Eksamen i Matematik F2 d. 19. juni 2018

Eksamenssættet indeholder 8 opgaver (som vægtes lige). Bøger og noter er tilladte hjælpemidler. Lommeregnere, computere og andre elektroniske hjælpemidler er IKKE tilladte. Ved besvarelsen lægges der vægt på, at det klart fremgår, hvorledes resultater opnås, men stringente matematiske beviser vil ikke være nødvendige. Opgaverne kan besvares med kuglepen og/eller blyant. **BEMÆRK AT SÆTTET FORTSÆTTER PÅ BAGSIDEN.**

Opgave 1

Find realdelen, Re z, og imaginærdelen, Im z, for følgende værdier af z,

a) $z = \frac{1}{2-i}$

b) $z = i^i$

c) $z = \ln(1+i)$

Opgave 2

Find alle singulariteter og bestem ordenen af eventuelle poler for følgende udtryk

a)
$$\frac{1}{(z^2 - 14z + 13)^3}$$

b)
$$\frac{\ln(z)}{1-z}$$

c)
$$\frac{1}{z - \sin z}$$

Opgave 3

Find Laurent-rækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a)
$$f(z) = \frac{\sinh z}{(z - i\pi)}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = i\pi$$

b)
$$f(z) = \frac{e^z}{z - i}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = i$$

Opgave 4

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} \cos(\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

Opgave 5

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at vise at principalværdien af følgende integrale (langs den reelle akse) antager værdien $\pi/\sqrt{3}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+1} \mathrm{dx}$$

Husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver. Du får muligvis brug for følgende værdier $\cos(\pi/6) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ og $\cos(\pi/3) = \sin(\pi/6) = 1/2$.

Opgave 6

Benyt laplacetransformationen til at løse følgende ligning

$$\frac{d^4 u(t)}{dt^4} - u(t) = 0,$$

når $u'''(0) = 0$, $u''(0) = 0$, $u'(0) = 0$ og $u(0) = 1$.

Opgave 7

Vis at følgende integrale antager den givne værdi ved hjælp af kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2/3}}{(x+1)^3} \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

Angiv en passende integrationsvej. Hint: vis at summen af residuet/residuerne af integrandens singulære punkt(er) er $-1/9 \exp(2\pi i/3)$, og benyt evt. slutteligt, at $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$ til at udregne værdien af integralet.

Opgave 8

Benyt laplacetransformationen til at løse følgende differentialligning for $u(t)$,

$$\frac{du(t)}{dt} = 2 \int_0^t u(t') e^{-(t-t')} \, \mathrm{d}t'$$

med startbetingelsen $u(0) = 1$.