Eksamen i Matematik F2 d. 19. juni 2018

Korte svar (ikke fuldstændige)

Opgave 1

Find realdelen, Re z, og imaginærdelen, Im z, for følgende værdier af z,

a) $z = \frac{1}{2-i}$

b) $z = i^i$

c) $z = \ln(1+i)$

Svar

Find realdelen, Re z, og imaginærdelen, Im z, for følgende værdier af z,

a) Re $z = 2/5$, og Im $z = 1/5$

b) Re $z = \exp(-\pi/2)$, og Im $z = 0$

c) Re $z = \ln(\sqrt{2})$, og Im $z = \pi/4$

Opgave 2

Find alle singulariteter og bestem ordenen af eventuelle poler for følgende udtryk

a)

$$\frac{1}{(z^2 - 14z + 13)^3}$$

b)

$$\frac{\ln(z)}{1-z}$$

c)

$$\frac{1}{z - \sin z}$$

Svar

a)

$$\frac{1}{(z^2 - 14z + 13)^3} = \frac{1}{(z-13)^3(z-1)^3}$$

Heraf aflæses direkte, at der er poler af orden 3 i $z = 1$ og $z = 13$.

b)

$$\frac{\ln(z)}{1-z}$$

Vi ved at $\ln(z)$ har et forgreningspunkt for $z = 0$ og nævneren er analytisk i dette punkt, derfor vil det samlede udtryk også have et *forgreningspunkt i* $z = 0$. Vi tjekker nu punktet $z = 1$, hvor nævneren er lig 0. Vi definerer en ny variabel $\xi = z - 1$, og ser på grænsen $\xi \to 0$.

$$\frac{\ln(z)}{1-z} = -\frac{\ln(\xi+1)}{\xi} \overset{\xi\to 0}{\to} \overset{\text{L'Hospital}}{=} -\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi+1} = -1$$

Dvs. vi har en *hævelig singularitet* for $z = 1$.

c)

$$\frac{1}{z - \sin z}$$

Udtrykket har singulære punkter der hvor $z = \sin z$. Vi finder en pol for $z = 0$.

Polen er af 3. orden idet

$$z - \sin z = \frac{z^3}{3!}\left(1 - \frac{z^5}{5!} + \dots\right)$$

Opgave 3

Find Laurent-rækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a)

$$f(z) = \frac{\sinh z}{(z - i\pi)}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = i\pi$$

b)

$$f(z) = \frac{e^z}{z - i}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = i$$

Svar

a) Vi foretager et variabelskifte til $\xi = z - i\pi$ og får derved

$$\frac{\sinh z}{(z-i\pi)} = \frac{i\sin(i\xi)}{\xi} = \frac{i}{\xi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(i\xi)^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\frac{1}{\xi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2k}\frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i\pi)^{2k}}{(2k+1)!}$$

b) Ved en simpel omskrivning findes rækken på følgende vis

$$f(z) = \frac{e^z}{z-i} = \frac{e^i e^{z-i}}{z-i} = \frac{e^i}{z-i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{k!}$$

Opgave 4

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} \cos(\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

Svar

Foretager substitutionen $z = e^{i\theta}$ og får

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} \cos(\theta) \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2i} \oint \left(z + \frac{1}{z} \right) \, \mathrm{d}z = \pi$$

Opgave 5

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at vise at principalværdien af følgende integrale (langs den reelle akse) antager værdien $\pi/\sqrt{3}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+1} \mathrm{dx}$$

Husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver. Du får muligvis brug for følgende værdier $\cos(\pi/6) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ og $\cos(\pi/3) = \sin(\pi/6) = 1/2$.

Svar

Vi lukker integralet langs en halvcirkel i den øvre halvplan. Den kurve bidrager ikke til integrationen da for store værdier af $R = |z|$ vil $|zf(z)| \approx R/R^3 \overset{R\to\infty}{\to} 0$. Integranden har simple poler i $z = -1$, $z = \exp(i\pi/3)$ og $z = \exp(-i\pi 3)$. Dvs. vi har en simpel pol på integrationsvej i $z = -1$ om hvilken vi lægger en lille halvcirkel H_ϵ. Vi har derfor, at

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+1} \mathrm{dx} + \int_{H_\epsilon} \frac{1}{x^3+1} \mathrm{dx} = 2\pi i \ \mathrm{Res}(e^{i\pi/3})$$

Hvilket igen giver, at

$$\begin{aligned}
P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+1} \mathrm{dx} &= 2\pi i \ \mathrm{Res}(e^{i\pi/3}) + \pi i \ \mathrm{Res}(-1) \\
&= \frac{\pi i}{(1+e^{i\pi/3})(1+e^{-i\pi/3})} + \frac{2\pi i}{(e^{i\pi/3}+1)(e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3})} \\
&= \frac{\pi i}{2+2\cos(\pi/3)} + \frac{\pi e^{-\pi i/6}}{2\cos(\pi/6)\sin(\pi/3)} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Vi har her benyttet, at $\cos(\pi/6) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ og $\cos(\pi/3) = 1/2$.

Opgave 6

Benyt laplacetransformationen til at løse følgende ligning

$$\frac{d^4u(t)}{dt^4} - u(t) = 0,$$

når $u'''(0) = 0$, $u''(0) = 0$, $u'(0) = 0$ og $u(0) = 1$.

Svar

Benyt laplacetransformationen på begge sider af udtrykket, og vi får

$$\hat{u}(s) = \frac{s^3}{(s^4 - 1)} = \frac{s^3}{(s-1)(s+1)(s-i)(s+i)},$$

Vi beregner residuerne af de fire simple poler og får fra den inverse laplacetransformation, at

$$u(t) = \frac{1}{2}(\cosh(t) + \cos(t))$$

Opgave 7

Vis at følgende integrale antager den givne værdi ved hjælp af kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

Angiv en passende integrationsvej. Hint: vis at summen af residuet/residuerne af integrandens singulære punkt(er) er $-1/9\exp(2\pi i/3)$, og benyt evt. slutteligt, at $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$ til at udregne værdien af integralet.

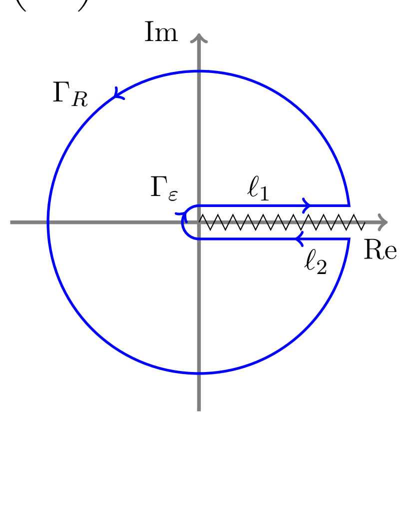
Svar

Integranden har en pol af orden 3 i $z = e^{i\pi}$, og vi får her, at

$$Res(-1) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to e^{i\pi}} \frac{d^2}{dz^2}\Big((z+1)^3 f(z)\Big) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to e^{i\pi}} \frac{d^2}{dz^2}\Big(z^{2/3}\Big) = -1/9\exp(2\pi i/3)$$

Integrationsvej. Integralet, vi er interesseret i, udregnes langs den øvre side af opskæringslinien

$$\int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int_{\ell_1} \frac{z^{2/3}}{(z+1)^3}\,\mathrm{d}z$$



For at bruge Cauchys sætning indfører vi ekstra integrationsveje som hjælp til at udregne integralet, en langs den nedre side af opskæringslinien ℓ_2, en langs en cirkel i uendelig Γ_R og en langs en lille halvcirkel omkring venstre side af origo Γ_ϵ.

Vi ser at integrationen langs den ydre cirkel ikke bidrager til integralet idet

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \leq 2\pi R \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)| \overset{R\to\infty}{\to} 0.$$

Vi har her brugt, at (for alle z på Γ_R)

$$|zf(z)| \overset{R\gg 1}{\approx} R(R^{2/3}/R^2) = R^{-1/3} \quad \overset{R\to\infty}{\to} \quad 0$$

og at nævneren i integranden for store radier er: $1+R^2 \approx R^2$.

Sagt i ord, så er integralet mindre end eller lig med maksimumsværdien af integranden langs integrationsvejen ganget med længden af integrationsvejen, som er $2\pi R$. Da maksimumsværdien går hurtigere mod nul end længden af integrationsvejen vil integralet være nul. På lignende vis, ser vi nu, at bidraget fra Γ_ϵ er nul når radius, ϵ, går mod nul,

$$\left|\int_{\Gamma_\epsilon} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \leq \pi\epsilon \max_{z\in\Gamma_\epsilon} |f(z)| \overset{\epsilon\to 0}{\to} 0$$

idet (for alle z på Γ_ϵ)

$$|zf(z)| \overset{\epsilon\ll 1}{\approx} \epsilon(\epsilon^{2/3}) = \epsilon^{5/3} \quad \overset{\epsilon\to 0}{\to} \quad 0$$

Vi har her benyttet, at nævneren i integranden for små radier: $1+\epsilon^2 \approx 1$.

I grænserne for hhv. store og små radier på de cirkulære veje kan vi se bort fra Γ_ϵ og Γ_R, og derfor får vi, at

$$\oint_{\ell_1+\Gamma_R+\ell_2+\Gamma_\varepsilon} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\ell_1+\ell_2} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i\Big(-1/9\exp(2\pi i/3)\Big)$$

Integralet langs ℓ_2 svarer til at integrere x fra uendelig til nul, men bemærk, at vi ikke kan krydse opskæringslinien, og derfor vil x langs ℓ_2 antage værdien $e^{2\pi i}x$, som indsættes i integranden, og vi får derved

$$\int_{\ell_1+\ell_2} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{(x+1)^3}\ \mathrm{d}x + \int_\infty^0 \frac{(xe^{2\pi i})^{2/3}}{(x+1)^3}\ \mathrm{d}x = (1-e^{4\pi i/3})\int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{(x+1)^3}\ \mathrm{d}x$$

Det skal nu være lig summen af residuerne

$$(1-e^{4\pi i/3})\int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{(x+1)^3}\ \mathrm{d}x = -2\pi i\left(\frac{1}{9}e^{2\pi i/3}\right)$$

Vi får nu

$$\int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{(x+1)^3}\ \mathrm{d}x = \frac{-2\pi i\left(\frac{1}{9}e^{2\pi i/3}\right)}{1-e^{4\pi i/3}} = \frac{-2\pi i/9}{e^{-2\pi i/3}-e^{2\pi i/3}} = \frac{\pi}{9\sin(2\pi/3)}$$

Da $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$ har vi slutteligt

$$\int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{(x+1)^3}\ \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

Opgave 8

Benyt laplacetransformationen til at løse følgende differentialligning for $u(t)$,

$$\frac{du(t)}{dt} = 2\int_0^t u(t')e^{-(t-t')}\,\mathrm{d}t'$$

med startbetingelsen $u(0) = 1$.

Svar

Vi kan enten direkte anvende laplacetransformationen eller benytte udtrykket for laplacetransformationen af et foldningsintegrale

$$s\hat{u}(s) - 1 = 2\frac{\hat{u}(s)}{1+s},$$

hvilket giver, at

$$\hat{u}(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)}.$$

Fra den inverse laplacetransformation fås endeligt, at

$$u(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{t}$$