Note om Laplace-transformationen

Den harmoniske oscillator omskrevet til et ligningssystem

I dette opgavesæt benyttes laplacetransformationen til at løse koblede differentialligninger. Fordelen ved at benytte laplacetransformationen er, at vi kan transformere differentialligningerne over til et sæt af algebraiske ligninger, som i mange tilfælde vil være lettere at løse. Vi skal som eksempel bruge den harmoniske oscillator, som er beskrevet ved den ordinære differentialligning

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0. \tag{1}$$

Hvis vi dividerer igennem med massen og definerer egenfrekvensen $\omega_0^2 = k/m$, så kan ligningen skrives på formen

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{2}$$

Den andenordens afledte mht. tid har vi skrevet på den kortere form $\ddot{x}$. Vi kunne nu løse denne ligning direkte ved at bruge laplace- eller fouriertransformationen, men istedet, skal vi her løse ligningen ved at omskrive den til to koblede førsteordensligninger. Vi kan definere en ny variabel $y = \dot{x}$ (hastigheden). Hvis vi indsætter y i ligning (2) vil vi ende op med følgende to ligninger

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) \\ \dot{y}(t) &= -\omega_0^2 x(t) \end{aligned} \tag{3}$$

Hvis vi anvender laplacetransformationen på begge af disse ligninger, så får vi et sæt af algebraiske ligninger (to ligninger med to ubekendte)

$$\begin{aligned} s\hat{x}(s) &= x_0 + \hat{y}(s) \\ s\hat{y}(s) &= y_0 - \omega_0^2 \hat{x}(s) \end{aligned} \tag{4}$$

Vi har her angivet betingelserne til $t = 0$, $x_0 = x(0)$ og $y_0 = y(0)$. Ligningssystemet, hvor $\hat{x}$ og $\hat{y}$ er de ubekendte, kan skrives på matriksformen:

$$\begin{pmatrix} s & -1 \\ \omega_0^2 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Løsningen findes direkte med hjælp fra liniær algebra (tjek!), og antager formen

$$\begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \begin{pmatrix} sx_0 + y_0 \\ -\omega_0^2 x_0 + sy_0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Ved at anvende den inverse laplacetransformation, kan vi nu finde $x(t)$ og $y(t)$.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{sx_0+y_0}{s^2+\omega_0^2}e^{st}ds & (7)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{sx_0+y_0}{(s-i\omega_0)(s+i\omega_0)}e^{st}ds & (8)\\ & & (9)\end{aligned}$$

Vi ser, at udtrykket har to simple poler på den imaginære akse i $s = \pm i\omega_0$. Vi kan derfor udføre integralet ved at vælge $\lambda > 0$ og, hvis vi antager, at $t > 0$, så kan vi lukke integrationsvejen med en halvcirkel i den negative halvplan (Re$z < 0$). Integralet er nu givet ved residuerne i de to poler, og antager værdien

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}+y_0\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2i\omega_0} & (10)\\ &= x_0\cos\omega_0 t+y_0\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} & (11)\end{aligned}$$

Dette er løsningen til den harmoniske oscillator for sted-koordinaten. På lignende vis kan vi anvende den inverse laplacetransformationen på $\hat{y}$ og derved opnå (tjek at det er tilfældet)

$$y(t) = -\omega_0 x_0 \sin\omega_0 t + y_0\cos\omega_0 t. \qquad (12)$$

Det ses direkte at $y(t)$ er den tidsafledte af $x(t)$.

Kommentar – Hvis vi plotter kurven $(x(t), y(t))$, parameteriseret ved tiden, så ser vi, at den er en ellipse. Formen på ellipsen kan vi også udlede ved at betragte den samlede energi af oscillatoren.

$$E = \frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}my^2 \qquad (13)$$

Hvis vi tager den tidsafledte af energien, så får vi udtrykket

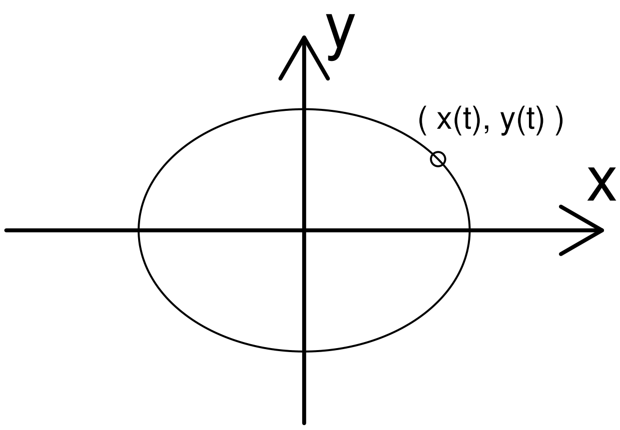
$$\dot{E} = kx\dot{x}+my\dot{y} \qquad (14)$$

Vi har her benyttet at

$$\frac{dx^2(t)}{dt} = 2x(t)\frac{dx(t)}{dt} = 2x\dot{x} \qquad (15)$$

Vi ser nu ved at indsætte ligningerne fra (3), at energien ikke ændrer sig over tid.

$$\dot{E} = kxy-\omega_0^2 myx = kxy-\frac{k}{m}myx = 0 \qquad (16)$$



Figur 1: Løsningskurve til den harmoniske oscillator. Løsningskurven er givet ved en lukket ellipse, hvor en runde på ellipsen svarer til en periode for oscillatoren.

Det vil sige at energien er bevaret for oscillatoren, og vil derfor til enhver tid være lig initial betingelsen, $E(t) = E_0$. Vi kan man andre ord skrive (13)

$$2E_0/m = \omega_0^2 x^2 + y^2 \tag{17}$$

Da venstresiden er konstant i tid, så er denne ligning netop ligningen for en ellipse, se figur 1.

Opgave 1

Vi betragter nu ligningen for den dæmpede oscillator, som kan skrives på formen

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0. \tag{18}$$

Som i ovenstående kan vi igen dividere igennem med massen, således at vi får følgende ligning

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{19}$$

hvor $\beta = \gamma/m$ og ω_0 er egenfrekvensen som defineret i ovenstående. Omskriv nu denne ligning til et system af førsteordensligninger ligesom i ovenstående ved at definere en ny variabel $y = \dot{x}$. Antag at $x(0) = x_0$ og $y(0) = 0$, tag den laplacetransformerede af ligningssystemet. Ligesom i ligningerne (3) vil du nu have to algebraiske ligninger.

$$\begin{pmatrix} s & -1 \\ \omega_0^2 & s+\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Vis at løsningen til disse ligninger kan skrives på formen (ja, det kan gøres i Maple og lignende programmer, men gør det med papir og blyant, og vind et par lette stræberpoint)

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + \beta s + \omega^2} \begin{pmatrix} (s+\beta)x_0 + y_0 \\ -\omega_0^2 x_0 + s y_0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Antag nu, at $y_0 = 0$ og brug derefter den inverse laplacetransformation til at finde $x(t)$ og $y(t)$. Resultatet kan skrives på mange måder, en måde er at skrive det ved hjælp af hyperbolske funktioner:

$$x(t) = e^{-\frac{\beta t}{2}} \left[\cosh\left(t\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2}/2 \right) + \beta \frac{\sinh\left(t\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2}/2 \right)}{\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2}} \right] \tag{22}$$

- Tjek at for $\beta = 0$ så opnår vi samme løsning som for den udæmpede oscillator. Vi ser at hvis $\beta > 0$, så dæmpes bevægelsen eksponentielt.
- Tjek at hvis $|\omega_0| > |\beta|$, så har vi en oscillerende men dæmpet bevægelse.

I tilfældet, hvor $|\omega_0| < |\beta|$, så har vi en overdæmpet oscillator, hvor der ikke er nogen oscillation men kun et eksponentielt henfald.

- Den udæmpede oscillator danner ellipser, som vist i figur 1. Hvordan ser kurverne ud for den dæmpede oscillator? Plot $(x(t), y(t))$ for forskellige værdier af β og forklar, hvad du ser, i termer af energien E(t).

Opgave 2

Laplace-transformationen kan benyttes til at løse generelle liniære ligningssystemer. Løs f.eks. følgende system for $x(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= 4x - 2y \end{aligned} \tag{23}$$

med startbetingelsen $(x_0, y_0) = (2, -3)$. Bemærk (!) at for at finde $x(t)$, så behøver du ikke at løse hele ligningssystemet. Anvend Laplace-transformmationen til at få et sæt af algebraiske lingninger, og brug den ene ligning til at isolere $\hat{x}$ i den anden. Anvend den inverse Laplace-transformation på $\hat{x}$ og du skulle gerne komme frem til løsningen

$$x(t) = e^{2t} + e^{-3t} \tag{24}$$

Løsning af 1D-advektionsligningen

De fleste fysikproblemer løses ved at nedskrive basale bevaringslove. Kontinuitetsligningen er et eksempel på en bevaringslov, som for et skalarfelt $\rho(\mathbf{x}, t)$ antager følgende form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \tag{25}$$

hvor $\nabla \cdot \mathbf{j}$ er divergense af fluksen $\mathbf{j}$ af ρ. Hvis ρ angiver massetætheden i et punkt, så siger ligningen at ændringen i massetætheden i tid er lig med den samlede massetæthed, som strømmer ind og ud af punktet (her givet ved divergensen af fluksen). I mange fysikproblemer er fluksen bestemt af en blanding af både advektion og diffusion, hvor den advektive del kan skrives som

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}. \tag{26}$$

I dette udtryk er $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ den lokale hastighed hvormed feltet $\rho(\mathbf{x}, t)$ bevæger sig / advekteres. I nedenstående opgave skal vi undersøge ligningen for diffusiv transport.

Hvis vi indsætter den advektive fluks i kontinuitetsligningen, så får vi følgende ligning

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{27}$$

For at gøre det hele lidt lettere, så skal vi her kun kigge på transport i en dimension. Vi skal yderligere antage at hastigheden er konstant, $v = 1$. Vi opnår herved advektionsligningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \tag{28}$$

Hvis vi til tiden $t = 0$ antager, at $\rho(x, t) = \rho_0(x)$, så kan vi direkte ved at indsætte i ligningen (28) se, at $\rho_0(x - t)$ er en løsning (tjek at det er tilfældet). Vi vil nu gerne komme frem til denne løsning ved at bruge både Fourier- og Laplace-transformationen. Vi skal i følgende antage at $\rho \to 0$ når $|x| \to \infty$. Vi opnår derved fra Fourier-transformationen af ligning (28) følgende ligning.

$$\frac{\partial \tilde{\rho}(k, t)}{\partial t} + ik\tilde{\rho}(k, t) = 0. \tag{29}$$

Hvis vi yderligere anvender Laplace-transformationen, så opnår vi den algebraiske ligning

$$-\tilde{\rho}(k, 0) + s\hat{\tilde{\rho}}(k, s) + ik\hat{\tilde{\rho}}(k, t) = 0, \tag{30}$$

som også kan skrives

$$\hat{\tilde{\rho}}(k, t) = \frac{\tilde{\rho}_0(k)}{s + ik}, \tag{31}$$

hvor $\tilde{\rho}_0(k) = \tilde{\rho}(k,0)$. Vi anvender nu først den inverse Laplace-transformation, og bemærker at der er en simpel pol i $s = -ik$, til at opnå

$$\tilde{\rho}(k,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} ds \frac{\tilde{\rho}_0(k)}{s+ik}e^{st} = \tilde{\rho}_0(k)e^{-ikt}. \tag{32}$$

Løsningen til advektionsligningen fremkommer nu ved at benytte den inverse Fourier-transformation

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\tilde{\rho}_0(k)e^{-ikt}e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\tilde{\rho}_0(k)e^{ik(x-t)} = \rho_0(x-t). \tag{33}$$

I det sidste lighedstegn har vi blot benyttet definitionen af den inverse Fourier-transformation i koordinaten $x - t$. Løsningen til advektionsligningen beskriver hvordan skalarfeltet, uden at ændre form, bevæger sig mod højre med enhedshastighed. Deraf navnet "advektionsnligningen".

Opgave 3

Hvis vi nu anvender at $\mathbf{j} = D\nabla\rho(x,t)$ i kontinuitetsligningen så opnår vi diffusionligningen. I 1D antager den formen

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x^2}$$

Vi skal nu løse denne ligning ved hjælp af Laplace- og Fourier-transformationerne. (Først Laplace-transformeres og Fourier-transformeres ligningen. Herefter bruges den inverse Laplace- og til sidst den inverse Fourier-transformation).

Begyndelsesbetingelser:

$$\rho(x,0) = \delta(x-0)$$

Hints:

1) Start med at fouriertransformere fra x-rum til k-rum. Dvs udregn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}e^{-ikx}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} D\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x^2}e^{-ikx}\,dx$$

Nu har du en ligning for $\tilde{\rho}(k,t)$

2) Laplacetransformer fra t-rum til s-rum. Dvs udregn:

$$\int_0^\infty \frac{\partial\tilde{\rho}(k,t)}{\partial t} e^{-st}\,dt = \int_0^\infty -Dk^2\tilde{\rho}(k,t)e^{-st}$$

Nu har du en ligning for $\overline{\tilde{\rho}}(k,s)$

3) I din ligning skulle $\tilde{\rho}(k,0)$ gerne indgå. Denne udregnes fra begyndelsesbetingelserne:

$$\rho(x,0) = \delta(x-0)$$

$$\tilde{\rho}(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

4) Isoler nu $\overline{\tilde{\rho}}(k,s)$ i ligningen. For at "regne tilbage til $\rho(x,t)$" udfører vi først invers laplace transformation:

$$\tilde{\rho}(k,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \overline{\tilde{\rho}}(k,s)e^{st}\,ds$$

Dette integrale løses ved at finde poler og residuer som sædvanlig.

5) Nu skulle du gerne have $\tilde{\rho}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-Dk^2t}$. Vi vil nu udføre invers fourier:

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-Dk^2t}e^{ikx}\,dk$$

Dette integrale omskrives så det ligner:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$$

For at gøre dette sættes: $u = A+B$. $u^2 = (A+B)^2 = A^2+B^2+2AB$ og samtidig $A^2 = Dk^2t$ og $2AB = ikx$.

Du skulle nu gerne have:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-\left(\sqrt{Dt}k+\frac{ix}{2\sqrt{Dt}}\right)^2} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\,dk$$

Sæt nu $u = \sqrt{Dt}k + \frac{ix}{2\sqrt{Dt}}$.

6) Resultatet skulle gerne være: $\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4Dt\pi}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$

Vi kan altså se at fordeligen $\rho(x,t)$ vil følge en gaussisk fordeling med centrum i $x = 0$ og spredning $\sigma = \sqrt{2Dt}$ (altså en spredning der vokser i tid).