Svar til eksamen i Matematik F2 d. 23. juni 2016

FORBEHOLD FOR FEJL! Bemærk, i modsætning til herunder, så skal det i besvarelsen fremgå tydeligt, hvordan polerne findes og hvordan de enkelte residuer udregnes.

Opgave 1

Bestem for følgende tilfælde om en funktion f(z) af $z = x + iy$ er analytisk i dele af den komplekse plan, hvis den har real del $u(x, y)$ og imaginær del $v(x, y)$ givet ved

a) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ og $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

b) $u(x, y) = e^{-y} \sinh x$ og $v(x, y) = e^{y} \cosh x$

Svar:

a) Det ses, at $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kan skrives på formen

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{z^*}{zz^*} = 1/z.$$

Denne funktion er analytisk i hele den komplekse plan, bortset fra i den simple pol i origo.

b) Fra Cauchy-Riemann ser vi, at

$$\partial_x u(x, y) = e^{-y} \cosh x$$

kun er lig

$$\partial_y v(x, y) = e^{y} \cosh x,$$

hvis $y = 0$. Samtidig ser vi, at

$$\partial_y u(x, y) = -e^{-y} \sinh x$$

er lig

$$-\partial_x v(x, y) = -e^{-y} \sinh x,$$

i hele den komplekse plan. Dvs. Cauchy-Riemann betingelserne er opfyldt for den reelle akse, dvs. hvor $y = 0$.

Opgave 2

Find alle singulariteter og bestem ordenen af eventuelle poler for følgende udtryk

a)

$$\frac{z^2 - 6z + 8}{(z-2)(z-4)^3}$$

b)

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$$

Svar:

a)

$$\frac{z^2-6z+8}{(z-2)(z-4)^3} = \frac{(z-2)(z-4)}{(z-2)(z-4)^3} = \frac{1}{(z-4)^2}$$

Dvs. der er en pol af anden orden i $z=4$.(Det kan bemærkes, at singulariteten i $z=2$ er hævelig).

b) Der er simple poler for $z=2\pi ik$, hvor k er et heltal forskelligt fra 0. Det interessante punkt er $z=0$,

$$\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!\right)-1} - \frac{1}{z} = \frac{1}{\left(z\sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1}/k!\right)} - \frac{1}{z}$$

Hvis vi nu benytter den geometriske række på den første brøk, så opnår man

$$\frac{1}{\left(z\sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1}/k!\right)} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z\left(1+\sum_{k=2}^{\infty} z^{k-1}/k!\right)} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z}(1+O(z)) - \frac{1}{z}.$$

Dette udtryk går mod 0 for $z\to 0$. Udtrykket har derfor ingen singularitet for $z=0$ (men derimod en hævelig singularitet).

Opgave 3

Find Laurantrækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a)

$$f(z) = \frac{\cosh(z-1)}{z-1}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 1$$

b)

$$f(z) = \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = \frac{\pi}{2}$$

a)

$$\frac{\cosh(z-1)}{z-1} = \frac{\exp(z-1)+\exp(1-z)}{2(z-1)} = \frac{1}{2(z-1)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-1)^k}{k!}\right).$$

I de to summer er det kun de lige led som overlever, dvs. den Laurant-rækker bliver

$$\frac{\cosh(z-1)}{z-1} = \frac{\exp(z-1)+\exp(1-z)}{2(z-1)} = \frac{1}{(z-1)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2k}}{(2k)!}\right).$$

b) Funktionen har en simpel pol i $z=\pi/2$, dvs.

$$f(z) = \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos(z-\pi/2)}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{2k!}$$

Opgave 4

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at udregne integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)} \mathrm{dx}$$

Svar:

Integranden har simple poler i $x = \pm i$ og i $x = \pm 3i$. Samtidig ser vi at

$$\frac{x}{(x^2+1)(x^2+9)} \to 0, \quad \text{for } |x| \to \infty$$

Dvs. vi kan lukke integrationsvejen langs en halvcirkel i den øvre plan og beregne integralet fra residuerne i $z = i$ og $z = 3i$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)} \mathrm{dx} = 2\pi i \left(\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i} \right) = \frac{\pi}{12}$$

Opgave 5

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{3}{4}} \cos\theta} \, \mathrm{d}\theta$$

Svar:

Vi benytter den sædvanlige substitution for $\cos\theta$.

$$\oint \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{z+1/z}{2}} \, \frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{1}{i} \oint \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{16}} z^2 + z + \sqrt{\frac{3}{16}}} \, \mathrm{d}z$$

Man finder nu følgende rødder for andengrads polynomiet i nævneren, $\alpha_1 = -1/\sqrt{3}$ og $\alpha_2 = -\sqrt{3}$ og bemærker at kun den første ligger inden for enhedscirklen, derfor fås

$$\frac{1}{i} \oint \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{16}} (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)} \mathrm{d}z = 2\pi i Res(z = \alpha_1) = 2\pi i \frac{2}{i} = 4\pi$$

Opgave 6

Beregn integralet

$$\oint \frac{(z - \frac{\pi}{2})}{z \sin z} \mathrm{dz}$$

langs en cirkel i den komplekse plan med radius $r = \pi$ og centrum i $z = \pi/2$.

Svar:

Man ser, at integranden har singulariteter inden for integrationsvejen i punkterne $z = 0$ og i $z = \pi$. Singulariteten i $z = 0$ er en pol af anden orden og har residuet

$$Res(z = 0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2(z - \frac{\pi}{2})}{z \sin z} \right) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{(3z^3 - \pi z^2) \sin z}{z^2 \sin^2 z} - \frac{z^2(z - \frac{\pi}{2})(\sin z + z \cos z)}{z^2 \sin^2 z} \right)$$

Ved hjælp af L'Hospital regel (tæller og nævner går begge til nul) fås at residuet

$$Res(z = 0) = 1$$

Singulariteten i $z = \pi$ er en simpel pol, og derfor

$$Res(z = \pi) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{(z - \pi)(z - \frac{\pi}{2})}{z \sin z} \right) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{(z - \pi)(z - \frac{\pi}{2})}{z \sin(\pi - z)} \right) = -\frac{1}{2}$$

Dvs.

$$\oint \frac{(z - \frac{\pi}{2})}{z \sin z} \mathrm{dz} = i\pi$$

Opgave 7

Benyt Laplace-transformationen til at løse følgende system af differentialligninger for $x(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x - y \\ \dot{y} &= 2x + y \end{aligned}$$

med startbetingelsen $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

Svar:

Efter at have benyttet Laplace-transformationen på begge ligninger fås

$$\begin{aligned} s\hat{x} - x_0 &= 4\hat{x} - \hat{y} \\ s\hat{y} - y_0 &= 2\hat{x} + \hat{y} \end{aligned}$$

Fra den sidste af de to ligninger får vi,

$$\hat{y} = \frac{2\hat{x}}{s - 1}$$

Vi indsætter nu dette i den første af de to ligninger, og får

$$s\hat{x} = 2 + 4\hat{x} - \frac{2\hat{x}}{s - 1}$$

Hvilket igen giver, at

$$\hat{x} = \frac{2(s-1)}{s^2 - 5s + 6} = \frac{2(s-1)}{(s-2)(s-3)}$$

I Bromwich integralet benytter vi nu, at der er simple poler i $s = 2$ og $s = 3$, og får

$$x(t) = -2e^{2t} + 4e^{3t}$$

Opgave 8

Benyt Laplace-transformationen til at løse følgende differentialligning for $y(t)$

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-t}$$

med startbetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0$.

Svar:

Den Laplace-transformerede ligning med startbetingelserne indsat har formen

$$s^2\hat{y} + 4s\hat{y} + 4\hat{y} = \frac{1}{s+1}$$

Denne ligning giver

$$\hat{y} = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$$

Vi finder residuet i den simple pol

$$Res(s = -1) = e^{-t}$$

og i polen af anden orden

$$Res(s = -2) = -(1+t)e^{-2t}$$

Dvs. løsningen bliver

$$y(t) = e^{-t} - (1+t)e^{-2t}$$

Opgave 9

Vis at følgende integrale antager den givne værdi ved hjælp af kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Du vil muligvis få brug for en af følgende værdier $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ og $\sin(\pi/6) = 1/2$.

Svar:

Vi lægger opskæringslinien langs den postive reelle akse, og får derved (udfører integralet langs de to sider af opskæringslinien og langs en cirkel i uendelig, som ikke bidrager til integrationen)

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_\infty^0 \frac{(xe^{2\pi i})^{1/3}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\pi i(Res(z=-i)+Res(z=i))$$

Hvilket giver

$$(1-e^{2\pi i/3})\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \pi(e^{i\pi/6}-e^{i\pi/2})$$

Hvilket igen giver

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi(e^{i\pi/6}-e^{i\pi/2})}{(1-e^{2\pi i/3})} = \pi\frac{\sin(\pi/6)}{\sin(2\pi/6)} = \frac{\pi}{2\cos(\pi/6)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$