Opgavesæt 5

Der har i de tidligere år af kurset været et ønske om flere træningsopgaver i løsningen af integraler i den komplekse talplan, så i denne uge har vi en hel del integraler. Opgave 1 er fra et tidligere eksamenssæt (eksamen nærmer sig hastigt!). Ved forelæsningen kommenterer jeg på, at Fourier-transformationen ikke er optimal, hvis man gerne vil løse den harmoniske oscillator med en transient dynamik. I opgave 7 finder vi den fulde løsning til den dæmpede harmoniske oscillator drevet af en periodisk kraft.

Opgave 1:
Løs opgave 6 i eksamenssættet fra 2013 (findes på kursushjemmesiden).

Opgave 2:
Løs følgende integraler:

a)
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta}$$

b)
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta$$

c)
$$\oint_{|z|=2} \frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)} dz$$

d)
$$\oint_{|z|=5} \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}$$

e)
$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z} dz$$

f)
$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z} dz$$

g)
$$\oint_{|z|=5} z e^{3/z} dz$$

Opgave 3:
Løs følgende integraler ved kontourintegration i den komplekse plan

a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4+x^2)^2} dx$$

c)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+\pi^2} dx$$

Opgave 4:
Anvend laplacetransformationen mht. variablen t på følgende udtryk

a)
$$\cos(a\ t)$$

b)
$$t^n \exp(a\ t)$$

Opgave 5:
Anvend den inverse laplacetransformation mht. variablen s på følgende udtryk

a)
$$\frac{1}{s^2-s-2}$$

b)
$$\frac{2s}{(s+1)(s^2+4)}$$

Opgave 6:
Løs følgende differentialligning ved hjælp af laplacetransformationen

$$\frac{dx(t)}{dt} + \gamma x(t) = \delta(t)$$

med startbetingelsen $x(0) = 0$.

Opgave 7:

Løs den dæmpede harmoniske oscillator ved hjælp af Laplace-transformationen og med startbetingelsen $x(0) = 0$ og $\dot{x}(0) = \alpha$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A\sin(\omega_E t)$$

hvor ω_E er frekvensen af den eksterne drivkraft ($A\sin(\omega_E t)$) og ω_0 er egenfrekvensen af oscillatoren.