Forslag til løsninger uge 1

Opgave 1:
z har radius $\sqrt{1/2+1/2}=1$ og da realdelen og imaginærdelen begge er positive og lige store, er $\phi=\pi/4$, dvs. $z=\exp(\pi i/4)$.
z^2 findes enten ved kvadratformlen som $z^2=1/2-1/2+i(1/2+1/2)=i$, eller på polærformen som $z^2=1^2\exp(\pi i/4\cdot 2)=\exp(i\pi/2)$.
z^3 bliver på samme måde $\exp(i3\pi/4)=-1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}$.

Opgave 2:

a) $(5+2i)(4-i)=22+i\ 3$

b) $\dfrac{1}{3-4i}=3/25+i\ 4/25$

c) $\dfrac{-5+2i}{5-4i}=-33/41-i\ 10/41.$

I de sidste to ganges både tæller og nævner med nævneres konjugerede.

Opgave 3:
Skriv $z=a+ib$ og $w=c+id$ og find zw og z^*w^*.

Opgave 4:
At $|z-c|=R$ beskriver en cirkel kan vises ved at lade $z=x+iy$ og $c=a+ib$. Da bliver $|z-c|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, hvilket er den euklidiske afstand mellem (x,y) og (a,b) i $\mathbb{R}^2$. Maximum og minimum for $|z|$ på cirklen er punkterne hhv. tættest og længst fra 0.

Opgave 5:
$|z-a|=|z-b|$ er alle de tal i den komplekse plan, der har samme afstand fra a og b. De ligger altså på en linie der står vinkelret på forbindelseslinien mellem a og b og som skærer den midtvejs mellem a og b.

Opgave 6:

a) $(z-1)^{10}=z^{10}\Rightarrow |z-1|=|z|$ ($\Leftarrow$ gælder ikke). Ifølge foregående opgave svarer $|z-1|=|z|$ til linien med realdel $=1/2$.

b) $w^{10} = 1 = \exp(2\pi i n), n = 0, \ldots, 9 \Rightarrow w = \exp(2\pi i n/10)$ og dermed $z = 1/(1-w)$: for $w = 1$ fås $z = \infty$ for de andre værdier af w fås

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1 - \exp(2\pi i n/10)} = \frac{\exp(-\pi i n/10)}{\exp(-\pi i n/10) - \exp(i\pi n/10)} \\ &= \frac{\cos(\pi n/10) - i\sin(\pi n/10)}{-2i\sin(\pi n/10)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\cot(\pi n/10) \end{aligned}$$

Opgave 7:
Lad $z = e^{i\phi}$. Så er

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z+1)^2} &= \frac{e^{i\phi}}{e^{i2\phi} + 1 + 2e^{i\phi}} \\ &= \frac{e^{i\phi}(e^{-i2\phi} + 1 + 2e^{-i\phi})}{(e^{i2\phi} + 1 + 2e^{i\phi})(e^{-i2\phi} + 1 + 2e^{-i\phi})} \\ &= \frac{e^{-i\phi} + e^{i\phi} + 2}{|e^{i2\phi} + 1 + 2e^{i\phi}|^2} \\ &= \frac{2\cos\phi + 2}{|e^{i2\phi} + 1 + 2e^{i\phi}|^2}. \end{aligned}$$

Da både tæller og nævner er reelle er imaginærdelen 0.

Opgave 8:

Ved at skrive $z = re^{i\theta}$ ser vi at en halvcirkel bliver til helcirkel, og en linie gennem origo med vinkel θ med den reel akse bliver til linie gennem origo med vinkel 2θ.

For $w = z^2 = u + iv$ fås at $u(x, y) = x^2 - y^2$ og $v(x, y) = 2xy$. Så u konstant svarer til hyperbel med linierne $y = x$ og $y = -x$ som asymptoter; v konstant svarer til hyperbler med x-akse og y-akse som asymptoter.

Opgave 9:
For anden del: $\exp(z) = \exp(x)\exp(iy) = u(x, y) + iv(x, y) = \exp(x)\phi(y) + i\exp(x)\psi(y)$. CR giver $\partial_x\phi = \partial_y\psi \Rightarrow \exp(x)\phi(y) = \exp(x)\psi'(y) \Rightarrow \phi(y) = \psi'(y)$, hvor $\psi'(y) = d\psi/dy$ og den anden $\partial_y\phi = -\partial_x\psi \Rightarrow \exp(x)\phi'(y) = -\exp(x)\psi(y)$. Differentier den først en gang til og indsæt i den anden: $\psi'' = -\psi$ med generel løsning:

$$\psi = a\cos(y) + b\sin(y)$$

Differentier for at få

$$\phi(y) = -a\sin(y) + b\cos(y)$$

Med $u(0) = 1$ og $v(0) = 0$ fås resultatet.

Opgave 10:
Lad $z = x + iy$. Så er

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos(x) + i\sin(x)) - e^{y}(\cos(x) - i\sin(x))}{2i} \\ &= \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\sin(x) + i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\cos(x)\end{aligned}$$

og så er det bare at differentiere derudaf.

Opgave 11:
Vi har $S_l + S_u = (1 - z^n)/(1 - z) \equiv S$ og dermed $S_u(1 + 1/z) = (1 - z^{2m})/(1 - z)$ eller $S_u = z^m(z^{-m} - z^m)/(z^{-1} - z)$.

Indsættes nu $z = e^{i\theta}$ fås rækken som

$$\cos\theta + i\sin\theta + \ldots \cos(2m-1)\theta + i\sin(2m-1)\theta$$

med realdel

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos(2m-1)\theta$$

og imaginærdel

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots \sin(2m-1)\theta$$

Indsættes $z = e^{i\theta}$ i det explicitte udtryk for S_u fås

$$S_u = e^{im\theta}\frac{e^{-im\theta} - e^{im\theta}}{e^{-i\theta} - e^{im\theta}} = (\cos(m\theta) + i\sin(m\theta))\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}$$

Historisk opgave

1. $(s+t)^3 = s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3 = 3ps + 3pt + 2q$. Hvis $p = st$ og $s^3 + t^3 = 2q$, så ok.
2. $t = p/s \Rightarrow s^3 + p^3/s^3 = 2q \Rightarrow s^6 - 2qs^3 + p^3 = 0$. Med $u = s^3$ fås
$$s^3 = u = q \pm \sqrt{q^2 - p^3}$$
3. Symmetri medfører samme udtryk for t^3 og da $s^3 + t^3 = 2q$ må det ene fortegn gælde for den ene og det andet for den anden.

4.
$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

5. $p = 5$, $q = 2$
$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$
Øjensynlig er $x = 4$ også en løsning. Lad $\sqrt[3]{2 + 11i} = a+ib$, så skal $x = 2a = 4$ eller $a = 2$ og dermed $(2+ib)^3 = 2+11i$ og $(2+bi)^3 = 2^3+3\cdot2(ib)^2+3\cdot2^2ib+b^3$ og så passer det med $b = 1$