Eksamen i Matematik F2 d. 21. juni 2017

Eksamenssættet indeholder 9 opgaver (som vægtes lige). Bøger, noter, lommeregnere, computere og andre elektroniske hjælpemidler er tilladte. Ved besvarelsen lægges der vægt på, at det klart fremgår, hvorledes resultater opnås, men stringente matematiske beviser vil ikke være nødvendige. Opgaverne kan besvares med kuglepen og/eller blyant.
BEMÆRK AT SÆTTET FORTSÆTTER PÅ BAGSIDEN.

Opgave 1

Bestem for følgende tilfælde om en funktion f(z) af $z = x + iy$ er analytisk i dele af den komplekse plan, hvis den har real del $u(x, y)$ og imaginær del $v(x, y)$ givet ved

a) $u(x, y) = 3(x^2 - y^2) - 14xy, \quad \text{og} \quad v(x, y) = 7(x^2 - y^2) + 6xy$

b) $u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos(2xy), \quad \text{og} \quad v(x, y) = e^{x^2 - y^2} \sin(2xy)$

Opgave 2

Find alle singulariteter og bestem ordenen af eventuelle poler for følgende udtryk

a)

$$\frac{z^2 + 6z - 7}{(z - 2)^3 (z + 7)^5}$$

b)

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\cos z - 1}$$

Opgave 3

Find Laurantrækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a)

$$f(z) = \frac{z^3}{(z - 1)}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 0$$

b)

$$f(z) = \frac{\ln(1 - z)}{z^7}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 0$$

Opgave 4

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{4e^{2i\theta} + 1} \, \mathrm{d}\theta$$

Opgave 5

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at udregne integralet (langs den reelle akse)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1i)(x-2i)(x-3i)(x-4i)} \mathrm{dx}$$

Husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver.

Opgave 6

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at udregne integralet (langs den reelle akse)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+\pi^2} \mathrm{dx}$$

Husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver.

Opgave 7

Udtryk funktionen

$$f(\theta) = \cos^5(\theta)$$

ved hjælp af Legendre-polynomierne på formen $P_\ell(\cos\theta)$. Dvs. find koefficienterne a_ℓ i ekspansionen

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos\theta)$$

Opgave 8

Benyt Laplace-transformationen til at løse følgende system af differentialligninger for $x(t)$ og $y(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x - y \\ \dot{y} &= -x + 4y \end{aligned}$$

med startbetingelsen $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Opgave 9

Benyt den inverse Laplace-transformationen på funktionen

$$\hat{f}(s) = 1/\sqrt{s}$$

til at finde $f(t)$. Bemærk at funktionen er flertydig. Du får muligvis brug for følgende integrale (for $a > 0$), $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \sqrt{\pi/a}$.