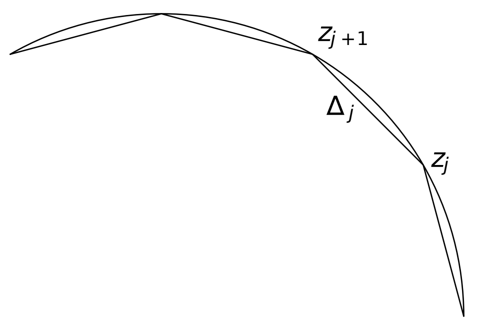
Opgaver uge 3

Hovedemnet i denne uge er Cauchys sætning og Cauchys formel. Desuden introduceres nulpunkter og singulariteter: simple poler, poler af orden m og essentielle singulariteter. Størrelsen residuum (flertal residuer) introduceres.

Kurveintegraler:
En kurve (path) er som nævnt en kontinuert afbildning af et reelt interval ind i $\mathbb{C}$: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, med $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Til beregning af kurveintegraler er kontinuitet ikke tilstrækkelig. Den skal også være stykvis differentiabel.

En lidt anden måde at definere et kurveintegral på er som for reelle integraler at tilnærme det ved en Riemannsum. Figuren viser et eksempel på en kurve og dens tilnærmelse med liniestykker Δ_j mellem punkterne z_j og z_{j+1}. Linjestykket Δ_j Er altså et komplekst tal svarende til "vektoren" mellem punkterne.



Riemannsummen, der tilnærmer integralet af f langs kurven, er $\sum_{j=1}^{N} f(z_j)\Delta_j$. For antallet af punkter N gående mod uendelig vil $|\Delta_j|$ gå mod nul for alle j, og summen vil konvergere mod integralet $\int f(z)dz$. Bemærk at hvis vi parameteriserer kurven som normalt, således at $z_j = \gamma(t)$ og $z_{j+1} = \gamma(t + \delta t)$, da får vi

$$\Delta_j = z_{j+1} - z_j = \gamma(t + \delta t) - \gamma(t) \approx \gamma'(t)\delta t,$$

hvilket tydeliggør, at summen går mod det normale kurveintegral $\int f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

Opgave 1:
Vi skal bestemme værdien af integralet

$$\oint \frac{1}{z} dz = 2\pi i \tag{1}$$

ved at se på grænsen af en riemannsum. Vi benytter en integrationsvej langs cirklen med radius $r = 1$ og centrum i origo. Cirklen kan tilnærmes med en polygon med n

kanter. En af disse kanter (som er et liniestykke) kalder vi Δ_j og riemannsummen er så $\sum_j (1/z_j)\Delta_j$.

Når z_{j+1} kommer tæt på z_j bliver retningen af Δ_j tæt på retningen af tangenten til cirklen i z_j, der er vinkelret på z_j, altså samme retning som iz_j. Indfør længden af linjestykket $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Vi kan da skrive $\Delta_j = i\epsilon z_j$, fordi $|z_j| = 1$ da det ligger på cirklen. Brug dette til at vise (1).

Opgave 2:
Bestem typen af singulariteter for følgende funktioner

1. $$\frac{1}{z-2}$$
2. $$\frac{1+z^3}{z^2}$$
3. $$\sinh\left(\frac{1}{z}\right)$$
4. $$\frac{\exp z}{z^3}$$
5. $$\tan z$$
6. $$\exp(1/z)$$
7. $$\tan(1/z)$$

Opgave 3:
En partikels bevægelse i to dimensioner kan sommetider med fordel beskrives som en kurve i den komplekse plan: $z(t)$ med t som tiden. Så er $z'(t)$ den komplekse hastighed. Lad en partikel være bundet til origo med en fjeder således at $(F_x, F_y) = -k(x, y)$. Da det nu er matematik vil vi vælge enheder så $k = 1$ og således, at partiklens masse er 1. Så lyder Newtons anden lov i komplex notation $\ddot{z} = -z$. Find løsning hertil med begyndelsesbetingelser at til $t = 0$ er $z(0) = a$, a reel og hastigheden er $z'(0) = ib$, hvor b er reel (dvs. i y-aksens retning). Hvad er den kinetiske, den potentielle og den totale energi.

Opgave 4:
Lad os antage at konvergensradiussen R for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ kan bestemmes ved forholdstesten

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Vis at den ledvist differentierede række $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ har samme konvergensradius.

Opgave 5:
Bestem residuer af følgende funktioner:

1. $$\frac{z+1}{z^2(z+2i)}$$
2. $$\frac{1}{e^z - 1}$$
3. $$\frac{1}{z^5 - 1}$$

Opgave 6:
Betragt hvordan funktionerne i Opgave 2 opfører sig i uendeligt. En måde at gøre dette på er at introducere variablen w, hvor $z = 1/w$, i de enkelte udtryk og efterfølgende lade $w \to 0$. F.eks. vil funktionen z^2 udtrykt i den nye variable være lig med $1/w^2$, som har en pol af anden orden for $w \to 0$. Derfor har z^2 en tilsvarende singularitet af anden orden for $z \to \infty$.

Inspirationsopgave:
Som vi så i en tidligere opgave, så afbilder transformationen $w = 1/z$ cirkler i cirkler (Eller linjer, som kan betragtes som et specialtilfælde af cirkler.) Beskriv hvordan afbildingerne

$$z \mapsto az, \quad z \mapsto z + a, \quad z \mapsto az + b$$

også afbilder cirkler i cirkler. a, b er her faste komplekse tal.

Transformationen

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

kaldes en Möbius transformation[1]. Vis at den kan frembringes ved at sammensætte følgende transformationer i den givne rækkefølge.

1. $z \mapsto z + (d/c)$
2. $z \mapsto 1/z$
3. $z \mapsto -((ad - bc)/c^2)z$
4. $z \mapsto z + a/c$

Bemærk at hvis $ad - bc = 0$ afbildes hele $\mathbb{C}$-planen i et punkt. Hvilket?. I det følgende antager vi at $ad - bc \neq 0$.

Da en Möbius transformation er sammensat af afbildinger, der afbilder cirkler i cirkler må den også self gøre det. Vis nu at den omvendte transformation er givet ved:

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

Bemærk at der i virkligheden kun er tre forskellige konstanter, idet vi kan dividere igennem med en vilkårlig af konstanterne a, b, c, d (og de er ikke alle nul). Dette betyder at vi kan finde en Möbius transformation, der afbilder tre vilkårlige punkter q, r, s over i tre andre vilkårlige punkter $\tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s}$. Ser det ikke ud til at følgende formel gør tricket?

$$\frac{(w - \tilde{q})(\tilde{r} - \tilde{s})}{(w - \tilde{s})(\tilde{r} - \tilde{q})} = \frac{(z - q)(r - s)}{(z - s)(r - q)}$$

Da tre punkter bestemmer en cirkel (linie) kan en Möbius transformation afbilde en vilkårlig cirkel i en vilkårlig cirkel.

[1] August Ferdinande Möbius, 1790-1868. (Den samme med Möbius-båndet)