Kortfattet svar til eksamen i Matematik F2 d. 21. juni 2017

Opgave 1

Bestem for følgende tilfælde om en funktion f(z) af $z = x + iy$ er analytisk i dele af den komplekse plan, hvis den har real del $u(x, y)$ og imaginær del $v(x, y)$ givet ved

a) $u(x, y) = 3(x^2 - y^2) - 14xy, \quad \text{og} \quad v(x, y) = 7(x^2 - y^2) + 6xy$

b) $u(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy), \quad \text{og} \quad v(x, y) = e^{x^2-y^2} \sin(2xy)$

Svar:

For at finde ud af om funktionerne er analytiske benytter vi Cauchy-Riemann betingelserne.

a) Vi finder at

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x - 14y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

og

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6y - 14x = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

b) Vi finder at

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{x^2-y^2} \left(x \cos(2xy) - y \sin(2xy)\right) = \frac{\partial v}{\partial y}$$

og

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{x^2-y^2}(-y \cos(2xy) - x \sin(2xy) = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$u(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy), \quad \text{og} \quad v(x, y) = e^{x^2-y^2} \sin(2xy)$

Dvs. da Cauchy-Riemann betingelserne er opfyldt for begge funktioner er de begge analytiske.

Opgave 2

Find alle singulariteter og bestem ordenen af eventuelle poler for følgende udtryk

a)

$$\frac{z^2 + 6z - 7}{(z - 2)^3(z + 7)^5}$$

b)

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\cos z - 1}$$

Svar:

a) Efter en lille omskrivning af polynomiet i tælleren får vi

$$\frac{z^2+6z-7}{(z-2)^3(z+7)^5} = \frac{(z+7)(z-1)}{(z-2)^3(z+7)^5} = \frac{(z-1)}{(z-2)^3(z+7)^4}$$

Fra dette kan vi se, at der er en pol af orden 3 i $z=2$ og en pol af orden 4 i $z=-7$.

b) Vi foretager en ekspansion af $\cos(z)$ omkring $z = 2\pi m$ (for m som heltal) og benytter $z = \xi + 2\pi m$, og får

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + \frac{1}{\cos z - 1} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{-1 + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\xi^{2k}}{(2k!)}} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{\xi^2[-1/2 + \xi^2/4! - O(\xi^4)]} \\ &= \frac{1}{\xi + 2\pi m} + \frac{g(\xi)}{\xi^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Da $g(0) = -1/2$ ser man, at der er en pol af orden 2 i $z = 2\pi m$ eller ækvivalent for $\xi = 0$.

Opgave 3

Find Laurantrækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a)

$$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 0$$

b)

$$f(z) = \frac{\ln(1-z)}{z^7}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 0$$

Svar:

a) Funktionen er analytisk for $z = 0$, dvs. Laurantrækken identisk på med Taylorrækken, som er

$$\frac{z^3}{(z-1)} = z^3 \frac{-1}{(1-z)} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+3}$$

b)

$$\frac{\ln(1-z)}{z^7} = -\frac{1}{z^7}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}$$

Opgave 4

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{4e^{2i\theta}+1}\ \mathrm{d}\theta$$

Svar:

Vi benytter omskrivningen $z = e^{i\theta}$ og omskriver til et kontourintegrale på enhedscirklen benævnt C.

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{4e^{2i\theta}+1}\ \mathrm{d}\theta = \oint_C \frac{z^2}{4z^2+1}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{1}{4i}\oint_C \frac{z}{(z-i/2)(z+i/2)}\ \mathrm{d}z = 2\pi i\Big(Res(z=i/2)+Res(z=-i/2)\Big)$$

Vi finder herfra, at

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{4e^{2i\theta}+1}\ \mathrm{d}\theta = \pi/2$$

Opgave 5

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at udregne integralet (langs den reelle akse)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1i)(x-2i)(x-3i)(x-4i)}\mathrm{dx}$$

Husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver.

Svar:

Der findes ingen poler i den nedre halvplan. Hvis man lukker integrationsvejen med en halvcirkel i den nedre plan får man direkte at integralet er lig nul. Dette følger eftersom at for $|x| \gg 1$, går integranden approksimativt som $|x|^{-4}$, dvs. integralet langs halvcirklen i nedre halvplan bidrager ikke.

Opgave 6

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at udregne integralet (langs den reelle akse)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+\pi^2}\mathrm{dx}$$

Husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver.

Svar:

Bemærk, at integralet kan omskrives på følgende form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+\pi^2} \mathrm{dx} = -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}-2}{x^2+\pi^2}\mathrm{dx} - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{x^2+\pi^2}\mathrm{dx}$$

jvf. Jordans lemma, så kan vi lukke det første integrale langs en halvcirkel i den øvre halvplan og det andet integrale langs en halvcirkel i det nedre halvplan. Vi har derfor, at (øvre halvplan)

$$-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}-2}{x^2+\pi^2}\mathrm{dx} = -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}-2}{(x+i\pi)(x-i\pi)}\mathrm{dx} = 2\pi i Res(i\pi) = -\frac{1}{4}e^{-2\pi} + \frac{1}{2}$$

og (nedre halvplan)

$$-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{x^2+\pi^2}\mathrm{dx} = -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x+i\pi)(x-i\pi)}\mathrm{dx} = 2\pi i Res(-i\pi) = -\frac{1}{4}e^{-2\pi}$$

Adderes de to bidrag fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+\pi^2}\mathrm{dx} = e^{-\pi}\sinh(\pi)$$

Opgave 7

Udtryk funktionen

$$f(\theta) = \cos^5(\theta)$$

ved hjælp af Legendre-polynomierne på formen $P_\ell(\cos\theta)$. Dvs. find koefficienterne a_ℓ i ekspansionen

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos\theta)$$

Svar:

Funktionen er ulige og af 5. orden, så kun $\ell = 1, 3, 5$ skal bruges. Ved inspektion fås, at

$$\cos^5(\theta) = \frac{3}{7}P_1(\cos\theta) + \frac{4}{9}P_3(\cos\theta) + \frac{8}{63}P_5(\cos\theta)$$

Opgave 8

Benyt Laplace-transformationen til at løse følgende system af differentialligninger for $x(t)$ og $y(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x - y \\ \dot{y} &= -x + 4y \end{aligned}$$

med startbetingelsen $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Svar:

$$\begin{aligned} s\hat{x} - x_0 &= 4\hat{x} - \hat{y} \\ s\hat{y} - y_0 &= -\hat{x} + 4\hat{y} \end{aligned}$$

Vi isolerer nu hhv. $\hat{x}$ og $\hat{y}$ og får

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{-1}{s^2 - 8s + 15} \\ \hat{y} &= \frac{s-4}{s^2 - 8s + 15} \end{aligned}$$

Den inverse Laplace-transformation på de to ligninger giver

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\left(e^{3t} - e^{5t}\right) \\ y(t) &= \frac{1}{2}\left(e^{3t} + e^{5t}\right) \end{aligned}$$

Opgave 9

Benyt den inverse Laplace-transformationen på funktionen

$$\hat{f}(s) = 1/\sqrt{s}$$

til at finde $f(t)$. Bemærk at funktionen er flertydig. Du får muligvis brug for følgende integrale (for $a > 0$), $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \sqrt{\pi/a}$.

Svar:

Den inverse transformation findes fra

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \frac{e^{st}}{\sqrt{s}} ds$$

Problemet med den inverse transformation er, at funktionen har et branchpoint pga. kvadratroden, så vi bliver nødt til at introducere en opskæringslinie som gør, at man stadigvæk kan evaluare ovenstående integrale for $\lambda > 0$. Samtidig skal vi være påpasselige i forhold til at vælge en passende kontour at integrere langs. Vi vælger her at bruge den negative reelle akse som opskæringslinie og lader argumentet for de komplekse tal løbe mellem $-\pi$ og π. Vi vælgere en intgrationsvej som vist i Fig. 1. Bemærk, at

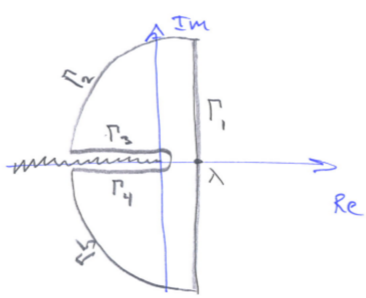

Figure 1: Integrationsvej

eftersom $t > 0$, så vil integrationsvejen langs elementerne Γ_2 og Γ_5 være lig 0. Funktionen har ingen poler i det valgte domæne, så vi har derfor, at

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1+\Gamma_3+\Gamma_4} \frac{e^{st}}{\sqrt{s}} ds. \tag{2}$$

Dette leder til ligheden:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \frac{e^{st}}{\sqrt{s}} ds &= -\int_{\Gamma_3} \frac{e^{st}}{\sqrt{s}} ds - \int_{\Gamma_4} \frac{e^{st}}{\sqrt{s}} ds \\
&= -e^{i\pi} \int_{\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{r \exp(i\pi)}} e^{r \exp(i\pi) t} dr - e^{-i\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r \exp(-i\pi)}} e^{r \exp(-i\pi) t} dr \\
&= -e^{i\pi/2} \int_{\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-rt} dr - e^{-i\pi/2} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-rt} dr \\
&= \left(e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2} \right) \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-rt} dr \\
&= 4i \int_{0}^{\infty} e^{-u^2 t} du \\
&= 2i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 t} du \\
&= 2i \sqrt{\frac{\pi}{t}} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Vi har i ovenstående benyttet substitutionen $r = u^2$ og benyttet symmetrien af integranten til at udvide integrationen til hele den reelle akse. Den inverse transformation er derfor

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{st}}{\sqrt{s}} ds = \frac{1}{2\pi i} 2i \sqrt{\frac{\pi}{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$