Forslag til løsninger uge 2

Opgave 1:
$u(x, y) = \text{konstant} \to \partial_x u = 0$ og $\partial_y u = 0$. Cauchy-Riemann betingelserne medfører så at de partielle afledede af v også er nul.

Opgave 2:
Funktionen er z^3.

Opgave 3:
Ligningen kan let omformes til $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, medmindre $a = 0$ for så er det en ret linie. ($x_0 = -b/2a$, $y_0 = -c/2a$, $R^2 = (b^2 + c^2)/(4a^2) - (d/a)$).

Vi benytter $x^2 + y^2 = zz^*, x = (1/2)(z + z^*), y = (1/2i)(z - z^*)$ og har følgende omskrivninger:

$$\begin{aligned}
0 &= a(x^2 + y^2) + bx + cy + d \\
&= azz^* + (b/2)(z + z^*) + (c/2i)(z - z^*) + d \\
&= a/(ww^*) + (b/2)(1/w + 1/w^*) + (c/2i)(1/w - 1/w^*) + d \\
&= a + (b/2)(w^* + w) + (c/2i)(w^* - w) + dww^* \\
&= a + bu - cv + d(u^2 + v^2)
\end{aligned}$$

hvor $w = u + iv$.

Opgave 4:
Rækkeudviklingen for $1/(1 - x)$ er $\sum_j x^j$.

Opgave 5:
Man skal vise, at

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\left|\begin{pmatrix} \alpha \\ j+1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix}\right|} = 1$$

Der er ikke andet end at skrive det ud:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j)|}{(j+1)!}}{\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)|}{j!}} = \lim_{j\to\infty} \frac{|\alpha - j|}{j+1} = 1$$

Desuden

$$F'(z) = \sum_{j=1} j \begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} z^{j-1} = \sum_{j=0} (j+1) \begin{pmatrix} \alpha \\ j+1 \end{pmatrix} z^j$$

så

$$(1+z)F'(z) = \sum_{j=0}[(j+1)\begin{pmatrix}\alpha\\ j+1\end{pmatrix} + j\begin{pmatrix}\alpha\\ j\end{pmatrix}]z^j$$

Koefficienten til z^j skrives helt ud:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)(\alpha-j)}{j!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)j}{j!}$$

fælles faktor sættes uden for parentes:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}(\alpha-j+j) = \alpha\begin{pmatrix}\alpha\\ j\end{pmatrix}$$

og resultatet fremgår. Det sidste ses ved indsættelse.

Opgave 6:
Vi har at $\sqrt{z} = \sqrt{r}(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2)$ Benyt så at $\cos\theta/2 = \sqrt{(1+cos\theta)/2}$ og $\sin\theta/2 = \sqrt{(1-\cos\theta)/2}$ og endelig at $r = \sqrt{x^2+y^2}$ og $\cos\theta = x/r$. Så får vi

$$\sqrt{x+iy} = \pm\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}+x)/2} \pm \sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-x)/2}$$

Og så skal der lidt overvejelse om hvilke $\pm$ der skal bruges for z i hver af de fire kvadranter.

Opgave 7:

$$\int_0^1 \left(t^2+it\right)^2(2\,t+i)\,dt = [1/3\,t^6 + it^5 - t^4 - 1/3\,it^3]_0^1 = \frac{2}{3}(-1+i);$$

Bemærk at dette udtryk er det samme som følger fra ligning (14.32) i RHB, idet

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u\frac{dx}{dt}dt - \int_0^1 v\frac{dy}{dt}dt + i\int_0^1 u\frac{dy}{dt}dt + i\int_0^1 v\frac{dx}{dt}dt \\ = \; & \int_0^1 (t^4-t^2)2tdt - \int_0^1 2t^3dt + i\int_0^1 (t^4-t^2)dt + i\int_0^1 2t^3(2t)dt \\ = \; & -2/3 + 2i/3 \end{aligned}$$

Vi har benyttet, at

$$z^2 = (x^2-y^2) + 2ixy$$

Dvs, $u = x^2 - y^2$ og $v = 2xy$. Vi finder yderligere (fra real- og imaginærdele af integrationsvejen), at $dx = 2tdt$ og $dy = dt$. Den sidste del af integrationen udføres på lignende vis

$$\int_1^2 ((t+i)^2 dt = \left[\frac{1}{3}(t+i)^3\right]_1^2 = \frac{4}{3} + 3i$$

Integralet fra 0 til $2+i$ er så summen:$(2+11i)/3$ Da funktionen er analytisk er integralet langs de andre veje det samme.

Indledende inspirationsopgave:

$$w = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

så regnes og man får

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

Jacobianten er så åbenlys og med $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$ ses ret let at jacobymatricen virkende på en vektor svarer til en rotation med -2θ og multiplikation med $-1/r^2$. Dette ses også umiddelbart af $dw/dz = -1/z^2 = -(1/r^2)e^{-2i\theta}$

Inspirationsopgave:
Det der kan være lidt svært er de ensvinklede trekanter. På figuren i opgaveteksten er det OxN og QPN. Her er $Ox = r$ og $QP = \rho$ medens $ON = 1$ og $QN = 1-\zeta$, og så er $\rho/r = (1-\zeta)/1$. De to andre fås ved at se det ovenfra. At finde de latinske bogstaver udtrykt ved de græske er næppe særlig svært. For de omvendte relationer benyt at $\zeta^2 = 1-\rho^2$ or $\rho^2 = 1-\zeta^2 = (1-\zeta)(1+\zeta)$ and derfor $r^2 = \rho^2/(1-\zeta)^2 = (1+\zeta)/(1-\zeta)$. Løs dette for ζ og resten følger.

At $x = 1/x'$ fås ved at se på de ensvinklede trekanter SOx' og SQP her får man så $x'/1 = \xi/(1+\zeta)$. For xON og PQN får man $x/1 = \xi/(1-\zeta)$ og hermed

$$x \cdot x' = \frac{\xi^2}{(1-\zeta)(1+\zeta)} = \frac{\xi^2}{1-\zeta^2} = 1$$