

Eksamen i Matematik F2 d. 23. juni 2016

Eksamenssættet indeholder 9 opgaver (som vægtes lige). Bøger, noter, lommeregnere, computere og andre elektroniske hjælpemidler er tilladte. Ved besvarelsen lægges der vægt på, at det klart fremgår, hvorledes resultater opnås, men stringente matematiske beviser vil ikke være nødvendige. Opgaverne kan besvares med kuglepen og/eller blyant. **BEMÆRK AT SÆTTET FORTSÆTTER PÅ BAGSIDEN.**

Opgave 1

Bestem for følgende tilfælde om en funktion $f(z)$ af $z = x + iy$ er analytisk i dele af den komplekse plan, hvis den har real del $u(x, y)$ og imaginær del $v(x, y)$ givet ved

a) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ og $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

b) $u(x, y) = e^{-y} \sinh x$ og $v(x, y) = e^y \cosh x$

Opgave 2

Find alle singulariteter og bestem ordenen af eventuelle poler for følgende udtryk

a)

$$\frac{z^2 - 6z + 8}{(z - 2)(z - 4)^3}$$

b)

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$$

Opgave 3

Find Laurantrækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a)

$$f(z) = \frac{\cosh(z - 1)}{z - 1}, \quad \text{hvor } z_0 = 1$$

b)

$$f(z) = \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \text{hvor } z_0 = \frac{\pi}{2}$$

Opgave 4

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at udregne integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx$$

Opgave 5

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{3}{4}} \cos \theta} d\theta$$

Opgave 6

Beregn integralet

$$\oint \frac{(z - \frac{\pi}{2})}{z \sin z} dz$$

langs en cirkel i den komplekse plan med radius $r = \pi$ og centrum i $z = \pi/2$.

Opgave 7

Benyt Laplace-transformationen til at løse følgende system af differentialligninger for $x(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x - y \\ \dot{y} &= 2x + y \end{aligned}$$

med startbetingelsen $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

Opgave 8

Benyt Laplace-transformationen til at løse følgende differentialligning for $y(t)$

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-t}$$

med startbetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0$.

Opgave 9

Vis at følgende integrale antager den givne værdi ved hjælp af kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Du vil muligvis få brug for en af følgende værdier $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ og $\sin(\pi/6) = 1/2$.