Kortfattet og ikke-komplet svar til eksamen i MatF2 2015

Forbehold for taste og skrive fejl.

Opgave 1

Find eksplicitte udtryk for alle de komplekse tal z som opfylder følgende ligning

$$\tan(z)\tanh(z) = 0$$

Svar: Ved at bruge nulreglen løses enten for $\tan(z) = 0$ eller $\tanh(z) = 0$. For den sidste lighed kan man benytte identiteten $\tanh(z) = -i\tan(iz)$. Heraf følger resultatet

$$z = n\pi \quad \vee \quad z = in\pi, \qquad \forall n \in \mathcal{Z}$$

Opgave 2

Find Laurantrækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a) $f(z) = (z^2 - 2z + 4)\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$, hvor $z_0 = 2$

b) $f(z) = \frac{e^z}{(z-\pi)}$, hvor $z_0 = \pi$

Svar:

a) Man ekspanderer i en annulus om $z = 2$ idet $1/(z-2)$ divergerer for $z \to 2$ og cos ikke er analytisk i denne grænse. Man ser herfra, at der er en essentiel singularitet, da rækken har et uendeligt antal led med negative potenser af $(z-2)$.

$$f(z) = \left(4 + 2(z-2) + (z-2)^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}}$$

b) Man ser direkte, at der er en simpel pol for $z = \pi$ og eftersom e^z er analytisk og ikke-nul her, fås

$$\frac{e^z}{(z-\pi)} = \frac{e^\pi}{(z-\pi)}e^{z-\pi} = \frac{e^\pi}{(z-\pi)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\pi)^n}{n!}$$

Opgave 3

Beregn integralet

$$\oint \frac{z^2(z-\frac{\pi}{2})}{\cos z}\mathrm{dz}$$

langs en cirkel i den komplekse plan med radius $r=\pi$ og centrum i $z=0$.

Svar: Man ser at nævneren har nulpunkter inden for integrationsvejen for $z=\pm\frac{\pi}{2}$. For $z=\frac{\pi}{2}$ er der en hævelig singularitet (vises f.eks. ved hjælp af L'hopital), så integralet er samlet lige med

$$2\pi i Res(z=-\frac{\pi}{2}) = \ldots \text{indsæt udregning her} \ldots = -i\pi^4/2$$

Opgave 4

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{5+4\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Svar:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{5+4\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}{5+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{4i}\oint_{|z|=1} \frac{\left(z-\frac{1}{z}\right)}{2(z+\frac{i}{2})(z+2i)}\frac{dz}{iz}$$

Vi ser at integranden har simple poler for $z=0$, $z=-i/2$ og $z=2i$ og disse udregnes udmiddelbart (vis!). Den sidste pol ligger uden for integrationsvejen, så integralet bliver

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{5+4\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i(Res(0)+Res(-i/2)) = 2\pi i\left(-\frac{i}{4}+\frac{5i}{12}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

Opgave 5

Udtryk funktionen

$$f(\theta) = -2\sin^2(\theta)+\sin^4(\theta)$$

ved hjælp af Legendre-polynomierne på formen $P_\ell(\cos\theta)$. Dvs. find koefficienterne a_ℓ i ekspansionen

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos\theta)$$

Svar: Man omskriver til cos-funktioner ved hjælp af idiot-formlen. Det tilsvarende sæt af ligninger hvor koefficienter matches for $\cos^4$, $\cos^2$, og $\cos^0$ opskrives (vis!), man finder da

$$f(\theta) = \frac{8}{35}P_4(\cos\theta)+\frac{4}{7}P_2(\cos\theta)-\frac{4}{5}P_0(\cos\theta)$$

Opgave 6

Find rækkeudviklingen af funktionen, omkring $z = 2$,

$$f(z) = \frac{1}{3-z}$$

for de to tilfælde, a) $|z-2| < 1$ og b) $|z-2| > 1$.
Svar:

a) Efter en lille omskrivning kan man benytte den geometriske række:

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{1-(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$$

b) En analog omskrivning benyttes i dette tilfælde:

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{1-(z-2)} = \frac{-1}{(z-2)}\frac{1}{1-\frac{1}{z-2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^{-n-1}$$

Opgave 7

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at finde principalværdien (principal value) af integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x(x-i)^2(x+4i)}\mathrm{dx}$$

Svar: Man kan enten benytte en integrationsvej i den øvre eller den nedre halvplan, men man ser at der i den nedre halvplan kun er en simpel pol $z = -4i$, hvor der i den øvre halvplan er en pol af 2. orden. Vi vælger derfor en halvcirkel med radius gående mod uendelig i den nedre halvplan. Bemærk at integranden går som $\approx x^{-4}$ for $|x| \ll 1$ og bidraget til integralet langs halvcirklen er derfor forsvindende lille! Det fås derfor, at

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x(x-i)^2(x+4i)}\mathrm{dx} = 2\pi i Res(-4i) - \pi i Res(0) = 2\pi i(-\frac{1}{100i}) + \pi i(\frac{1}{4i}) = \frac{23\pi}{100}$$

(Bemærk, at det er strengt forbudt, at addere residuer fra både den øvre og nedre halvplan.)

Opgave 8

Benyt Fourier-transformationen mht. variablen x og Laplace-transformationen mht. variablen t til at at løse den partielle differentialligning

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0,$$

med grænsebetingelserne:

$$u(0,x) = g(x) \quad \text{og} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

Det antages at $u(t,x)$ og de afledte med hensyn til x går hurtigt mod 0 for $|x| \to \infty$. Løsningen skulle blive:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\bigg(g(x+t) + g(x-t)\bigg).$$

Svar: Efter at have anvendt begge transformationer (vis hvordan grænsebetingelsen bruges) får man, at

$$-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}|_{t=0} - s\tilde{u}(0,k) + s^2\tilde{\tilde{u}}(s,k) + k^2\tilde{\tilde{u}}(s,k) = 0$$

som giver, at

$$\tilde{\tilde{u}}(s,k) = \frac{s\tilde{g}(k)}{s^2+k^2}$$

Man ser, at der er simple poler for $s = \pm ik$, og Bromwich integralet giver derfor, at

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{g}(k)}{2\pi i}\int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \frac{s}{s^2+k^2} ds = \frac{1}{2}\tilde{g}(k)\bigg(\exp(ikt) + \exp(-ikt)\bigg)$$

Den inverse Fourier-transformation giver da (vis, bemærk eller referer til passende udtryk i bogen!!)

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\bigg(g(x+t) + g(x-t)\bigg).$$