Opgaver uge 4

Dette sæt består primært af træningsopgaver i integration i den komplekse talplan. For at udregne disse integraler har man brug for at bestemme residuer, som i opgave 1. Sættet indeholder eksempler på integraler, hvor de trigonometriske funktioner indgår. Disse integraler kan ofte udregnes lettere ved at benytte integrationsveje i den komplekse plan. I næste uge følger flere træningsopgaver, som forhåbentligt hjælper til en god fortrolighed med integration. Opgavesættet sluttes af med en opgave i brug af fouriertransformationen, som en opvarmning til Laplace-transformationen (så hent de gamle MatF noter frem), og med en opgave med integration i den .

Kommentar:
Man kan også argumentere for Cauchy's sætning $\oint f(z)dz$ på følgende vis. I (RH) er betingelsen for at en differentiel form $df = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ er eksakt (Har en stamfunktion) at $\partial_y A = \partial_x B$. Så for at formen $f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$ er et eksakt differential skal der gælde $\partial_y f = i\partial_x f$ og det er præcis (CR) betingelserne. Når f har en stamfunktion F betyder det at $\int_a^b f(z)dz = \int_a^b dF = F(b) - F(a)$ Og så følger naturligvis Cauchy's sætning.

Opgave 1:
Find residuer i de singulære punkter af

a) $3/(1-z)$

b) $\sin z/z^4$

c) $(4/z^3) - 1/z^2$

d) $\cot z$

e) $2/(z^2-1)^2$

f) $1/(z^4-1)$

Opgave 2:
Find Laurantrækkerne for følgende funktioner. Koefficienterne i rækken kan formelt set regnes fra den generaliserede version af Cauchys integralformel. Men oftest vil det være lettere at identificere og isolere polen og taylorudvikle den analytiske del $g(z)$ i udtrykket $g(z)/(z-z_0)^p$.

a) $f(z) = z^2 e^{(z+2)}, \quad \text{omkring} \quad z = 0$

b) $f(z) = \frac{\cos(z^2)-1}{z^3}$, omkring $z = 0$

c) $f(z) = (z-2)\sin\left(\frac{1}{z+3}\right)$, hvor $z_0 = -3$

d) $f(z) = \frac{z}{(z-2)(z+3)}$, hvor $z_0 = 2$

Opgave 3:
Beregn integralet

$$\oint \frac{1}{z^2(z-3)} \mathrm{dz}$$

langs en cirkel i den komplekse plan med radius $r = 2$ og centrum i $z = 0$.

Opgave 4:
Integraler af typen $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ er gennemgået med et eksempel i bogen (RH 15.3.1) prøv selv med

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a - \cos\theta}\, d\theta \quad \text{med } a > 1$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{a + \sin\theta}\, d\theta \quad \text{med } a > 1$$

Opgave 5:
Vis at

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x\, dx = 2\pi \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Opgave 6:
I bogens eksempel, der hører til figur RH 15.6 (RHB, 24.15) ligger der en pol på den reelle akse. Denne undgås ved en lille halvcirkel i den øvre halvplan. Hvad sker der hvis en halvcirkel i den nedre halvplan vælges?

Opgave 7:
Integraler af typen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

hvor $\lim_{z\to\infty} |zf(z)| = 0$ kan som vist i RH 15.3.2 (RHB, 24.13) udregnes. Prøv selv følgende:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} dx$$

a og b er reelle og større end nul.

Opgave 8:
I et eksempel i bogen udregnes fouriertransformationen af

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ Ae^{-\lambda x} & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

til $A/(\sqrt{2\pi}(\lambda + iy))$. Vis ved konturintegration i den komplekse plan at den inverse fouriertransformation giver $f(x)$.

Opgave 9: (Udfordrende)
Integraler af flertydige (multivalued) funktioner RH 15.13.3 (RHB, 24.13.3) er også værd at prøve:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$