Opgaver uge 1

I denne uge er temaet komplekse tal og komplekse funktioner af en kompleks variabel. De første opgaver skulle gerne øge jeres fortrolighed med komplekse tal. I kan med fordel repetere de basale regneregler i bogens appendix A.5, eller i jeres noter fra MatIntro. I de efterfølgende opgaver kigger vi nærmere på, hvornår komplekse funktioner er differentiable og introducerer i den forbindelse Cauchy-Riemann betingelserne. Betingelserne er gengivet her:

Cauchy-Riemann: En kompleks funktion kan skrives på formen $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, hvor funktionerne u og v er relle og hvor $z = x + iy$. x og y er også reelle. Hvis funktionen $f(z)$ er kompleks differentiabel i punktet z, så gælder der, at

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

På de næste sider finder I 11 opgaver, som skal genopfriske og øge jeres evner til at arbejde med komplekse tal. Nederst i opgavesættet finder I desuden en række ekstra opgaver for de ekstra nysgerrige og ambitiøse.
Der burde være opgaver nok til at fylde tiden ud. Hvis I ikke når de aller sidste opgaver er det ikke nogen katastrofe, men det er vigtigt at I bliver fortrolige med komplekse tal. God fornøjelse.

Opgave 1:
Angiv det komplekse tal

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

på formen $z = r\exp(i\phi)$. Udregn z^2 og z^3 både for formen $x + iy$ og $r\exp(i\phi)$. Hvad er lettest?

Opgave 2:
Skriv følgende komplekse tal på formen $x + iy$ hvor $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $(5 + 2i)(4 - i)$

b) $\dfrac{1}{3 - 4i}$

c) $\dfrac{-5 + 2i}{5 - 4i}$

Opgave 3:
Vis at for to komplekse tal $z, w \in \mathbb{C}$ gælder:

$$(zw)^* = z^* w^*,$$

hvor x^* betyder den kompleks konjungerede af x. Brug dette til at vise at z^*w og zw^* er hinandens konjungerede.

Opgave 4:
Lad $c = a + ib$ være et fast komplekst tal og lad R være et positivt reelt tal. Vis at $|z - c| = R$ er ligningen for en cirkel med centrum c og radius R, når man tænker på de komplekse tal som planen $\mathbb{R}^2$. Gør det først ved at regne og dernæst ved at lave en figur i den komplekse plan. Find nu maximum og minimum for $|z|$ hvis $|z + 3 - 4i| = 2$ - dette gøres absolut lettest på en figur.

Opgave 5:
Vis at for faste komplekse tal a og b er $|z - a| = |z - b|$ ligningen for en ret linie og bestem hvilken linie. Det gøres lettest på en figur. (Det kan også gøres ved at regne).

Opgave 6:
Betragt ligningen $(z - 1)^{10} = z^{10}$

a) Vis geometrisk at de 9 løsninger ligger på en vertikal ret linie med real-del $\mathrm{Re}(z) = 1/2$ (*Tip: Brug foregående opgave og at*

$$(z-1)^{10} = z^{10} \;\Rightarrow\; |z-1| = |z|.$$

Obs: gælder kun den ene vej.)

b) Divider begge sider med z^{10}. Dette giver ligningen $w^{10} = 1$, med $w = (z - 1)/z$. Løs denne, hvilket nemmest gøres på polær form. Brug løsningen til at løse den oprindelige ligning.

c) Udtryk z på formen $x + iy$ og verificer (a).

Opgave 7:
Vis at for $|z| = 1$ er

$$\mathrm{Im}\frac{z}{(z+1)^2} = 0$$

Gør det først ved at regne, altså sæt $z = \exp(i\theta)$ og så bare derudaf. Prøv dernæst at finde et geometrisk argument.

Opgave 8:
For en reel funktion af en reel variabel kan vi i et (x, y)-koordinatsystem på et stykke papir tegne en funktion $y = f(x)$ og med et enkelt blik på tegningen få en god fornemmelse af funktionen. For en kompleks funktion af en kompleks variabel er det lidt sværere. Vi kan skrive $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, hvor $w = u + iv$ og $z = x + iy$ og x, y, u, v er reelle. Så vi skal bruge fire dimensioner til en tegning. Og det kan vi ikke. Lidt fornemmelse kan vi dog godt få alligevel.

Betragt f.eks. $w = z^2$. Hvorledes vil en halvcirkel i z-planen ($z = re^{i\theta}$, r konstant og $\theta \in [0, \pi]$ komme til at se ud i w-planen? Hvorledes vil en linie gennem origo $z = re^{i\theta}$, $r \in [0, \infty)$, θ konstant komme til at se ud?

Indsæt $z = x + iy$ i funktionen $w = z^2$, og identificer $u(x, y)$ og $v(x, y)$ i dette tilfælde. Betragt nu de to funktioner $u(x, y) = k$ og $v(x, y) = k$ (hvor $k \in \mathbb{R}$) . Begge funktioner har asymptoter. Find dem. Hvad hedder funktioner som disse? Overvej hvorfor det var brugbart at tage disse skridt selvom vi stadig ikke kan plotte $w(z)$ i 4 dimensioner

Opgave 9:
Eulers formel $e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$ udledes ofte som en potensrækkeudviklingen. Hvis I ikke har set det, så skriv potensrækken for eksponentialfunktionen af en imaginær variabel. Find realdel og imaginærdel hver for sig og identificer de to potensrækker med cosinus og sinus.

En anden mulighed er at udnytte Cauchy-Riemann betingelserne (1) sammen med det naturlige krav at e^z skal være differentiabel og at

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = u(x, y) + iv(x, y) = e^x \phi(y) + ie^x \psi(y).$$

Løs de fremkomne differentialligninger for ϕ og ψ med naturlige begyndelsesbetingelser (*F.eks. at de er* 0 *og* 1 *i* $y = 0$ *eller omvendt.*)

Opgave 10:
Eulers formel gælder også generelt for komplekse tal:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Brug dette til at vise at sinus og cosinus er givet ved

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Vis nu at sinus er analytisk, hvilket er ækvivalent til at vise, at den opfylder Cauchy-Riemann betingelserne. (*Tip: Indsæt $z = x + iy$ og omskriv til formen* $\sin(z) = u(x, y) + iv(x, y)$).

Opgave 11:
For en kvotientrække gælder:

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1} \tag{2}$$

Sæt $n = 2m$ og vis at summen så kan skrives $S_l + S_u$ med

$$\begin{aligned} S_l &= 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2m-2} \\ S_u &= z + z^3 + \cdots + z^{2m-1} \end{aligned}$$

Vis at $S_u = zS_l$ og bestem dermed S_u. Indsæt $z = \exp(i\theta)$ og vis ved at se på realdel og imaginærdel hver for sig, at

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n - 1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta},$$

og at

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin(2n - 1)\theta = \frac{\sin^2(n\theta)}{\sin\theta}.$$

Er du overbevist om at (2) er sand? Prøv evt. at bevise det ved induktion: Antag først at formlen gælder for n. Vis at det følger at den så også gælder for $n' = n+1$. Vis da at det gælder for $n = 1$, hvilket burde være trivielt. Er det nok til at bevise (2)? Hvorfor?

Ekstra opgaver

Historisk brug af komplekse tal

Komplekse tal blev første gang brugt i 1500 tallet som *ulovlige rødder* til at løse tredjegradsligner. Descartes kaldte dem *imaginære*, fordi de i starten kun blev brugt til at finde reelle løsninger. Det er en lidt ærgelig sprogbrug, der har hængt ved, selvom komplekse tal ikke er en anderledes abstraktion end 0 og negative tal. Vi skal nu se hvordan komplekse rødder optræder i et problem, der både er formuleret med reelle tal og har reelle løsninger:

For at løse den kubiske ligning $x^3 = 3px + 2q$ gør følgende:

a) Få den geniale ide at sætte $x = s + t$ og vis, at x er løsning hvis $st = p$ og $s^3 + t^3 = 2q$.

b) Eliminer t fra disse to ligninger og løs den resulterende kvadratiske ligning i s^3.

c) Bestem så også t. Det kan gøres uden regning ud fra en symmetribetragtning mellem s og t i $p = st$ og $s^3 + t^3 = 2q$.

d) Find så at

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

e) Benyt metoden på $x^3 = 15x + 4$. Et hurtigt gæt viser også at ligningen har et heltal som løsning. Vis at de to løsninger stemmer overens. (Det er ikke helt let).

Inspirationsopgave

Denne opgave illustrerer hvordan komplekse tal kan forståes som geometriske operationer.

Lad $\mathcal{T}_v$ betegne en translation af den komplekse plan med det komplekse tal v, altså $\mathcal{T}_v z = z + v$. To translationer efter hinanden skrives $\mathcal{T}_v \circ \mathcal{T}_w$ og har effekten:

$$(\mathcal{T}_v \circ \mathcal{T}_w)z = \mathcal{T}_v(\mathcal{T}_w z) = (z + w) + v = z + (w + v) = \mathcal{T}_{w+v} z$$

Den inverse til $\mathcal{T}_v$ skrives $\mathcal{T}_v^{-1}$ og det gælder at

$$\mathcal{T}_v \circ \mathcal{T}_v^{-1} = \mathcal{T}_v^{-1} \circ \mathcal{T}_v = \mathcal{I}$$

hvor $\mathcal{I}$ er den identiske afbildning. Desuden er $\mathcal{T}_v^{-1} = \mathcal{T}_{-v}$ Er det åbenlyst?

En rotation omkring et punkt a med en vinkel θ vil vi skrive $\mathcal{R}_a^\theta$. Det er formentligt klart at en rotation omkring origo $\mathcal{R}_0^\theta$ kan skrives

$$\mathcal{R}_0^\theta z = e^{i\theta} z$$

Vis nu ved at benytte at $\mathcal{R}_a^\theta = \mathcal{T}_a \circ \mathcal{R}_0^\theta \circ \mathcal{T}_a^{-1}$ (hvis det ikke er oplagt så lav en tegning og tænk over det) at

$$\mathcal{R}_a^\theta z = e^{i\theta} z + a(1 - e^{i\theta}) = e^{i\theta} z + k$$

Vi kan altså skrive $\mathcal{R}_a^\theta = \mathcal{T}_k \circ \mathcal{R}_0^\theta$. En rotation omkring et punkt a kan altså betragtes som en rotation omkring origo efterfulgt af en translation med $a(1 - e^{i\theta})$.

Prøv at tegne et simpelt eksempel med a reel. Find billedet af et punkt b på den reelle akse $b > a$ direkte ved en rotation om a og ved formlen ovenfor.

Omvendt kan en rotation omkring origo $\mathcal{R}_0^\theta$ efterfulgt af en translation $\mathcal{T}_a$ altid skrives som en enkelt rotation:

$$\mathcal{T}_v \circ \mathcal{R}_0^\theta = \mathcal{R}_c^\theta$$

Vis at $c = v/(1 - e^{i\theta})$

Det omvendte gælder også: $\mathcal{R}_0^\alpha \circ \mathcal{T}_a = \mathcal{R}_p^\alpha$ Bestem p

For to på hinanden følgende rotationer gælder:

$$\mathcal{R}_b^\phi \circ \mathcal{R}_a^\theta = \mathcal{R}_c^{\phi+\theta},$$

hvor

$$c = \frac{ae^{i\phi}(1 - e^{i\theta}) + b(1 - e^{i\phi})}{1 - e^{i(\phi+\theta)}}$$

Vis at dette gælder hvis $\phi + \theta$ ikke er et multiplum af 2π.

Hvis på den anden side $\phi + \theta = 2n\pi$ med n et heltal så er $e^{i(\phi+\theta)} = 1$. Vis at i dette tilfælde gælder:

$$\mathcal{R}_b^\phi \circ \mathcal{R}_a^\theta = \mathcal{T}_v$$

med $v = (1 - e^{i\phi})(b - a)$

Hvis fx $\phi = \theta = \pi$ fås

$$\mathcal{R}_b^\pi \circ \mathcal{R}_a^\pi = \mathcal{T}_{2(b-a)}$$

Illustrer dette på en figur.

Endelig kan man definere en *dilatations* operation $\mathcal{D}_a^{r,\theta}$. (Dilatation betydekr noget i retning af udvidelse. Meningen er at $\mathcal{D}_a^{r,\theta} z$ drejer z om punktet a med vinklen θ og samtidig forstørrer eller formindsker længden med faktoren r. Så

$$\mathcal{D}_0^{r,\theta} z = re^{i\theta} z$$

Dilatation omkring et vilkårligt punkt fås så præcist som rotation om et vilkårligt punkt: $\mathcal{D}_a^{r,\theta} = \mathcal{T}_a \mathcal{D}_0^{r,\theta} \mathcal{T}_a^{-1}$.

De komplekse tal som $\mathbb{R}^2$

I denne opgave skal vi se videre på hvordan komplekse tal kan betragtes som vektorer i $\mathbb{R}^2$. Betragt to tal $a, b \in \mathbb{C}$. Disse kan betragtes som vektorerne:

$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Find nu a^*b med udgangspunkt i a, b på formen $x + iy$ og dernæst på formen $re^{i\phi}$. Bemærk at hvis $a = r_a e^{i\theta_a}$ og $b = r_b e^{i\theta_b}$, så er $\theta := \theta_b - \theta_a$ vinklen mellem de to vektorer.

Se på real-delen og imaginær-delen af a^*b:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(a^*b) &= (xu + yv) = r_a r_b \cos\theta, \\ \mathrm{Im}(a^*b) &= (vx - uy) = r_a r_b \sin\theta. \end{aligned}$$

Kan du genkende udtrykkene fra vektorregning?