Eksamen i Matematik F2, 16. juni 2020

Eksamenssættet indeholder 8 opgaver (som vægtes lige). Bøger og noter er tilladte hjælpemidler. Lommeregnere, computere og andre elektroniske hjælpemidler er IKKE tilladte til at udregne opgaverne, men kan bruges til at indtaste dem i forbindelse med indleveringen. Ved besvarelsen lægges der vægt på, at det klart fremgår, hvorledes resultater opnås, men stringente matematiske beviser vil ikke være nødvendige.

Opgave 1

Skriv følgende to funktioner på formen $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, hvor $u(x, y)$ er realdelen og $v(x, y)$ er imaginærdelen. Vi angiver de komplekse tal på formen $z = x + iy$, hvor x og y er reelle.

a) $f(z) = \frac{1}{5z}$

b) $f(z) = \cos(z)$

Opgave 2

Bestem konvergensradiussen for den uendelige række:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^n}{(3n)!} .$$

Opgave 3

Find Laurent-rækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a)

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z-3)}{(z-3)^2}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 3$$

b)

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-5)}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 5$$

Opgave 4

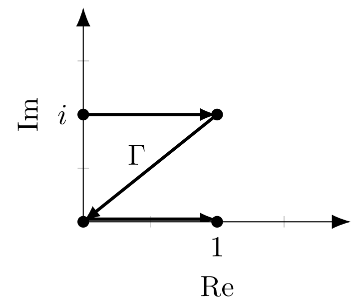
Udregn følgende reelle integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{13 + 5\cos\theta} \, \mathrm{d}\theta$$

Opgave 5

Udregn værdien af følgende integrale, hvor integrationsvejen Γ består af liniesegmenter gennem følgende punkter $(z = i) \to (z = 1 + i) \to (z = 0) \to (z = 1)$ (se figuren),

$$\int_\Gamma e^{\pi z} dz$$



Opgave 6

Beregn principalværdien af følgende integrale (ved brug af et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \exp(i\pi x)}{1 - x^2} \mathrm{dx}$$

Husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver. Benyt den fundne værdi til at vise, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{1 - x^2} \mathrm{dx} = \pi$$

Opgave 7

Benyt laplacetransformationen til at løse følgende ligning for $u(t)$,

$$u(t) = 1 + 4 \int_0^t t' u(t - t') \; \mathrm{d}t'$$

med startbetingelsen $u(0) = 1$.

Opgave 8

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at udregne integralet (langs den reelle akse)

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x^2 + \pi^2)} dx = \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}} \qquad (1)$$

Angiv en passende integrationsvej og husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver. Du vil muligvis få brug for en eller flere af følgende værdier $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ og $\sin(\pi/6) = 1/2$.