## Eksamen i Matematik F2, 22. juni 2021

Eksamenssættet indeholder 8 opgaver (som vægtes lige). Bøger og noter er tilladte hjælpemidler. Lommeregnere, computere og andre elektroniske hjælpemidler er IKKE tilladte hjælpemidler til at udregne opgaverne, men kan bruges til at indtaste dem i forbindelse med indleveringen. Ved besvarelsen lægges der vægt på, at det klart fremgår, hvorledes resultater opnås, men stringente matematiske beviser vil ikke være nødvendige.

### Opgave 1

Skriv følgende to funktioner på formen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, hvor $u(x,y)$ er realdelen og $v(x,y)$ er imaginærdelen. Vi angiver de komplekse tal på formen $z = x + iy$, hvor $x$ og $y$ er reelle, og den komplekskonjugerede til $z$ angives som $z^*$.

a) $f(z) = \frac{1}{z+z^*}$

b) $f(z) = \ln(1+z)$

### Opgave 2

Bestem konvergensradiussen for den uendelige række:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(4n)^n}\,.$$

### Opgave 3

Find Laurent-rækkerne omkring punkterne $z_0$ for funktionerne

a)

$$f(z) = \frac{\exp(z-2) - 1}{(z-2)^3}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 2$$

b)

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-5)}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = -2$$

### Opgave 4

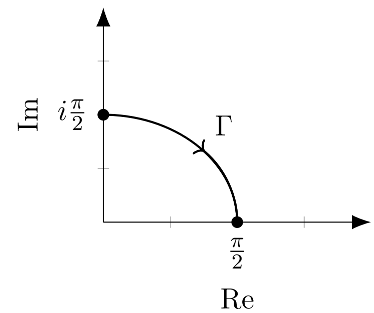
Udregn følgende reelle integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta} + \frac{3}{4}}\, \mathrm{d}\theta$$

**Opgave 5**

Udregn værdien af følgende integrale, hvor integrationsvejen $\Gamma$ er beskrevet ved $\frac{\pi}{2}\exp(i\theta)$, hvor $\theta$ løber fra $\theta_{\text{start}} = \pi/2$ til $\theta_{\text{slut}} = 0$ (se figuren),

$$\int_\Gamma \cos(z) dz$$




**Opgave 6**

Beregn principalværdien af følgende integrale (ved brug af et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{\pi^2 - x^2} \mathrm{dx}$$

Husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver.

**Opgave 7**

Vis at følgende integrale antager den givne værdi ved hjælp af kontourintegration i den komplekse plan (husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver)

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^3} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$$

**Opgave 8**

Benyt Laplacetransformationen til at løse følgende differentialligning for $u(t)$,

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-t'} u(t-t')\mathrm{d}t' = 0$$

med startbetingelsen $u(0) = 1$.