Eksamen i Matematik F2, 21. juni 2022

Eksamenssættet indeholder 8 opgaver (som vægtes lige). Bøger og noter er tilladte hjælpemidler. Lommeregnere, computere og andre elektroniske hjælpemidler er IKKE tilladte hjælpemidler. Ved besvarelsen lægges der vægt på, at det klart fremgår, hvorledes resultater opnås, men stringente matematiske beviser vil ikke være nødvendige.

Opgave 1

Skriv følgende to funktioner på formen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, hvor $u(x,y)$ er realdelen og $v(x,y)$ er imaginærdelen. Vi angiver de komplekse tal på formen $z = x + iy$, hvor x og y er reelle.

a) $f(z) = \frac{z}{z+1}$

b) $f(z) = \exp\left(i\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)$

Svar:

a)

$$u(x,y) = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2} \qquad v(x,y) = \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$$

b)

$$u(x,y) = \left(1 + \exp(-y)\cos(x)\right)/2 \qquad v(x,y) = \exp(-y)\sin(x)/2$$

Opgave 2

Bestem konvergensradiussen for den uendelige række:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n e^{5n}}{n^n}\,.$$

Svar:

Fra rodtesten følger at

$$R = \infty$$

Opgave 3

Find Laurent-rækkerne omkring punkterne z_0 for funktionerne

a)

$$f(z) = \frac{\cos(z-2) - 1}{(z-2)^3}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 2$$

b)

$$f(z) = \frac{z-2}{4z^2 - 16z + 16}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 2$$

Svar:

a)

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^{2n-3}}{(2n!)}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 2$$

b)

$$f(z) = \frac{1}{4(z-2)}, \quad \text{hvor} \quad z_0 = 2$$

Opgave 4

Udregn følgende integrale ved kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^{2\pi} \frac{4}{4 + 5\cos(\theta) + 3i\sin(\theta)} \, \mathrm{d}\theta$$

Svar:

$$\frac{1}{i} \oint \frac{4}{4z^2 + 4z + 1} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{i} \oint \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} \, \mathrm{d}z = 0$$

Pol af 2. orden med residue lig nul og derfor er integralet også nul.

Opgave 5

Benyt Laplacetransformationen til at løse følgende ligning for $u(t)$,

$$\frac{du(t)}{dt} + u(t) = \sin t$$

med startbetingelsen $u(0) = 0$.

Svar:

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + \sin t - \cos t\right)$$

Opgave 6

Beregn principalværdien af følgende integrale (ved brug af et passende valg af kurveintegraler i den komplekse plan)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x-i)^2} \mathrm{dx}$$

Husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver.

Svar:

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x-i)^2} \mathrm{dx} = -\pi i \mathrm{Res}(-1) = -\pi/2$$

Opgave 7

Benyt Laplace-transformationen til at løse følgende system af differentialligninger for $x(t)$ og $y(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -2x + 6y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 6x - 2y \end{aligned}$$

med startbetingelsen $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Svar:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\left(e^{4t} - e^{-8t}\right) \\ y(t) &= \frac{1}{2}\left(e^{-8t} + e^{4t}\right) \end{aligned}$$

Opgave 8

Udregn følgende integrale ved hjælp af kontourintegration i den komplekse plan (husk at argumentere for værdien af integralet langs de valgte kurver)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{1/4}}{(x+1)(x+3)} \, \mathrm{d}x$$

Svar:

Simple poler i -1 og -3.

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/4}}{(x+1)(x+3)}\, \mathrm{d}x = \frac{3^{1/4}-1}{\sqrt{2}}\pi$$