Svar til eksamen i Matematik F2, 22. juni 2021

Opgave 1

Skriv følgende to funktioner på formen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, hvor $u(x,y)$ er realdelen og $v(x,y)$ er imaginærdelen. Vi angiver de komplekse tal på formen $z = x + iy$, hvor x og y er reelle, og den komplekskonjugerede til z angives som z^*.

a) $f(z) = \frac{1}{z+z^*}$

b) $f(z) = \ln(1+z)$

Svar:

a)

$$f(z) = \frac{1}{z+z^*} = \frac{1}{x+iy+x-iy} = \frac{1}{2x} + 0i$$

Dvs. $u(x,y) = \frac{1}{2x}$ og $v(x,y) = 0$.

b)

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left[(1+x)^2 + y^2\right]$$

og

$$v(x,y) = \tan^{-1}[y/(1+x)]$$

Opgave 2

Bestem konvergensradiussen for den uendelige række:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(4n)^n}\,.$$

Svar:

Benytter kvotienttesten og får

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(4n)^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n}\right) = 0$$

Opgave 3

Find Laurent-rækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a)

$$f(z) = \frac{\exp(z-2)-1}{(z-2)^3}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 2$$

b)

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-5)}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = -2$$

Svar:

a)

$$\frac{\exp(z-2)-1}{(z-2)^3} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-2)^k}{k!}}{(z-2)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-2)^{k-2}}{(k+1)!}$$

b)

$$\frac{1}{(z+2)(z-5)} = \frac{1}{(z+2)} \frac{1}{(z+2-7)} = -\frac{1}{(z+2)} \frac{1}{7(1-(z+2)/7)} = -\frac{1}{7} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+2)^{k-1}}{7^k}$$

Opgave 4

Udregn følgende reelle integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta} + \frac{3}{4}} \, \mathrm{d}\theta$$

Svar:

$$\int_0^{2\pi} \frac{4e^{i\theta}}{4e^{2i\theta} - 8e^{i\theta} + 3} \, \mathrm{d}\theta = \oint_{C_{R=1}} \frac{4z}{4z^2 - 8z + 3} \frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{1}{i} \oint_{C_{R=1}} \frac{1}{(z-1/2)(z-3/2)} \mathrm{d}z$$

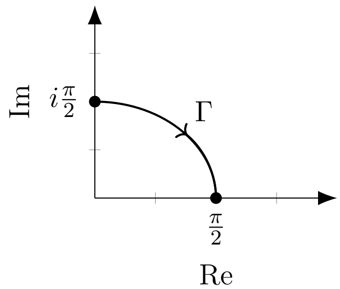
Integranden har to simple poler i hhv $z = 3/2$ og $z = 1/2$, hvor kun sidstnævnte ligger inden for integrationsvejen, vi får derfor

$$\frac{1}{i} \oint_{C_{R=1}} \frac{1}{(z-1/2)(z-3/2)} \mathrm{d}z = 2\pi i Res(1/2) = -2\pi$$

Opgave 5

Udregn værdien af følgende integrale, hvor integrationsvejen Γ er beskrevet ved $\frac{\pi}{2}\exp(i\theta)$, hvor θ løber fra $\theta_{\text{start}} = \pi/2$ til $\theta_{\text{slut}} = 0$ (se figuren),

$$\int_\Gamma \cos(z) dz$$



Svar:

Kan regnes langs den anviste vej eller langs en vilkårlig anden vej fordi integranden er analytisk i hele den komplekse plan, og derved kan integralet aflæses direkte fra stamfunktionen

$$\int_\Gamma \cos z \mathrm{d}z = 1 - i\sinh(\pi/2)$$

Opgave 6

Beregn principalværdien af følgende integrale (ved brug af et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{\pi^2 - x^2} \mathrm{dx}$$

Husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver.

Svar:

Integranden har simple poler i $x = \pm\pi$, og ikke andre poler. Vi får derfor, at

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{\pi^2 - x^2} \mathrm{dx} = \pi i \left(Res(\pi) + Res(-\pi)\right) = \pi i(-1+1)/(2\pi) = 0$$

Opgave 7

Vis at følgende integrale antager den givne værdi ved hjælp af kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^3}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$$

Svar:

frivillig aflevering.

Opgave 8

Benyt Laplacetransformationen til at løse følgende differentialligning for $u(t)$,

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-t'} u(t-t')\mathrm{d}t' = 0$$

med startbetingelsen $u(0) = 1$.

Svar:

Vi anvender laplacetransformationen på begge sider, og udnytter samtidig at integralet er en foldning, til at få

$$s\hat{u} - 1 + \frac{1}{2}\frac{\hat{u}}{1+s} = 0.$$

Hvis vi isolerer $\hat{u}$ fås

$$\hat{u} = \frac{1+s}{(s^2 + s + \frac{1}{2})}$$

Vi bemærker at $\hat{u}$ har simple poler i $s = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$ og benytter nu den inverse laplacetransformation til at få

$$u(t) = e^{-t/2}\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$