Svar til eksamen i Matematik F2, 16. juni 2020

Opgave 1

Skriv følgende to funktioner på formen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, hvor $u(x,y)$ er realdelen og $v(x,y)$ er imaginærdelen. Vi angiver de komplekse tal på formen $z = x + iy$, hvor x og y er reelle.

a) $f(z) = \frac{1}{5z}$

b) $f(z) = \cos(z)$

Svar:

a)

$$f(z) = \frac{1}{5z} = \frac{1}{5(x+iy)} = \frac{x-iy}{5(x^2+y^2)} = \frac{x}{5(x^2+y^2)} - i\frac{y}{5(x^2+y^2)}$$

Dvs. $u(x,y) = \frac{x}{5(x^2+y^2)}$ og $v(x,y) = -\frac{y}{5(x^2+y^2)}$.

b)

$$f(z) = \cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos(x) + i\sin(x)) + e^{y}(\cos(x) - i\sin(x))\right)$$

hvilket igen giver, at

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}[\cos(x) + i\sin(x)] + e^{y}[\cos(x) - i\sin(x)]\right) = \cosh(y)\cos(x) - i\sinh(y)\sin(x)$$

Dvs. $u(x,y) = \cosh(y)\cos(x)$ og $v(x,y) = -\sinh(y)\sin(x)$.

Opgave 2

Bestem konvergensradiussen for den uendelige række:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^n}{(3n)!}\,.$$

Svar:

Forholdstesten giver at

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(3n)!}{n(3(n+1))!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n((3n+3)(3n+2)(3n+1))} = 0$$

dvs. $R = \infty$

Opgave 3

Find Laurent-rækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a)

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z-3)}{(z-3)^2}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 3$$

b)

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-5)}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 5$$

Svar:

a)

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z-3)}{(z-3)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-3)^{2(k-1)}$$

b)

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-5)} = \frac{1}{(z-5)}\frac{1}{(4+z-5))} = \frac{1}{4(z-5)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-5}{4}\right)^k$$

Opgave 4

Udregn følgende reelle integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{13 + 5\cos\theta}\ \mathrm{d}\theta$$

Svar:

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{13 + 5\cos\theta}\ \mathrm{d}\theta = \oint_{C_{R=1}} \frac{3}{13 + \frac{5}{2}(z + \frac{1}{z})}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{1}{i}\oint_{C_{R=1}} \frac{\frac{6}{5}}{z^2 + \frac{26}{5} + 1}\mathrm{d}z$$

Hvis vi faktoriserer nævneren kan integralet skrive på formen

$$\frac{1}{i}\oint_{C_{R=1}} \frac{\frac{6}{5}}{(z+5)(z+1/5)}\mathrm{d}z$$

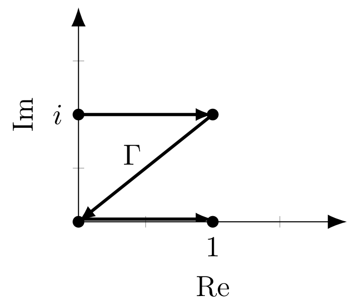
Integranden har to simple poler i hhv $z = -5$ og $z = -1/5$, hvor kun sidstnævnte ligger inden for integrationsvejen, vi får derfor

$$\frac{1}{i}\oint_{C_{R=1}} \frac{\frac{6}{5}}{(z+5)(z+1/5)}\mathrm{d}z = 2\pi i Res(-1/5) = \pi/2$$

Opgave 5

Udregn værdien af følgende integrale, hvor integrationsvejen Γ består af liniesegmenter gennem følgende punkter $(z = i) \to (z = 1 + i) \to (z = 0) \to (z = 1)$ (se figuren),

$$\int_\Gamma e^{\pi z} dz$$



Svar:

Kan regnes langs den anviste vej eller langs en vilkårlig anden vej fordi integranden er analytisk i hele den komplekse plan, og derved kan integralet aflæses direkte fra stamfunktionen

$$\int_\Gamma e^{\pi z} dz = \frac{1}{\pi}(e^\pi + 1)$$

Opgave 6

Beregn principalværdien af følgende integrale (ved brug af et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \exp(i\pi x)}{1 - x^2} \mathrm{dx}$$

Husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver. Benyt den fundne værdi til at vise, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{1 - x^2} \mathrm{dx} = \pi$$

Svar:

Integranden har simple poler i $x = \pm 1$,og eller ikke andre poler. Vi får derfor, at

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \exp(i\pi x)}{1 - x^2} \mathrm{dx} = \pi i \left(Res(1) + Res(-1) \right) = \pi i (1/2 + 1/2) = \pi i$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{1 - x^2} \mathrm{dx} = Im \left[P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \exp(i\pi x)}{1 - x^2} \mathrm{dx} \right] = \pi$$

Opgave 7

Benyt laplacetransformationen til at løse følgende ligning for $u(t)$,

$$u(t) = 1 + 4 \int_0^t t' u(t - t')\ \mathrm{d}t'$$

med startbetingelsen $u(0) = 1$.

Svar:

Vi anvender laplacetransformationen på begge sider, og udnytter samtidig at integralet er en foldning, til at få

$$\hat{u} = \frac{1}{s} + 4\frac{1}{s^2}\hat{u}.$$

Hvis vi isolerer $\hat{u}$ fås

$$\hat{u} = \frac{s}{(s^2 - 4)}$$

Vi bemærker at $\hat{u}$ har simple poler i $s = \pm 2$ og benytter nu den inverse laplacetransformation til at få

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \frac{se^{st}}{(s^2 - 4)} ds = Res(2) + Res(-2) = \frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} = \cosh(2t)$$

Opgave 8

Benyt et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan til at udregne integralet (langs den reelle akse)

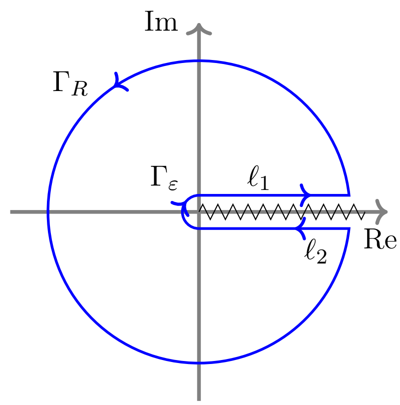
$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x^2 + \pi^2)} dx = \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}$$

Angiv en passende integrationsvej og husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver. Du vil muligvis få brug for en eller flere af følgende værdier $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ og $\sin(\pi/6) = 1/2$.

Flertydighed. Integranden $f(x) = x^{1/3}/(x^2 + \pi^2)$ er flertydig med et forgreningspunkt i $z = 0$. Det ses ved, at værdien af integranden ændres, hvis man går en runde om origo

$$f(x) = \frac{x^{1/3}}{x^2 + \pi^2} \qquad \xrightarrow{\theta + 2\pi} \qquad \frac{(e^{2\pi i}x)^{1/3}}{(e^{2\pi i}x)^2 + \pi^2} = e^{2\pi i/3}\frac{x^{1/3}}{x^2 + \pi^2} = e^{2\pi i/3} f(x)$$

For at forhindre flertydighed introducerer vi en opskæringslinie langs den postive reelle akse.



Integrationsvej. Integralet, vi er interesseret i, udregnes langs den øvre side af opskæringslinien

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2 + \pi^2}\, \mathrm{d}x = \int_{\ell_1} \frac{z^{1/3}}{z^2 + \pi^2}\, \mathrm{d}z$$

For at bruge Cauchys sætning indfører vi ekstra integrationsveje som hjælp til at udregne integralet, en langs den nedre side af opskæringslinien ℓ_2, en langs en cirkel i uendelig Γ_R og en langs en lille halvcirkel omkring venstre side af origo Γ_ϵ.

Singulære punkter. Fra Cauchys sætning er integrationen langs alle disse veje (samlet en lukket kurve) givet ved summen af residuerne inden for integrationsvejen. Vi ser, at nævneren kan faktoriseres, $x^2+\pi^2 = (x-i\pi)(x+i\pi)$, og aflæser direkte, at der er to simple poler i $x = i\pi$ og $x = -i\pi$. Disse poler ligger begge inden for integrationsvejen og derfor er

$$\oint_{\ell_1+\Gamma_R+\ell_2+\Gamma_\varepsilon} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i\Big(Res(-i\pi) + Res(i\pi)\Big),$$

hvor vi får at

$$Res(i\pi) = \lim_{z\to i\pi}\Big((z-i\pi)f(z)\Big) = \frac{i^{1/3}\pi^{1/3}}{2i\pi} = \frac{\pi^{1/3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2i\pi}$$

og

$$Res(i\pi) = \lim_{z\to -i\pi}\Big((z+i\pi)f(z)\Big) = \frac{\pi^{1/3}\left(e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)^{1/3}}{-2i\pi} = \frac{\pi^{1/3}e^{i\frac{\pi}{2}}}{-2i\pi}$$

Vi beholder den imaginære enhed i nævneren da vi omlidt muliplicerer residuerne med $2\pi i$.

Bidrag fra enkelte segmenter. Vi ser at integrationen langs den ydre cirkel ikke bidrager til integralet idet

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \le 2\pi R \max_{z\in\Gamma_R}|f(z)| \overset{R\to\infty}{\to} 0.$$

Vi har her brugt, at (for alle z på Γ_R)

$$|zf(z)| \overset{R\gg 1}{\approx} R(R^{1/3}/R^2) = R^{-2/3} \quad \overset{R\to\infty}{\to} \quad 0$$

og at nævneren i integranden for store radier er: $1+R^2 \approx R^2$.

Sagt i ord, så er integralet mindre end eller lig med maksimumsværdien af integranden langs integrationsvejen ganget med længden af integrationsvejen, som er $2\pi R$. Da maksimumsværdien går hurtigere mod nul end længden af integrationsvejen vil integralet være nul. På lignende vis, ser vi nu, at bidraget fra Γ_ϵ er nul når radius, ϵ, går mod nul,

$$\left|\int_{\Gamma_\epsilon} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \le \pi\epsilon \max_{z\in\Gamma_\epsilon}|f(z)| \overset{\epsilon\to 0}{\to} 0$$

idet (for alle z på Γ_ϵ)

$$|zf(z)| \overset{\epsilon\ll 1}{\approx} \epsilon(\epsilon^{1/3}) = \epsilon^{4/3} \quad \overset{\epsilon\to 0}{\to} \quad 0$$

Vi har her benyttet, at nævneren i integranden for små radier: $1+\epsilon^2 \approx 1$.

De sidste skridt. I grænserne for hhv. store og små radier på de cirkulære veje kan vi se bort fra Γ_ϵ og Γ_R, og derfor får vi, at

$$\oint_{\ell_1+\Gamma_R+\ell_2+\Gamma_\varepsilon} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\ell_1+\ell_2} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i \Big(Res(-i\pi) + Res(i\pi) \Big)$$

Integralet langs ℓ_2 svarer til at integrere x fra uendelig til nul, men bemærk, at vi ikke kan krydse opskæringslinien, og derfor vil x langs ℓ_2 antage værdien $e^{2\pi i}x$, som indsættes i integranden, og vi får derved

$$\int_{\ell_1+\ell_2} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2+\pi^2}\ \mathrm{d}x + \int_\infty^0 \frac{(xe^{2\pi i})^{1/3}}{x^2+\pi^2}\ \mathrm{d}x = (1-e^{2\pi i/3}) \int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2+\pi^2}\ \mathrm{d}x$$

Det skal nu være lig summen af residuerne

$$(1-e^{2\pi i/3}) \int_0^\infty \frac{x^{-1/3}}{x^2+\pi^2}\ \mathrm{d}x = \pi^{1/3}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$

Herfra bliver beregningen lidt teknisk, men det er en god øvelse (!!) at prøve at gå igennem de enkelte trin herunder (en test af hvor godt man har styr på den komplekse eksponentialfunktion)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2+\pi^2}\ \mathrm{d}x &= \frac{\pi^{1/3}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}} \\
&= \frac{\pi^{1/3}e^{-i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{2\pi}{6}} + e^{-i\frac{2\pi}{6}}\right)}{e^{i\frac{2\pi}{6}}\left(e^{-i\frac{2\pi}{6}} - e^{i\frac{2\pi}{6}}\right)} \\
&= \frac{\pi^{1/3} i\left(e^{i\frac{2\pi}{6}} + e^{-i\frac{2\pi}{6}}\right)}{e^{i\frac{2\pi}{6}} - e^{-i\frac{2\pi}{6}}} \\
&= \pi^{1/3}\frac{\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} \\
&= \frac{\pi^{1/3}}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Vi har brugt følgende værdier $\cos(\pi/3) = 1/2$ og $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.