Løsningsforslag til opgavesæt 5

Opgave 1:
Se kursushjemmesiden.

Opgave 2:

a)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta}$$

Løsning:

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz(5 + 4(\frac{z-1/z}{2i}))} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 + 5iz - 2}$$

Integranden har poler i $z = -2i$ og $z = -i/2$, men kun $z = -i/2$ ligger inden for enhedscirklen så:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2(z+2i)(z+i/2)} = 2\pi i \text{Res}_{z=-i/2} = 2\pi i \frac{1}{2(-i/2+2i)} = \frac{2\pi}{3}$$

b)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 + 4\cos\theta} \, d\theta$$

Løsning:

Lav standardskiftet af variable:

$$z = e^{i\theta}, \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$dz = ie^{i\theta}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

som giver at

$$I = \oint_\gamma \frac{\left[\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^2}{5 + 4\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]} \frac{dz}{iz} = \frac{-1}{4i}\oint_\gamma \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(2z^2 + 5z + 2)} dz$$

hvor konturen er enhedscirklen.

Integranden har poler i $z = 0, \quad -2, \quad -\frac{1}{2}$ men det er kun $z = 0$ og $z = -\frac{1}{2}$ der ligger inden for vores kontur, der jo er enhedscirklen. Så integralet kan omskrives til:

$$I = \frac{-1}{4i}\oint_\gamma \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{2z^2(z + 2)\left(z + \frac{1}{2}\right)} dz$$

Derfor:

$$I = \frac{-1}{4i} 2\pi i \left(\text{Res}_{z=0} + \text{Res}_{z=-\frac{1}{2}}\right)$$

så vi skal bruge residuet for polen af 2. orden i $z = 0$

$$\begin{aligned}
\text{Res}_{z=0} &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{2z^2 + 5z + 2} \\
&= \lim_{z\to 0} \left[\frac{4z^3 - 4z}{2z^2 + 5z + 2} - (4z + 5)\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{(2z^2 + 5z + 2)^2}\right] \\
&= -5 \cdot \frac{1}{2^2} = -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

og residuet af den simple pol i $z = -1/2$

$$\text{Res}_{z=\frac{-1}{2}} = \lim_{z\to -1/2} \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{2z^2(z + 2)} = \frac{\frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{4} + 1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{4} + 2}{3} = \frac{3}{4}$$

Og integralet er derfor:

$$I = \frac{-1}{4i} 2\pi i \left(\frac{-5}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{\pi}{4}$$

c)

$$\oint_{|z|=2} \frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)} dz$$

Løsning:

Integranden har simple poler i $z = 0, 1, 3$. Kun 0 og 1 er inden for konturen så

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=2} \frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)} dz &= 2\pi i(\mathrm{Res}_{z=0} + \mathrm{Res}_{z=1}) \\
&= 2\pi i \left(\lim_{z \to 0} \frac{1-2z}{3z^2 - 8z + 3} + \lim_{z \to 1} \frac{1-2z}{3z^2 - 8z + 3} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{3} \pi i
\end{aligned}$$

d)

$$\oint_{|z|=5} \frac{\cos z}{z^2 (z - \pi)^3}$$

Løsning:

Der er en pol af 2. orden i $z = 0$ og en pol af 3. orden i $z = \pi$. Begge poler ligger inden for konturen så

$$\oint_{|z|=5} \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3} = 2\pi i \left(\text{Res}_{z=0} + \text{Res}_{z=\pi}\right)$$

$$= 2\pi i \left(\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{\cos z}{(z-\pi)^3} + \frac{1}{2} \lim_{z\to\pi} \frac{d^2}{dz^2} \frac{\cos z}{z^2} \right)$$

$$= 2\pi i \left(\lim_{z\to 0} \left[\frac{-3\cos z}{(z-\pi)^4} - \frac{\sin z}{(z-\pi)^3} \right] + \frac{1}{2} \lim_{z\to\pi} \frac{d}{dz} \left[\frac{-2\cos z}{z^3} - \frac{\sin z}{z^2} \right] \right)$$

$$= 2\pi i \Bigg(\lim_{z\to 0} \left[\frac{-3\cos z}{(z-\pi)^4} - \frac{\sin z}{(z-\pi)^3} \right]$$

$$+ \quad \frac{1}{2} \lim_{z\to\pi} \frac{d}{dz} \left[\frac{2\cdot 3\cos z}{z^4} + \frac{2\sin z}{z^3} + \frac{2\sin z}{z^3} - \frac{\cos z}{z^2} \right] \Bigg)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-3}{\pi^4} + \frac{\pi^2-6}{2\pi^4} \right) = \frac{\pi^2-12}{\pi^3} i$$

e)

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z} dz$$

Løsning:

Der er en hævelig singularitet i $z = 0$, men ellers ingen singulariteter så integralet giver 0.

f)

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z} dz$$

Løsning:

Da polen $z = 0$ ligger inden for konturen er svaret$2\pi i \cos(0) = 2\pi i$.

g)

$$\oint_{|z|=5} z e^{3/z} dz$$

Løsning:

Der er en essentiel singularitet i $z = 0$ så integralet bestemmes ved:

$$\oint_{|z|=5} z e^{3/z} dz = 2\pi i \text{Res}_{z=0}$$

For at finde residuet finder vi laurentrækkeudviklingen for integranden..

Generelt gælder det at $\text{Res}_{z=a}$ er koefficienten foran leddet med $\frac{1}{z-a}$ i laurentrækkeudviklingen som i dette tilfælde er givet ved:

$$ze^{3/z} = z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3/z)^k}{k!}$$

Når $k = 2$ fås leddet i summen til at være $\frac{9}{2}z^{-1}$ så $a_{-1} = \text{Res}_{z=0} = \frac{9}{2}$.

Altså er integralet

$$\oint_{|z|=5} ze^{3/z}dz = 2\pi i\frac{9}{2} = 9\pi i$$

Opgave 3:

a)

$$\int_0^{2\pi}\frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

b)

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(4+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{16}$$

c)

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{x^2+\pi^2}dx = e^{-\pi}$$

Opgave 4:
Se tabel 5.1 (s. 212).

Opgave 5:

a) Lad λ være større end realdelen af alle singulariteter. Den inverse transformation er da

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{e^{st}}{s^2-s-2}ds.$$

Der er simple poler i $s=-1$ og $s=2$, så integralet bliver:

$$\frac{e^{2t}}{3}-\frac{e^{-t}}{3}$$

b) Den inverse transformation er givet ved integralet

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{2s\ e^{st}}{(s+1)(s^2+4)}ds.$$

Der er simple poler i -1 og $\pm i2$. Integralet bliver:

$$-\frac{2}{5}e^{-t}+\frac{2}{5}(\cos 2t+2\sin 2t)$$

Opgave 6:
Ligningen omskrives til

$$s\hat{x}-x_0+\gamma\hat{x}=1$$

hvor $\hat{x}$ er x transformeret og $x_0=0$ er begyndelsesværdien. Dette betyder at $\hat{x}=1/(s+\gamma)$, så

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{1}{s+\gamma}e^{st}ds. \tag{1}$$

Bemærk at dette kun kan gøres for positive t-værdier, da integranten skal gå mod 0 for Re $t\to-\infty$. Integranten har en simpel pol i $s=-\gamma$, så vi får:

$$x(t)=e^{-\gamma t}. \tag{2}$$

Opgave 7:

Vi løser følgende ligning ved hjælp af Laplace-transformationen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = A\sin(w_E t)$$

hvor w_E er frekvensen af den eksterne drivkraft ($A\sin(w_E t)$), $k = w_0^2 m$, hvor w_0 er egenfrekvensen af oscillatoren. Vi benytter startbetingelserne

$$x(0) = 0 \quad \text{og} \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \alpha.$$

Vi dividerer igennem med massen m på begge sider af differentialligningen og definerer nye konstanter $\nu = \gamma/m$ og $a = A/m$, således at

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu\frac{dx}{dt} + w_0^2 x = a\sin(w_E t)$$

Ved at anvende Laplace-transformationen på begge sider omskriver vi nu ligningen. De enkelte led transformeres som følger (hvor $\hat{}$ symboliserer transformerede variable),

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &\mapsto -\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} - sx(0) + s^2\hat{x}(s) = -\alpha + s^2\hat{x}(s) \\ \frac{dx}{dt} &\mapsto -x(0) + s\hat{x}(s) = s\hat{x}(s) \\ x &\mapsto \hat{x}(s) \\ \sin(w_E t) &\mapsto \frac{w_E}{s^2 + w_E^2} \end{aligned}$$

Differentialligningen kan nu skrives på formen

$$\hat{x}(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \nu s + w_0^2} + \frac{w_E}{(s^2 + w_E^2)(s^2 + \nu s + w_0^2)}.$$

Løsnigen til differentialligningen findes nu fra den inverse transformation

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \left[\frac{\alpha}{s^2 + \nu s + w_0^2} + \frac{aw_E}{(s^2 + w_E^2)(s^2 + \nu s + w_0^2)}\right] e^{st}\mathrm{ds}.$$

Vi kan enten skrive summen under integralet på fælles brøk eller dele integralet i to. Hvis vi deler i to får vi først

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\left[\frac{\alpha}{s^2+\nu s+w_0^2}\right]e^{st}\mathrm{ds}. \tag{3}$$

Integranden har to simple poler, hvor $s^2+\nu s+w_0^2=0$, dvs. hvor $s=\beta_\pm$. Vi har her introduceret

$$\beta_\pm=\frac{-\nu\pm\sqrt{\nu^2-4w_0^2}}{2}.$$

I Bromwich integralet vælges λ således, at både $\lambda > Re(\beta+)$ og $\lambda > Re(\beta-)$.

Vi omskriver nu integranden på formen

$$\frac{\alpha e^{st}}{(s-\beta_+)(s-\beta_-)}.$$

Residuet i $s=\beta_+$ er

$$\lim_{s\to\beta_+}(s-\beta_+)\frac{\alpha e^{st}}{(s-\beta_+)(s-\beta_-)}=\frac{\alpha e^{\beta_+ t}}{\sqrt{\nu^2-4w_0^2}}$$

Residuet i $s=\beta_-$ er

$$\lim_{s\to\beta_-}(s-\beta_-)\frac{\alpha e^{st}}{(s-\beta_+)(s-\beta_-)}=-\frac{\alpha e^{\beta_- t}}{\sqrt{\nu^2-4w_0^2}}$$

Dvs. integralet i (3) antager værdien

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\left[\frac{\alpha}{s^2+\nu s+w_0^2}\right]e^{st}\mathrm{ds.}=\frac{2\alpha e^{-\frac{\nu}{2}t}\sin\left(\sqrt{4w_0^2-\nu^2}\;t\right)}{\sqrt{4w_0^2-\nu^2}}. \tag{4}$$

Vi har her benyttet omskrivningen $i\sqrt{4w_0^2-\nu^2}=\sqrt{\nu^2-4w_0^2}$.

Det andet integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\left[\frac{aw_E}{(s^2+w_E^2)(s^2+\nu s+w_0^2)}\right]e^{st}\mathrm{ds} \tag{5}$$

løses nu på tilsvarende vis, hvor vi nu har to ekstra simple poler for $s=\pm iw_E$. Vi finder følgende residuer.

Residuet i $s = \beta_+$ er

$$\lim_{s \to \beta_+} (s - \beta_+) \frac{a w_E e^{st}}{(s^2 + w_E^2)(s^2 + \nu s + w_0^2)} = \frac{a w_E e^{\beta_+ t}}{(\beta_+^2 + w_E^2)\sqrt{\nu^2 - 4w_0^2}}$$

Residuet i $s = \beta_-$ er

$$\lim_{s \to \beta_-} (s - \beta_-) \frac{a w_E e^{st}}{(s^2 + w_E^2)(s^2 + \nu s + w_0^2)} = \frac{a w_E e^{\beta_- t}}{(\beta_-^2 + w_E^2)\sqrt{\nu^2 - 4w_0^2}}$$

Residuet i $s = i w_E$ er

$$\lim_{s \to i w_E} (s - i w_E) \frac{a w_E e^{st}}{(s^2 + w_E^2)(s^2 + \nu s + w_0^2)} = \frac{a e^{i w_E t}}{(2i)(w_0^2 - w_E^2 + i \nu w_E)}$$

Residuet i $s = -i w_E$ er

$$\lim_{s \to -i w_E} (s + i w_E) \frac{a w_E e^{st}}{(s^2 + w_E^2)(s^2 + \nu s + w_0^2)} = \frac{a e^{-i w_E t}}{(-2i)(w_0^2 - w_E^2 - i \nu w_E)}$$

Løsningen til (5) findes nu ved at addere alle residuerne, som efter lidt omskrivning giver, at

$$\frac{a w_E e^{\beta_+ t}}{(\beta_+^2 + w_E^2)\sqrt{\nu^2 - 4w_0^2}} + \frac{a w_E e^{\beta_- t}}{(\beta_-^2 + w_E^2)\sqrt{\nu^2 - 4w_0^2}} + a \frac{(w_0^2 - w_E^2)\sin w_E t - \nu w_E \cos w_E t}{(w_0^2 - w_E^2)^2 + \nu^2 w_E^2} \tag{6}$$

Bemærk at den samlede løsning så findes ved at lægge sammen løsningerne (4) og (6). Vi ser at for $t \to \infty$, at det eneste led, som overlever, er

$$x_\infty(t) = a \frac{(w_0^2 - w_E^2)\sin w_E t - \nu w_E \cos w_E t}{(w_0^2 - w_E^2)^2 + \nu^2 w_E^2}.$$

Bemærk resonansen i udsvinget for $w_E \to w_0$.