Eksempel: Beregning af flertydigt integrale i den komplekse plan

Vis at følgende integrale antager den givne værdi ved hjælp af kontourintegration i den komplekse plan

$$\int_0^\infty \frac{x^{-1/3}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

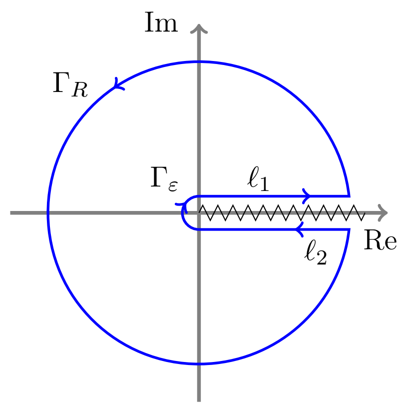
Flertydighed. Integranden $f(x) = x^{-1/3}/(x^2+1)$ er flertydig med et forgreningspunkt i $z = 0$. Det ses ved, at værdien af integranden ændres, hvis man går en runde om origo[1]:

$$f(x) = \frac{x^{-1/3}}{x^2+1} \qquad \xrightarrow{\theta+2\pi} \qquad \frac{(e^{2\pi i}x)^{-1/3}}{(e^{2\pi i}x)^2+1} = e^{-2\pi i/3}\frac{x^{-1/3}}{x^2+1} = e^{-2\pi i/3} f(x)$$

For at forhindre flertydighed introducerer vi en opskæringslinie langs den postive reelle akse. Bemærk, at vi reelt foretager et gæt på en fornuftig opskæringslinie, og ser om den kan bruges til at finde en passende integrationsvej.

Integrationsvej. Integralet, vi er interesseret i, udregnes langs den øvre side af opskæringslinien

$$\int_0^\infty \frac{x^{-1/3}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\ell_1} \frac{z^{-1/3}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$



For at bruge Cauchys sætning indfører vi ekstra integrationsveje som hjælp til at udregne integralet, en langs den nedre side af opskæringslinien ℓ_2, en langs en cirkel i uendelig Γ_R og en langs en lille halvcirkel omkring venstre side af origo Γ_ϵ.

Singulære punkter. Fra Cauchys sætning er integrationen langs alle disse veje (samlet en lukket kurve) givet ved summen af residuerne inden for integrationsvejen. Vi ser, at nævneren kan faktoriseres, $x^2+1 = (x-i)(x+i)$, og aflæser direkte, at der er to simple poler i $x = i$ og $x = -i$. Disse poler ligger begge inden for integrationsvejen og derfor er

$$\oint_{\ell_1+\Gamma_R+\ell_2+\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\Big(Res(-i) + Res(i)\Big),$$

hvor vi får at

$$Res(i) = \lim_{z\to i}\Big((z-i)f(z)\Big) = \frac{i^{-1/3}}{2i} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2i}$$

og

$$Res(i) = \lim_{z\to -i}\Big((z+i)f(z)\Big) = \frac{\left(e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)^{-1/3}}{-2i} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{-2i}$$

[1]Bemærk at for $x = re^{i\theta}$, så vil en runde om origo bidrage til at vinklen $\theta \to \theta + 2\pi$, dvs. $x \to re^{i(\theta+2\pi)} = e^{2\pi i}x$.

Vi beholder den imaginære enhed i nævneren da vi omlidt muliplicerer residuerne med $2\pi i$.

Bidrag fra enkelte segmenter. Vi ser at integrationen langs den ydre cirkel ikke bidrager til integralet idet

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \leq 2\pi R \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)| \stackrel{R\to\infty}{\to} 0.$$

Vi har her brugt, at (for alle z på Γ_R)

$$|zf(z)| \stackrel{R\gg 1}{\approx} R(R^{-1/3}/R^2) = R^{-4/3} \quad \stackrel{R\to\infty}{\to} \quad 0$$

og at nævneren i integranden for store radier er: $1+R^2 \approx R^2$.

Sagt i ord, så er integralet mindre end eller lig med maksimumsværdien af integranden langs integrationsvejen ganget med længden af integrationsvejen, som er $2\pi R$. Da maksimumsværdien går hurtigere mod nul end længden af integrationsvejen vil integralet være nul. På lignende vis, ser vi nu, at bidraget fra Γ_ϵ er nul når radius, ϵ, går mod nul,

$$\left|\int_{\Gamma_\epsilon} f(z)\ \mathrm{d}z\right| \leq \pi\epsilon \max_{z\in\Gamma_\epsilon} |f(z)| \stackrel{\epsilon\to 0}{\to} 0$$

idet (for alle z på Γ_ϵ)

$$|zf(z)| \stackrel{\epsilon\ll 1}{\approx} \epsilon(\epsilon^{-1/3}) = \epsilon^{2/3} \quad \stackrel{\epsilon\to 0}{\to} \quad 0$$

Vi har her benyttet, at nævneren i integranden for små radier: $1+\epsilon^2 \approx 1$.

De sidste skridt. I grænserne for hhv. store og små radier på de cirkulære veje kan vi se bort fra Γ_ϵ og Γ_R, og derfor får vi, at

$$\oint_{\ell_1+\Gamma_R+\ell_2+\Gamma_\varepsilon} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\ell_1+\ell_2} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i\Big(Res(-i)+Res(i)\Big)$$

Integralet langs ℓ_2 svarer til at integrere x fra uendelig til nul, men bemærk, at vi ikke kan krydse opskæringslinien, og derfor vil x langs ℓ_2 antage værdien $e^{2\pi i}x$, som indsættes i integranden, og vi får derved

$$\int_{\ell_1+\ell_2} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_0^\infty \frac{x^{-1/3}}{x^2+1}\ \mathrm{d}x + \int_\infty^0 \frac{(xe^{2\pi i})^{-1/3}}{x^2+1}\ \mathrm{d}x = (1-e^{-2\pi i/3})\int_0^\infty \frac{x^{-1/3}}{x^2+1}\ \mathrm{d}x$$

Det skal nu være lig summen af residuerne

$$(1-e^{-2\pi i/3})\int_0^\infty \frac{x^{-1/3}}{x^2+1}\ \mathrm{d}x = \pi\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$$

Herfra bliver beregningen lidt teknisk, men det er en god øvelse (!!) at prøve at gå igennem de enkelte trin herunder (en test af hvor godt man har styr på den komplekse eksponentialfunktion)

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{-1/3}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)}{1-e^{-i\frac{2\pi}{3}}} \\
&= \frac{\pi\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{1-e^{-i\frac{2\pi}{3}}} \\
&= \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{-i\frac{2\pi}{6}} + e^{i\frac{2\pi}{6}}\right)}{e^{-i\frac{2\pi}{6}}\left(e^{i\frac{2\pi}{6}} - e^{-i\frac{2\pi}{6}}\right)} \\
&= \frac{\pi i\left(e^{i\frac{2\pi}{6}} + e^{-i\frac{2\pi}{6}}\right)}{e^{i\frac{2\pi}{6}} - e^{-i\frac{2\pi}{6}}} \\
&= \pi\frac{\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Vi har brugt følgende værdier $\cos(\pi/3) = 1/2$ og $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.