Forslag til løsninger uge 3

Opgave 1:
Vi har at $\Delta_j = i\epsilon z_j$, så Riemannsummen bliver:

$$\sum_j \frac{1}{z_j}\Delta_j = \sum_j i\epsilon = 2\pi i,$$

fordi ϵ er længden af segmenterne, som summerer til 2π, da de tilsammen udgør enhedscirklen.

At z^{-2} integrerer til 0 ses som normalt ved at vælge en paremeterisering af kurven $\gamma(t) = e^{it}$ for $t \in [0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \frac{1}{z^2}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)^2}\gamma'(t)\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-2it}\ ie^{it}\ dt \\ &= -e^{-it}\Big|_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

Opgave 2:

1. $1/(z-2)$ har en simpel pol i 2.
2. $(1+z^3)/z^2$ har en pol af orden 2 i $z = 0$.
3. $\sinh(1/z)$ har en essentiel singularitet i $z = 0$. (Se på rækkeudviklingen)
4. $\exp z/z^3$ har en pol af orden 3 i nul.
5. $\tan z = -i(e^{iz} - e^{-iz})/(e^{iz} + e^{-iz})$ har pol når nævneren er nul: $e^{iz} = -e^{-iz} = e^{i\pi + 2i\pi n}e^{-iz}$ eller $z = z = \pi/2 + \pi n$ (n heltal). (nulpunkterne for $\cos(x)$). Ordenen undersøger vi ved at finde

   $$\lim_{z \Rightarrow \pi/2} \frac{(z-\pi/2)^m \sin(z)}{\cos(z)}$$

   for $m = 1, \ldots$ indtil grænseværdien er endelig. Her fås grænseværdien 1 for $m = 1$. Nulpunkter i nulpunkterne for $\sin(x)$.
6. $\exp(1/z)$ har en essentiel singularitet for $z = 0$. (Ingen nulpunkter).
7. Nulpunkter i $z = 1/n\pi$, $n = 1, \ldots$ og poler i $z = 1/(\pi/2 + n\pi)$.

Opgave 3:
Ligningen $\ddot{z} = -z$ har i kompleks notation de to uafhængige løsninger e^{it} og e^{-it}. En generel løsning er så:

$$z = pe^{it} + qe^{-it} = (p+q)\cos t + i(p-q)\sin t$$

med p og q (komplekse) konstanter. Med begyndelses betingelser at for $t = 0$ er $z = a$ og $\dot{z} = ib$ fås $a = p+q$ og $b = p-q$. Den potentielle energi er $V = (1/2)(x^2 + y^2) = (1/2)zz^* = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t$. Den kinetiske energi er $K = (1/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 1/2\dot{z}\dot{z}^* = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)$ Den totale energi er så $E = K + V = \frac{a^2+b^2}{2}$.

Opgave 4:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\Rightarrow\infty} \frac{|(n+1)a_{n+1}|}{|na_n|} = \lim_{n\Rightarrow\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

$(n+1)/n)$ går mod 1 når n går mod ∞.

Opgave 5:

1. Pol af orden 2 i $z = 0$ og simpel polæ i $z = -2i$. Residuet i 0 kan beregnes på to måder:
$$\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}z^2\frac{z+1}{z^2(z+2i)} = \frac{(z+2i)-(z+1)}{(z+2i)^2}$$
Så indsættes $z = 0$ og vi får $\text{Res}(0) = 1/4 - i/2$

   Vi skriver
$$\frac{z+1}{z^2(z+2i)} = \frac{1}{2i}\frac{(1+z)}{z^2(1+z/(2i))} \simeq \frac{-i}{2}\frac{(1+z)(1-z/(2i)}{z^2}$$
og så er koefficienten til z^{-1} lig $1/4 - i/2$

   $\text{Res}(-2i)$ fås ved i $((z+1)/z^2$ at indsætte $z = -2i$, så $\text{Res}(-2i) = -1/4 + i/2$

2. Der er poler for $e^z = 1 = e^{2\pi in}$ altså $z = 2\pi in$ $n \in Z$ Vi udregner
$$\lim_{z\to 2\pi in} \frac{z - 2\pi in}{e^z - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{(e^{t+2\pi in} - 1)} \simeq \lim_{t\to 0} \frac{t}{(1+t-1)} = 1$$
$z = 2\pi in$ er således simple poler med residuer 1.

3. Øjensynlig er der simple poler i $z_n = \exp(2\pi in/5)$ med $n = 0, \ldots, 4$. Lad være med at bruge 24.57, brug 24.58
$$\text{Res}(z_n) = \frac{1}{5z_n^4} = \frac{z_n}{5z_n^5} = \frac{z_n}{5}$$
idet $z_n^5 = 1$

Opgave 6:

1. $1/(z-2)$ er analytisk i ∞.
2. Ved at indsætte $z = 1/t$ fås $(t^3 + 1)/t$ som har en simple pol for $t = 0$ eller $z = \infty$
3. $\sinh(1/z)$ er analytisk i $z = \infty$. (Se på rækkeudviklingen)
4. $\exp z/z^3$ har en essentiel singularitet i ∞.
5. $\tan z$ for $z \to \infty$ er ikke veldefineret, hvilket medfører en essentiel singularitet.
6. $\exp(1/z)$ er analytisk i ∞.
7. $\tan(1/z)$ er analytisk i ∞.

Inspirationsopgave:
Det er blot at indsætte. 2. $1/(z + (d/c))$
3.
$$\frac{-(ad-bc)}{c^2(z+(d/c)}$$
4.
$$\frac{-(ad-bc)}{c^2(z+(d/c)} + \frac{a}{c} = \frac{-(ad-bc)+(ac)(z+d/c)}{c^2(z+(d/c)}$$
Og så fås det ønskede resultat efter 1 linies regning mere.

Det er også værd at udregne dw/dz. Man får

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$