Løsningsforslag sæt 4

Opgave 1:

a) $\text{Res}(1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot 3/(1-z) = -3$

b) Pol af orden 3. Så enten bruger vi reglen:

$$\text{Res}(0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{-z^2\sin z + 2\sin z - 2z\cos z}{z^3}$$

For at finde grænsen skal l'Hôpital's regel bruges tre gange og man får residuet til $-1/3!$. Eller også skrives taylorrækken for sin:

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4}(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots)$$

Det er så åbenlyst at koefficienten til z^{-1} er $-1/3!$

c) Der er øjensynlig kun to led i Laurentrækken, så koefficienten til z^{-1} er nul.

d) Der er poler i $z = n\pi$, og da begge funktioner er periodiske er det oplagt at residuerne er de samme for alle n. Så vi kan nøjes med at finde det for $z = 0$. Vi prøver først

$$\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z}{\sin z} = 1$$

(grænsen findes ved l'Hôpital). Da grænsen er forskellig fra nul er polen af orden 1 og residuet er 1.

e) Nævneren kan skrives som $(z-1)^2(z+1)^2$, dvs der er poler af anden orden i ± 1. Residiet i -1 bliver $1/2$ og i $+1$ bliver det $-1/2$.

f) Nævneren har nulpunkter i $\pm i$ og ± 1. Da nævneren er et fjerde ordens polynomium, er alle polerne simple. Residierne bliver: $i/4$ i i, $-i/4$ i $-i$, $1/4$ i 1 og $-1/4$ i -1.

Opgave 2:

a) $f(z) = z^2 e^{(z+2)} = e^2 z^2 e^z = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k+2}$

b) $f(z) = \frac{\cos(z^2)-1}{z^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k-3}$

c)

$$\begin{aligned} f(z) &= \Big(-5+(z+3)\Big)\left(\frac{1}{z+3}-\frac{1}{3!(z+3)^3}+\frac{1}{5!(z+3)^5}\cdots\right) \\ &= \Big(-5+(z+3)\Big)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+3)^{2n+1}} \end{aligned}$$

d)

$$f(z) = \frac{1}{z-2}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-2)^n}{5^n}\right)$$

Opgave 3:
Integralet har inden for integrationsvejen en singularitet i $z=0$, d.v.s.

$$\oint \frac{1}{z^2(z-3)}\mathrm{dz} = 2\pi i Res(z=0) = -2\pi i/9$$

Opgave 4:
Omskriv til

$$I = \oint \frac{2i}{2az-z^2-1}dz$$

Nævneren har nulpunkter i $z_1 = a-\sqrt{a^2-1}$ og i $z_2 = a+\sqrt{a^2-1}$. Da $a>1$ ligger z_1 inden for enhedscirklen og z_2 udenfor, så $I = 2\pi i\mathrm{Res}(z1)$. Skriv så integranten $-2i/((z-z1)(z-z2))$, så ses at residuet er $-2i/(z1-z2) = -i/\sqrt{a^2-1}$. Og dermed $I = 2\pi/\sqrt{a^2-1}$.

For det andet integral fører en lignende omskrivning til

$$2\oint \frac{z^2+1}{z(z-z_1)(z-z_2)}dz$$

med $z_1 = i(-a+\sqrt{a^2-1})$ og $z_2 = i(-a-\sqrt{a^2-1})$. z_1 ligger indenfor enhedscirklen og z_2 udenfor. Så der er to poler indenfor nemlig z_0 og $z=z_1$ med residuer: Res(0) = -1 og Res(z_1) $= (z_1^2+1)/z_1(z_1-z_2) = 1$. Husk at $z_1 z_2 = -1$. Summen er nul, så integralet er 0. (Det kunne man også have set ved at indføre $u = a+\cos\theta$ som ny integrationsvariabel.

Opgave 5:
Omskriv integralet til

$$\oint (\frac{1}{2}(z+z^{-1}))^{2n}\frac{dz}{iz}$$

Brug så binominalformlen til at skrive:

$$(z+z^{-1})^{2n} = \sum_{m=0}^{2n} \left(\begin{array}{c} 2n \\ m \end{array} \right) z^{2n-m}z^{-m}$$

Ombyt integration og summation og benyt så at integralet

$$\oint z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{for } n=-1 \\ 0 & \text{for} n \neq -1 \end{cases}$$

Således at alle led i summen forsvinder undtaget leddet for hvilket $m=n$.

Opgave 6:
Hvis den lille cirkel går under den reelle akse ligger polen i a inde i området til gengæld gennemløbes den lille cirkel nu i den positive (mod uret) så ligningen bliver til

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x-a}dx + i\pi a_{-1} = 2\pi i a_{-1}$$

altså det samme.

Opgave 7:
Integranten har simple poler i $z_n = \exp((2n+1)i\pi/4), n = 0,1,2,3$. To af disse ligger i den øvre halvplan nemlig $z_0 = \exp(\pi i/4)$ og $z_1 = \exp(3\pi i/4)$. Så vi skal finde residuerne i disse punkter.

Residuet findes:

$$\mathrm{Res}(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{1+z_0^2}{4z_0^3} = \frac{-(1+z_0^2)z_0}{4}$$

idet $z_0^4 = -1$. Det samme gælder for z_1. Det giver henholdsvis $-(1+i)(1/\sqrt{2})(1+i)/4$ ($\cos\pi/4 = \sin\pi/4 = 1/\sqrt{2}$) og $-(1-i)/1/\sqrt{2}(-1+i)/4)$. Så integralet bliver $\sqrt{2}\pi$.

For det andet integral er der øjensynlig simple poler i $z = \pm ia$ og i $z = \pm ib$. Da både a og b er positive skal vi plot finde residuerne i ia og i ib. Residuet i ia bliver $1/(2ia(b^2-a^2))$ og i ib $1/(2ib(a^-b^2))$ summen bliver $(1/2i)(1/(ab(a+b)))$ og værdien af integralet dermed

$$\frac{\pi}{ab(a+b)}$$

Opgave 8:
Vi skal regne

$$f(x) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixy}}{\lambda + iy} dy$$

Integranten har en simpel pol i $y = i\lambda$ med residuum: $\lim_{y \to i\lambda}(y - i\lambda)e^{ixy}/(\lambda + iy) = -ie^{-x\lambda}$. Jævnfør Jordans lemma, så må vejen lukkes i den nedre halvplan for $x < 0$ og integralet giver nul (som det skulle). For $x > 0$ bruges Jordans lemma igen, hvor vejen lukkes i den øvre halvplan og vi efterfølgende får det ønskede resultat.

Opgave 9: (Udfordrende)
En integrationsvej som den i figur RH 15.7 (RHB 24.16) benyttes. Langs AB fås

$$\int_{\rho}^{R} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} dx$$

Som i eksemplet i bogen går integralet langs Γ mod nul når R går mod uendelig og integralet langs γ går mod nul når ρ går mod nul. Integralet langs CD giver

$$\int_{R}^{\rho} \frac{\sqrt{x} \cdot \exp(\pi i)}{1 + x^2} dx = \int_{\rho}^{R} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} dx$$

Så totalt får vi

$$2\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(i) + \mathrm{Res}(-i))$$

Vi får

$$\mathrm{Res}(i) + \mathrm{Res}(-i) = \frac{\sqrt{i}}{2i} - \frac{\sqrt{-i}}{2i} = \frac{1}{2i}(\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)) = \frac{-i}{\sqrt{2}}$$

Så

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$