$ og centrum i $z = 0$.

Opgave 4

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{5 + 4 \sin \theta} d\theta$$

Opgave 5

Udtryk funktionen

$$f(\theta) = -2 \sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$$

ved hjælp af Legendre-polynomierne på formen $P_\ell(\cos \theta)$. Dvs. find koefficienterne a_ℓ i ekspansionen

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos \theta)$$

Opgave 6

Find rækkeudviklingen af funktionen, omkring $z = 2$,

$$f(z) = \frac{1}{3-z}$$

for de to tilfælde, a) $|z - 2| < 1$ og b) $|z - 2| > 1$.

Opgave 7

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at finde principalværdien (principal value) af integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x-i)^2(x+4i)} dx$$

Opgave 8

Benyt Fourier-transformationen mht. variabelen x og Laplace-transformationen mht. variabelen t til at løse den partielle differentiaalligning

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0,$$

med grænsebetingelserne:

$$u(0, x) = g(x) \quad \text{og} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

Det antages at $u(t, x)$ og de afledte med hensyn til x går hurtigt mod 0 for $|x| \rightarrow \infty$. Løsningen skulle blive:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left(g(x+t) + g(x-t) \right).$$