Opgaver uge 2

I denne uge kigger vi nærmere på Cauchy-Riemann betingelserne, potensrækker, konvergenskriterier og flertydige funktioner. Vi skal også se på integration langs en vej i den komplekse plan.

I den reelle plan er en kurve givet ved en afbildning

$$(x(t), y(t)), \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R},$$

der siges at være parametriseret af t. For eksempel er en cirkel med radius 1 givet ved $x = \cos(t), y = \sin(t)$ hvor $t \in [0, 2\pi[$. Denne kurve kan også beskrives ved hjælp af den komplekse eksponential funktion, $z(t) = e^{it}$.

En kurve er diffentiabel, hvis både $x(t)$ og $y(t)$ er differentiable. En kurve kaldes en *vej*, hvis den er stykvis differentiabel, hvilket betyder at den er differentiabel undtagen i et endeligt antal punkter, $t_1, \ldots, t_n$ med $a < t_1 < \ldots < t_n < b$.

Eksempelvis er liniestykket mellem $(0, 0)$ og $(1, 1)$, der er givet ved $(x(t), y(t)) = (t, t)$ for $t \in [0, 1]$, differentiabelt i hele intervallet, mens vejen, der forbinder de samme to punkter, ved at gå langs x-aksen fra (0,0) til (1,0) og dernæst fra (1,0) til (1,1) er differentiabel undtagen i punktet (1,0).

Til sidst i sættet indføres begrebet Riemannkuglen, der er en anden måde at betragte den komplekse plan på.

Opgave 1:
Vis, at hvis realdelen af en holomorf (analytisk) funktion er konstant (på et åbent område) er funktionen konstant.

Opgave 2:
Vis at CR-betingelserne er opfyldt for $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ og $v(x, y) = -y^3 + 3x^2y$. Hvordan ser den tilsvarende funktion af z ud?

Opgave 3:
Den generelle ligning for en cirkel (og en ret linie) er

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

Angiv for hvilke værdier af koefficienterne det er en cirkel og for hvilke det er en ret linie.

Skriv dette i termer af $z = x + iy$ og $z^* = x - iy$

Indsæt nu $w = 1/z$ eller $z = 1/w$ og bring ligningen i w og w^* på samme form og vis derved at afbildningen $w = 1/z$ afbilder cirkler i cirkler (eller rette linier) og rette linier i rette linier (eller cirkler).

Opgave 4:
Funktionen $1/(1-x^2)$ har rækkeudviklingen:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_j x^{2j}$$

Vis at konvergensradiusen er 1. Bemærk, at $1/(1-x^2)$ har singulariteter for $x = \pm 1$. Det gælder også, at

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_j (-1)^j x^{2j}$$

Vis at denne række også har konvergensradius 1. Hvis vi kun betragter funktionen i de reelle tal og ikke rækkeudviklingen, er dette ikke særligt intuitivt. Hvis vi til gengæld går over i den komplekse plan bliver det mere intuitivt idet $1/(1+z^2)$ har singulariteter for $z = \pm i$.

Opgave 5:
Binominalformlen har formen:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) b^j a^{n-j}$$

hvor n er et heltal og hvor

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) = \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}$$

Den sidste form giver også mening hvis n erstattes af et vilkårligt reelt tal α. Så vi vil definere

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \\ j \end{array} \right) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$$

Vis at

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\left| \left(\begin{array}{c} \alpha \\ j+1 \end{array} \right) \right|}{\left| \left(\begin{array}{c} \alpha \\ j \end{array} \right) \right|} = 1$$

og dermed at potensrækken

$$F(z) = \sum_j \left(\begin{array}{c} \alpha \\ j \end{array} \right) z^j$$

har konvergensradius 1.

Vis at potensrækken $F'(z)$, der fremkommer ved at differentiere $F(z)$ ledvist opfylder:

$$(1+z)F'(z) = \alpha F(z)$$

Vis at denne differentialligning har løsningen $(1+z)^\alpha$.

Opgave 6:
I den komplekse plan er $\sqrt{z}$ en flertydig funktion med et forgreningspunkt (branch point) i 0. Hvis f.eks. den reelle akse udvælges som en opskæringslinie (branch cut) i $\mathbb{C}$ bliver funktionen entydig. Er $\sqrt{z}$ differentiabel overalt i den komplekse plan?

For reelle tal skriver vi ofte $a = \sqrt{4} = \pm 2$. Hvis vi skriver et komplekst tal på formen $z = re^{i\theta}$, hvor r er et positivt reelt tal og $\theta \in [0, 2\pi[$ så er $\sqrt{z} = \sqrt{r}\exp(i(\theta/2 + n\pi))$, med $n = 0, 1$. Udtryk $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{x+iy}$ i real og imaginær dele $u(x,y)$ og $v(x,y)$, dvs. på formen $f(z) = u + iv$.

Opgave 7:
Kurven

$$\gamma(t) = \begin{cases} t^2 + it & \text{for } t \in [0,1] \\ t + i & \text{for } t \in]1,2] \end{cases} ,$$

er stykvis differentiabel. Skitser den. Udregn $\int_\gamma z^2 dz$.

Udregn også integralet af den samme funktion langs den rette linie fra 0 til $2+i$ og igen langs x-aksen fra 0 til 2 efterfulgt af integralet langs y-aksen fra 2 til $2+i$.

Inspirationsopgave

Indledende opgave:
Vis at CR er opfyldt for afbildningen $w = 1/z$. Find Jacobianten (matricen af partielt afledede) og beskriv geometrisk, hvordan den virker på en vektor i den komplekse plan. Det gøres lettest ved at indføre polære koordinater.

(*Hint: anvend additionsformlerne for trigonomiske funktioner. Hvordan ser en rotationsmatrix ud?*)

Tegn en linie gennem origio og cirklen givet ved $z = re^{i\theta}$. Vi kalder punktet $z' = (1/r)e^{i\theta}$ på samme linie en inversion i enhedscirklen. Så finder vi w ved kompleks konjugering af z'.

Riemann kuglen:
Lad den komplekse plan være givet ved x, y-koordinatsystemet med origo i O. Introducer et koordinatsystem ξ, η, ζ, med ζ vinkelret på den komplekse plan, ξ sammenfaldende med x-aksen og η sammenfaldende med y-aksen. Tegn nu en kugle med centrum i origo og radius 1: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$. Nordpolen har så koordinat $(0, 0, 1)$ og sydpolen $(0, 0, -1)$. Den komplekse plan skærer kuglen i ækvator. Lad z være et punkt i den komplekse plan. Tegn en ret linie gennem z og nordpolen. Denne linie skærer kuglen i punktet P med koordinater (ξ, η, ζ). Indfør $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ og $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ og benyt ensvinklede trekanter til at vise at

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{1 - \zeta}{1}$$

og dermed at

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$$
$$\xi = \frac{2x}{r^2 + 1}, \quad \eta = \frac{2y}{r^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$$

Denne måde at projicere et punkt på kuglen ned i en plan kaldes en stereografisk projektion (og kan være ganske god til at tegne kort). Betragtet som afbildning fra den komplekse plan til kuglen har den en række interessante egneskaber. For eksempel afbildes rette linier og cirkler i cirkler på kuglen.

Som set tidligere er ligningen for en cirkel eller en ret linie

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

Indsæt nu x og y i termer af ξ, η, ζ og vis at dette førerer til

$$b\xi + c\eta + (a - d)\zeta + a + d = 0.$$

I det tre dimensionale rum er dette ligningen for en plan og en plan skærer en kugle i en cirkel. Hvis for eksempel $a = 0$ har vi en ret linie i x, y-planen. Den vil blive projiceret over på kuglen over i skæringen mellem

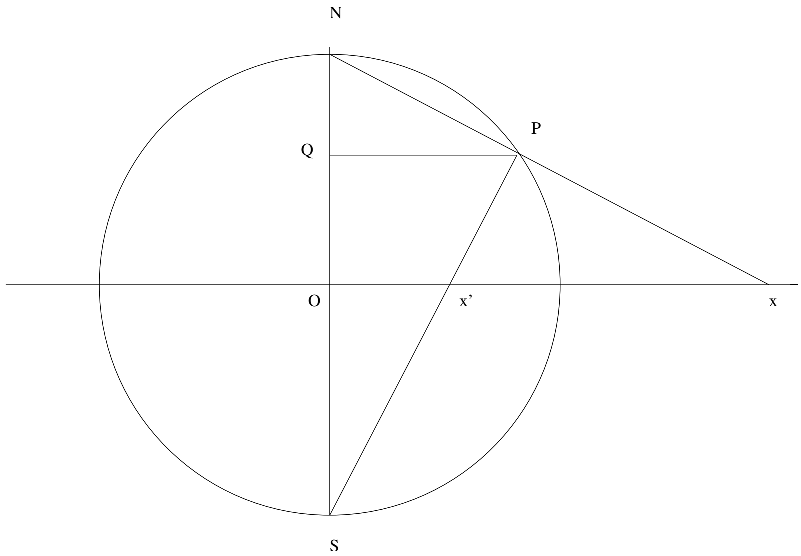
$$\zeta^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1$$
$$b\xi + c\eta - d\zeta + d = 0,$$

hvilket er en cirkel igennem nordpolen.

Denne konstruktion kaldes Riemannkuglen. Med denne svarer ethvert punkt i den komplekse plan til et punkt på Riemannkuglen. Tilsvarende svarer ethvert punkt på Riemann kuglen — undtagen nordpolen — til et punkt i den komplekse plan. Vi kan nu udvide den komplekse plan med punktet ∞ som så er den stereografiske projektion af nordpolen, så lidt matematisk upræcist kan vi sige at et punkt z tæt på ∞ svarer til et punkt tæt på norpolen. Det smarte her er at lige meget hvilken retning i $\mathbb{C}$ vi nærmer os ∞ fra, så vil vi gå i mod "det samme ∞", fordi vi har "foldet"det komplekse plan til en kugle. Hvis vi kun kigger på den reelle akse, har vi altså at $\pm\infty$ er det samme punkt. Det betyder så at vi på en veldefineret måde kan dividere med 0, så for eksempel at afbildningen $w = 1/z$ nu er defineret for alle z, også $z = 0$ og tilsvarende er den omvendte også defineret for $w = 0$. En ret linie bliver så blot en cirkel med radius $= \infty$

At en cirkel bliver til en cirkel ved afbildningen $w = 1/z$ kan også indses udfra at en cirkel i den komplekse plan bliver til en cirkel på Riemannkuglen. Figur 1 viser et plant snit gennem Riemannkuglen og den komplekse plan med det komplekse tal z. For argumentets skyld kan vi lade tallet være reelt x, så er $P = (\xi, 0, \zeta)$ det tilsvarende punkt på Riemannkuglen. Vi kan nu finde et punkt x' ved tegne en linie fra sydpolen S til P. Denne skærer så den komplekse plan i x'. Benyt nu at trekanterne SPQ og $Sx'O$ er ensvinklede og tilsvarende at xNO er ensvinklet med PNQ samt at $\xi^2 + \zeta^2 = 1$ ($\xi = QP$, $\zeta = OQ$) til at vise at $x' = 1/x$. For generelt z er z' så inversion i enhedscirklen (se opgave ovenfor).

Vi kan nu se at inversion i enhedscirklen i den komplekse plan svarer til en spejling af Riemannkuglen i ækvatorplanen (se hvordan x' bliver projiceret på kuglen). Kompleks konjugering svarer på Riemannkuglen til en spejling i $\xi - \zeta$-planen. Så $w = 1/z$ svarer en spejling i ækvatorplan efterfulgt af en spejling i planen, der indeholder nord-syd aksen og den reelle akse. Dette svarer til en rotation omkring den reelle akse med π.



Figur 1: Riemannkuglen set fra siden. Dvs x-aksen svarer til $\mathbb{C}$ projiceret ned på $\mathbb{R}$.

Overfladen af en kugle er todimensional så det at benytte tre koordinater til at angive et punkt er overflødigt. Ofter benyttes de sfæriske koordinater θ, ϕ hvor θ er vinklen mellem nordpolen og punktet (på figuren vinkel NOP) og ϕ er vinklen mellem x-aksen og P's projektion ned på $\mathbb{C}$-planet. Skriver vi $z = re^{i\phi}$ er det vel rimelig åbenlyst at det er det samme ϕ. Vis at θ er bestemt af $\cot\theta/2 = r$. (Tip: Husk at vinkel $NSP = \theta/2$).