

修士論文
交通流及び粉体パイプ流のダイナミクス

九州大学大学院 理学研究科
凝縮系科学専攻 凝縮系基礎論II

御手洗菜美子

指導教官 中西秀

2000年

概要

一次元交通流モデルの一つであるOVモデルの一樣解の安定性を解析し、一樣解が移流不安定なパラメータ領域を決定した。さらに、一樣解に局所的な摂動を与えると数値実験の結果、一樣解と渋滞-自由走行領域の間に振動的な振舞いがみられることを発見し、この振動解の性質を調べた。その結果、OVモデルが様々な周期の振動解を持つことがわかった。それらの振動解は線形不安定であるが、移流により安定化されて現れる。数値実験で自発的に現れる振動解の時間周期は、最も下流に残るモードの時間周期から決定されることを確かめ、解の空間構造を明らかにした。

目次

第1章 序	3
第2章 交通流と粉体パイプ流	5
2.1 交通流の観測	5
2.2 粉体パイプ流の実験	7
2.3 現象論的モデル	9
第3章 OV モデル	10
3.1 OV モデル	10
3.2 一様解の線形安定性	12
3.3 周期境界条件における数値実験の結果	13
3.4 弱非線形解析	15
第4章 上流と下流が区別された系における OV モデルの振舞い	17
4.1 線形応答	17
4.2 数値実験の結果	19
4.3 移流不安定性	21
4.4 振動解	26
4.4.1 振動解の性質	27
4.4.2 振動解の安定性	29
4.4.3 数値実験で現れる振動解の周期	29
4.5 OV モデルの解の空間構造	31
4.6 空間構造が非線形効果により変化する場合	33
第5章 まとめと議論	37
5.1 本論文のまとめ	37
5.2 議論	38
謝辞	40
付録 A 弱非線形解析	41
付録 B フロッケ指数	45

付 録 C 先頭を一様解の周りで微小振動させた場合の振舞い	48
参考文献	52

第1章 序

非平衡散逸系は、様々な興味深い振舞いを示すが、その機構には非線形性が重要な役割を果たしている場合が多く、理論の解析的取り扱いのみで現象を理解するのは困難である。しかし、近年の計算機の発達により、非線形性を含む問題を数値的に解くことが可能になった。同時に、数値的な方法と解析的な手法を併用することで現象の理解が進み、カオスやパターン形成の問題のように、一見複雑な振舞いでも、比較的簡単な現象論的モデルで記述できることが多いことがわかってきた。

粉体系は、非平衡散逸系の一つである。粉体系では、巨視的なスケールと微視的なスケールの分離が困難であることや、外部からの駆動力の大きさによって振舞いが固体的、液体的、気体的のどの状態にもなり得ることなどから、大変身近な系であるにも関わらず、理解が進んでいるとはいえない。しかし前述の数値的手法と解析的手法の併用が有効な分野であり、またカオスやパターン形成などの分野で発展した数理的な手法を応用できる可能性も大きい。

粉体系でみられる興味深い現象の一つに、鉛直に立てたパイプに粉体を流すという実験（粉体パイプ流）における自発的な密度波の形成が挙げられる。この現象においては、密度の時間変化のパワースペクトルが冪乗則に従うという報告もある。パワースペクトルに現れる冪乗則、いわゆる $1/f$ 揺らぎは、この現象に限らず非平衡現象に広くみられるものであるが、その意味が理解されている現象は限られている。粉体パイプ流は準一次元系とみなせるため、取り扱いが比較的容易であり、現在までも、実験の他、離散要素法やセルラーオートマトンを用いた数値実験、現象論的なモデルによる解析など様々なアプローチで研究がなされている。しかし、密度の時空間パターンや、パワースペクトルに冪乗が現れることの意味などはまだ完全に理解されてはいない。

一方、粉体パイプ流における密度波形成と共通の要素を持つ現象としてよく挙げられるものに、高速道路での交通流における自然渋滞の発生がある。交通流は、準一次元系とみなせること、自然渋滞の発生が自発的な密度波の形成とみなせること、 $1/f$ 揺らぎがみられることなどから、粉体パイプ流と類似のモデルである程度まで記述できるのではないかと考えられている。さらに、各車の挙動を追うことができるため、粉体流より「微視的」なモデルを構成しやすく、実験（観測）との比較も容易である。

これらのことをふまえて、本論文では、交通流のモデルとして提案された最適速度（Optimal Velocity, OV）モデル [1, 2] の振舞いを研究した。OV モデルは、交

通流の微視的モデルのうち最も単純なものの一つであるが、密度波の自発的形成を再現でき、また多少の変更を加えることによって粉体パイプ流のモデルとして考えることが可能である。この OV モデルの振舞いを、数値的な手法と解析的な手法を併用して詳しく解析することによって、密度波の形成のダイナミクスやパターンを理解することが本論文の目的である。

本論文の構成は、以下のようになっている。

第 2 章においては、まず交通流と粉体パイプ流の観測、実験結果と、それらを記述する様々な現象論的なモデルを紹介する。次に第 3 章で、本研究で取り扱う OV モデルを導入し、今までの研究で明らかにされた、周期境界条件下でのモデルの振舞いと、線形解析、弱非線形解析の結果について簡単に紹介する。第 4 章では、上流と下流が区別された境界条件の下でみられる OV モデルの特徴的な振舞いを解析し、解の空間構造を議論する。最後に第 5 章で、まとめと議論を行なう。

第2章 交通流と粉体パイプ流

本章では、交通流と粉体パイプ流の密度波形成の現象に関して、どのような実験（観測）がなされ、どのような特徴がわかっているかを簡単に紹介する。2.1節は交通流、2.2節は粉体パイプ流について述べる。2.3節では、交通流と粉体パイプ流における密度波形成を記述する現象論的モデルについて述べる。

2.1 交通流の観測

交通流は古くから研究されてきたが、なかでも、「自然渋滞」とよばれる現象は多くの研究者の興味を引いてきた。これは、明白な交通渋滞の原因（事故、工事など）が存在していないように見える高速道路などで自然発生的に渋滞がおきる現象である。この自然渋滞がおきている道路を観測すると、車の密度が高い渋滞領域と、密度が低い自由走行領域とが共存していることがわかる。つまり、自然渋滞とは、自発的に密度波が形成される現象であるということができる。

交通流の観測は、高速道路上のいくつかの観測点の車線毎に検出器をおき、そこを車が横切る時間と速度を測定したり [3]、単位時間あたりの流量と平均速度を測定したり [4] する方法によって行なわれる。それらのデータから、流量 = 密度 × 速度という関係式を用いて流量、密度、速度のうち直接測定されていない量が計算される。データを解析する際には、これらの量の時系列プロットも用いられるが、横軸に密度、縦軸に流量をプロットした図（基本図とよばれる）上でどの位置を占めるかということで議論されることが多い。そこで、以下に、交通流で観測される様々な状態を、基本図上の特徴と対応させながら紹介する。

図 2.1 は、交通流の実測データから得られた基本図であり、横軸が密度 ρ (台/Km)、縦軸が流量 q (台/5分) である。揺らぎは大きいですが、基本図上の分布は大雑把にいうと「人」という字に似た形をしていることがわかる。低密度領域では密度に比例して流量が増える傾向がみられ、基本図上では右上がりの分布が得られる（図 2.1 ではおよそ $0 < \rho < 40$ の範囲）。これは、各車がスムーズに走行している「自由走行 (free flow)」に対応している。これに対し、高密度領域では、右下がりの分布が得られる（図 2.1 ではおよそ $25 < \rho$ の範囲）。この分布は「混雑状態 (congested traffic)」に対応する。これは、密度が高くなり過ぎると、衝突をさけるために各車の速度が遅くなり、流量が減ってしまうためである。また、自由走行（右上がりの分布）と混雑（右下がりの分布）が共存している領域があ

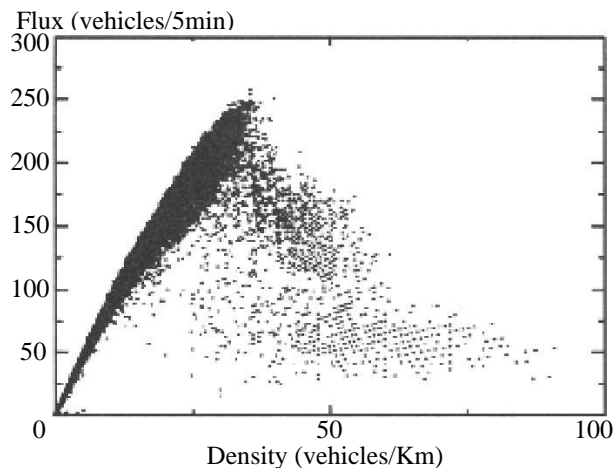


図 2.1: 1996 年に東名高速道路の東郷パーキングエリア付近で観測されたデータによる基本図。文献 [4] から引用したものである。横軸が密度 ρ (台/Km)、縦軸が流量 q (台/5分) である。この図は、流量と速度を測定し、そのデータから密度を計算して得られた。

る (図 2.1 ではおよそ $25 < \rho < 40$ の範囲)。このような共存領域での自由走行は、過度に高密度で高速であるため、不安定または準安定であると考えられている。また、自由走行と比較して、混雑状態では基本図上のデータの揺らぎが極端に大きいことも特徴である。

また、混雑状態における振舞いは、近年詳しく調べられ、以下に挙げる二つの状態が区別されるようになった。(i) 渋滞 (jam) [3, 5–7]。これは車間距離が極端に狭くなり、車がほとんど停止している、または非常に速度が遅い状態が数台から数十台に渡って続くものであり、上流側に伝播することが知られている。(ii) 同期流 (synchronized flow) [5–7]。これは違う車線の車の流れが強い相関を持つところから名付けられた。混雑がひどくなり、車線変更が困難になっている状態である。自由走行と比較すると速度は遅いが、渋滞と比較すると流量が大きいことが特徴であり、基本図において混雑状態が広い面積を占める原因の一つと考えられている。オンランプのような交通上の障害の周辺に現れる場合と、障害に関係なく現れる場合があるが、障害の影響で形成されたとみられる同期流は、比較的長時間維持されることが多い。また、自由走行から同期流に移るときに有限の大きさの摂動が必要であり、ヒステリシスのような振舞いがみられるとして、これらの状態間の移り変わりを一次の相転移とみなした研究もなされている [6, 7]。

さらに、渋滞と自由走行が交互に現れる状態 (Stop-and-Go Traffic, SGT) [7] も観測された。SGT の形成の原因として、道路上に障害があると、そこで繰り返し短い渋滞がおこり、それが成長しながら上流に伝播していくことが挙げられている。下流側から上流側に向かって、自由走行 \rightarrow (オンランプ) \rightarrow 同期流 \rightarrow SGT という空間構造が形成される場合もある [7]。

このように、交通流は非常に複雑な振舞いを示す。自然渋滞の原因のみならず、これらの複雑な振舞いを解析することが、最近の交通流の理論的研究の目的の一つとなっている。また、密度の時間変化のパワースペクトルが冪則に従う ($1/f$ 揺らぎ) という観測結果が報告されている [8]。

2.2 粉体パイプ流の実験

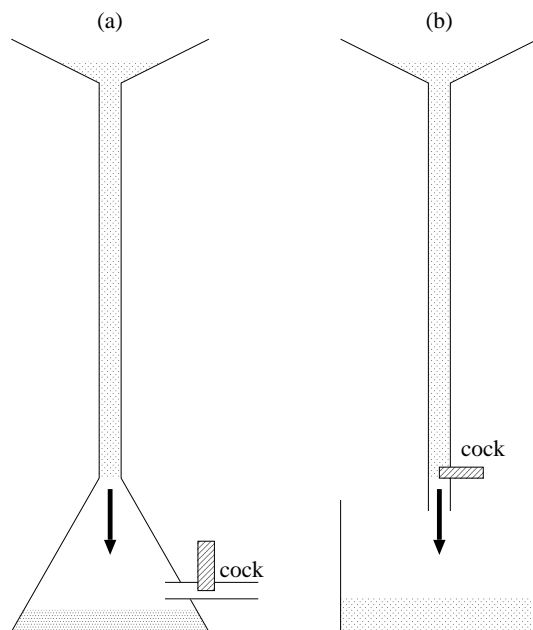


図 2.2: 粉体パイプ流の実験の模式図。(a) 文献 [9–12] の実験の模式図。下部のフラスコにコックが取り付けられており、流体(空気など)の流出量を調整できる。コックを閉めると、粉体の排除体積効果により流体が逆流する。文献 [13] はコックを取り付けていないので、コックを閉めているのと同じである。(b) 文献 [14, 15] の実験の模式図。管下部のコックにより、粉体の流出量を調整する。

粉体をホッパーから流出させたり管の中を流したりする過程は工学的に重要であり、そこで密度波の形成が見られることは古くから知られていた。しかしその原因はまだはっきりとは解明されておらず、現在も研究が行なわれている。

そのような系を単純化した実験の一つが、鉛直に立てた細い管の上にホッパーをつけ、粉体を流す実験である(図 2.2)。空气中で粗い砂 [9–12, 16] またはガラスビーズ [14, 15] を流した実験、液体を満たした管に金属球を流した実験 [9, 13] などがある。どの実験においても、ある条件の下では自発的に密度波が形成されることが報告されている。

粗い砂を用いた実験では、管下部に取り付けたフラスコのコック(図 2.2(a))を開けて自由に流体(空気)が流れ出るようにしたときは密度波が現れないが、コックを閉めると、ホッパーからある程度はなれた位置に、はっきりした密度波が形成されることが報告されている [9–11]。これは、粉体の排除体積効果により流体が逆流することによるパイプ中の流体と粉体の相互作用が、密度波形成の重要な要素であることを示している。また、パイプ上に固定した観測点における密度の時間変化のパワースペクトルが調べられ、密度波が形成される場合はパワースペクトルが冪則に従う周波数領域が存在することが報告された。その指数は 1.3 程度 [10, 11] であった。

流量(単位時間あたりのパイプ下部からの流出量)と密度波の関係について調べた実験 [14, 15] では、管の下部のコック(図 2.2(b))を完全に開放すると密度波が見られないことが報告されている。文献 [15] では、密度の時空間図を詳しく調べ、流量を変えることで単純な進行波や振動しながら伝わる波などの異なる振舞いが観察された。

一方、液体中での実験 [13] では、充填率が高くなると密度波が形成されることが報告された。ただし、パワースペクトルが広い周波数領域で冪則に従うのは、自由流から密度波に転移する充填率においてのみであり、その指数は 0.8 程度であった。

また、分子動力学 (Molecular Dynamics, MD) 法 [17–19] や格子ガスオートマトン [20, 21] を用いた数値実験も行なわれ、やはり密度波の生成が観察されている。後者では、壁との摩擦と粒子間の非弾性衝突を考慮した場合としない場合の結果を比較して、これらの効果が密度波生成に重要であるという結論が出されている。また、密度の時間変化のパワースペクトルが、指数が $4/3$ の冪則に従うという結果も得られている。

2.3 現象論的モデル

2.1節、2.2節から、交通流と粉体パイプ流という二つの現象の共通点として、次のようなことが挙げられることがわかる。(i) 準一次元系とみなすことができる。(ii) 自発的な密度波の形成が観測されている。(iii) 密度の時間変化のパワースペクトルが冪則に従うことが報告されている。このように共通点が多いことから、この二つの現象はある程度まで類似のモデルで記述されるものと考えられ、この二つの現象の類似を意識した研究もある [13, 22–24]。ただ、粉体流のモデルは数多くあるが、粉体パイプ流の解析に用いられたものはあまり多くない。そこで本節では、主に交通流の現象論的モデルを紹介するが、粉体パイプ流のモデルについても言及する。

密度波の再現に成功した現象論的なモデルには、次のようなものがある。(i) 連続モデル、または流体力学的モデル。これは、構成要素の局所的な密度を連続変数とみなし、偏微分方程式でその変化を記述する巨視的なモデルである。バーガー方程式の衝撃波により密度波を記述するモデル [8] や、ナビエ-ストークス方程式を意識して導入されたモデル [25]、気体運動論の形式になって導入されたモデル [26] などがある。(ii) 微視的モデル。これは、各構成要素（車または粉体粒子）の運動が、周辺の状況（近くの構成要素との距離、相対速度など）で決定されるモデルである。このタイプのモデルが密度波の再現に成功したことは、全体の振舞いが局所的なダイナミクスに支配されていることを示唆するのではないかと思われる。(ii) はさらに、(a) 微分差分方程式系、(b) 結合写像系、(c) セルラーオートマトンに分類することができる。(a) は、各構成要素のダイナミクスを、周辺の要素との距離や相対速度を含んだ微分方程式で表すものである。このグループに属する交通流モデルは、直前の車との距離や相対速度のみに依存する微分方程式で表されるものが多く、追従モデルとよばれる [1, 27–29]。他に、直後の車の運動にも依存する交通流モデル [30] や、周辺の粉体との距離に依存した力を考えた粉体パイプ流のモデル [10] などがある。(b) は、(a) とほぼ同じであるが、(a) で連続変数として扱う時間を、離散的に取り扱うモデルである。計算時間が短くて済むことや、確率的な振舞いを採り入れやすいことなどが利点である [31–33]。(c) は、(b) では連続変数として扱っていた位置や速度を、離散的に取り扱うことが特徴の一つである。位置や速度は、各構成要素の周辺の状況に依存した規則に従って時間刻みごとに更新されていく。やはり計算時間が少なく済み、確率的な振舞いを採り入れやすい [20, 21, 34–36]。

本論文で取り上げる OV モデルは、追従モデルの一つである。このモデルは交通流のモデルとして提案されたが、非常に簡単なモデルであるため、そのモデルの意味を理解しやすく、また多少の変更を加えることで、粉体パイプ流のモデルとして取り扱うことも可能である。OV モデルの拡張または変形と考えられるモデルも多く [10, 28, 30, 32]、OV モデルの性質を理解することは、密度波形成のダイナミクスの理解を促進するものと考えられる。

第3章 OVモデル

この章では、まず 3.1 節で、坂東らによって提案された OV モデル [1, 2] を導入する。いままでの研究においては、主に周期境界条件下での OV モデルの振舞いが議論されてきた [1, 2, 37, 38]。3.2 節以降で、それらの研究結果を簡単に紹介する。

3.1 OVモデル

OV モデルでは、構成要素（車または粉体粒子）が一方向に進む一次元系を考え、その運動が局所的な要素の配置によって決定されるものとする。具体的には、構成要素に後ろから順に番号をつけたとき、 n 番目の構成要素の位置 x_n が次の運動方程式に従う。

$$\ddot{x}_n = a[U(b_n) - \dot{x}_n] \quad (3.1)$$

ここで、 $b_n \equiv x_{n+1} - x_n$ であり、前の構成要素との間の距離を表す（図 3.1）。また、ドットは時間微分を表す。 $U(b)$ は前の構成要素との距離が b の時の「最適速度」であり、 a は最適速度への緩和率である。つまりこのモデルでは、前の構成要素との間の距離で決定される最適速度が存在し、各要素の加速度は、この最適速度と実際の速度のずれに応じて加わると考えていることになる。これは、交通流では運転者が車間距離に応じて速度を調整する様子を表している。粉体パイプ流では、前の粉体との距離に応じて、パイプ内の流体との相互作用が変化することを表しているといえよう。

交通流のモデルとして (3.1) 式を用いる場合は、最適速度関数 $U(b)$ には、次のような性質が要求される [1, 2]。(i) 車間距離が無限大の場合の最適速度が定数になる ($U(b \rightarrow \infty) \rightarrow \text{const.}$) こと。これは車の速度には上限があるためである。(ii) 単調増加関数であること。これは運転者が衝突を避けつつ出来るだけ速く運転しようとする傾向を反映するためである。(iii) 適当な車間距離以下では最適速度が

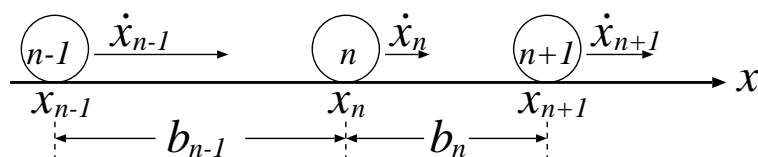


図 3.1: OV モデルの概念図。各要素の加速度は直前の要素との間の距離に応じて変化する。

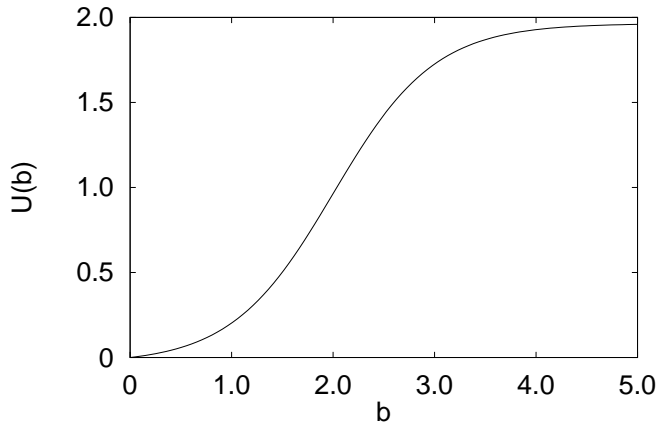


図 3.2: 最適速度関数 (3.3) 式のグラフ。横軸が車間距離 b 、縦軸がその車間距離に対応する最適速度 $U(b)$ である。交通流の最適速度関数に要求される条件を満たしている。

0 になること。これは車の衝突を避けるためである。車の大きさを無視する場合、 $U(0) = 0$ としてよい。

OV モデルを粉体パイプ流のモデルとして用いるときも、上述の最適速度関数に要求される性質のうち、(i) と (ii) は次のような理由から満たされるべきであると考えられる。(i) について：前に粒子がなくても、重力による加速と流体との摩擦による減速が釣り合う終端速度が速度の上限となるため。(ii) について：粉体間の距離が短いほど、流体による圧力が高くなり、重力と逆向きの力がかかるため。

(iii) の粒子間距離が 0 のときの最適速度に関しては、各粒子は常に進行方向 (鉛直下方) に流れており、粉体粒子同士が衝突したときも正の速度を持っていると考えられるので、 $U(0) = 0$ の代わりに $U(0) = \text{const.} > 0$ が要求される。この $U(0)$ の値の違いは、周期境界条件下では座標系をガリレイ変換すれば取り除くことができるが、出口と入口が存在する系ではそのような操作ができないことを注意しておく。

これらの性質をみたす最適速度関数の具体的な関数形としては、例えば

$$U(b) = \alpha[\tanh(\beta(b - \gamma)) + \delta] \quad (3.2)$$

が考えられる。ここで、 α 、 β 、 γ 、 δ はそれぞれ定数である。交通流では、車の速度の車間距離依存性を直接測定することができるため、実際のデータからこれらの定数を見積もることができる [39, 40]。

今後本論文では、最適速度関数を

$$U(b) = \tanh(b - 2) + \tanh(2) \quad (3.3)$$

とする (図 3.2)。これは交通流のモデルに要求される定性的な条件を満たしている [1, 2]。したがって、本節以降は交通流のモデルとしての OV モデルを取り扱うことになる。本研究と粉体パイプ流との関係は、5 章で再び議論される。

3.2 一様解の線形安定性

(3.1) 式は

$$x_n = \bar{b}n + U(\bar{b})t + \text{const.} \quad (3.4)$$

の一様解を持つ。この一様解は、全ての車が車間距離 \bar{b} 、速度 $U(\bar{b})$ で走っている状況を表している。この節では、坂東らによって行なわれた一様解 (3.4) の線形安定性の解析結果を紹介する [1, 2]。なお、小松による文献 [38] も参考にした。

各車の位置が、一様解からの微小なずれ $\Delta x_n(t)$ を用いて

$$x_n(t) = \bar{b}n + U(\bar{b})t + \Delta x_n(t) \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_n(t) \equiv v_n(t) = U(\bar{b}) + \Delta v_n(t) \quad (3.6)$$

で表される場合、線形近似の範囲で運動方程式は次のようになる。

$$\Delta \dot{v}_n(t) = a[U'(\bar{b})\Delta b_n(t) - \Delta v_n(t)] \quad (3.7)$$

$$\Delta \dot{b}_n(t) = \Delta v_{n+1}(t) - \Delta v_n(t) \quad (3.8)$$

ただし、 $\Delta b_n \equiv \Delta x_{n+1}(t) - \Delta x_n(t)$ とした。また、ダッシュは微分を表す。

ここで周期境界条件を仮定し、系内を N 台の車が走っているとすると、フーリエ変換は次のように定義される。

$$\Delta \tilde{v}_m(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_n \Delta v_n(t) e^{-2\pi i n m / N} \quad (3.9)$$

$$\Delta v_n(t) = \sum_m \Delta \tilde{v}_m(t) e^{2\pi i n m / N} \quad (3.10)$$

フーリエ係数の時間依存性を $e^{-i\omega t}$ と仮定すれば、線形化された運動方程式は

$$-i\omega \Delta \tilde{v}(k) = a[U'(\bar{b})\Delta \tilde{b}(k) - \Delta \tilde{v}(k)] \quad (3.11)$$

$$-i\omega \Delta \tilde{b}(k) = \Delta \tilde{v}(k)(e^{ik} - 1) \quad (3.12)$$

となる。ここで、 $k \equiv 2\pi m / N$ 、 $\Delta \tilde{v}(k) \equiv \Delta \tilde{v}_m$ とした。すると振動数 ω は次式で決定される。

$$\left(\frac{i\omega}{a}\right)^2 - \left(\frac{i\omega}{a}\right) - \frac{U'(\bar{b})}{a}(e^{ik} - 1) = 0 \quad (3.13)$$

この解は

$$-\frac{i\omega_{\pm}}{a} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{U'(\bar{b})}{a}(e^{ik} - 1)} \quad (3.14)$$

で、 ω の虚部が正のときに一様解が線形不安定になる。実数の k に対して ω の虚部が正になる条件は、不等式

$$a < 2U'(\bar{b}) \cos^2\left(\frac{k}{2}\right) \quad (3.15)$$

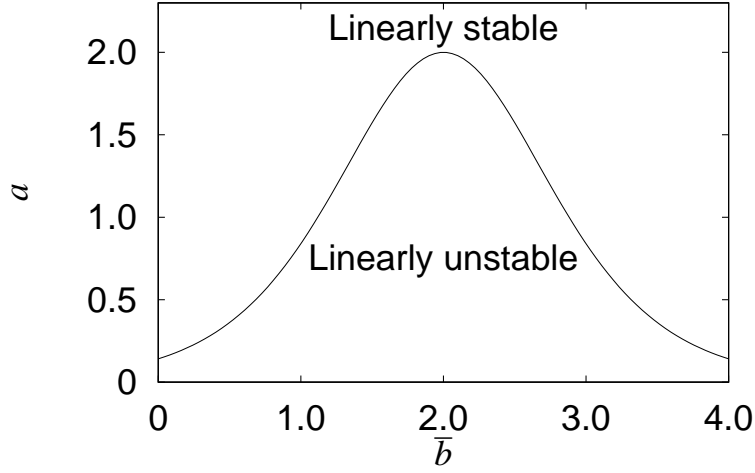


図 3.3: 線形不安定なパラメータ領域。縦軸が a 、横軸が \bar{b} であり、実線が線形中立安定線 $a = 2U'(\bar{b})$ である。実線より下が線形不安定領域である。

で与えられる。 a 、 $U'(\bar{b})$ は正であるから、(3.15) 式で $k \rightarrow 0$ の極限をとったものが、車間距離 \bar{b} の一様解が線形不安定になる a の上限を与える。つまり、長波長の不安定性によって一様解が不安定化することになり、

$$a < 2U'(\bar{b}) \quad (3.16)$$

が、線形不安定となる条件を与える。(3.16) 式をパラメータ空間で図示したものを図 3.3 に示す。

k が小さいところでは、 $-i\omega_+$ は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} & -\frac{i\omega_+}{a} \\ &= \left(\frac{U'(\bar{b})}{a}\right) \left[ik + \left(\frac{2U'(\bar{b})}{a} - 1\right) \frac{k^2}{2} - \left(12 \left(\frac{U'(\bar{b})}{a}\right)^2 - 6 \left(\frac{U'(\bar{b})}{a}\right) + 1\right) \frac{ik^3}{6} \right. \\ & \quad \left. - \left(5 \left(\frac{U'(\bar{b})}{a}\right)^3 - 3 \left(\frac{U'(\bar{b})}{a}\right)^2 + \frac{7}{12} \left(\frac{U'(\bar{b})}{a}\right) - \frac{1}{24}\right) k^4 \right] \\ & + O(k^5) \end{aligned} \quad (3.17)$$

k^2 の係数が正になることで一様解が不安定化することがわかる。

3.3 周期境界条件における数値実験の結果

周期境界条件を課した OV モデルの数値実験は、まず坂東らによって行なわれ [1, 2]、その後小松らにも行なわれた [37, 38]。本節ではその結果を紹介する。なお、

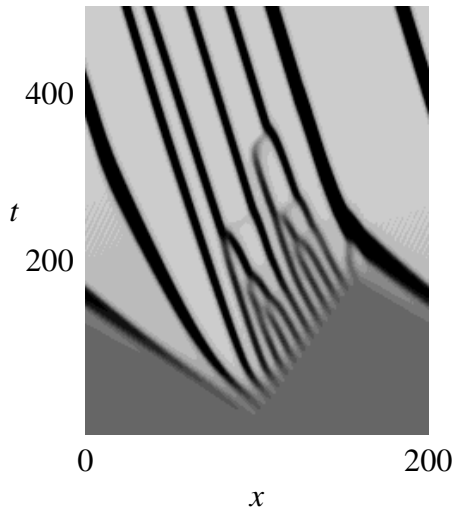


図 3.4: 周期境界条件下での密度の時空間発展。 $\bar{b} = 2$ の一樣解から一台の車の速度のみ微小量ずらし、数値実験を行なった。 $a = 1$ 、系の大きさ $L = 200$ である。色が濃いほど密度が高いことを示している。

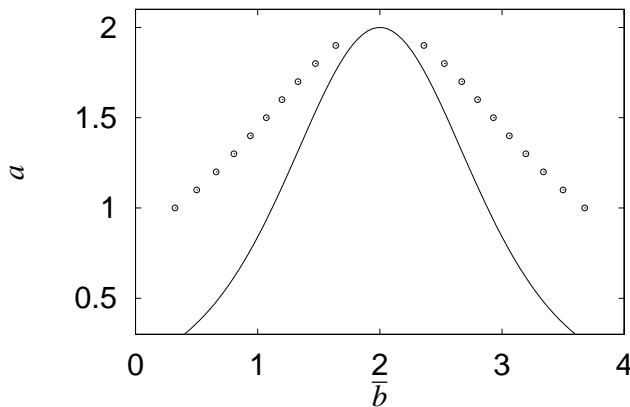


図 3.5: b_j 、 b_f 対 a のプロット。実線は横軸を \bar{b} とした線形中立安定線である。

本節に掲載されている図は、追試として実際に数値実験を行なって得られたものである。

線形不安定な一樣解に微小な摂動を加えて数値実験をおこなうと、自発的な渋滞の形成がみられる [1, 2]。一樣解に局所的な摂動を加えたものを初期条件として、周期境界条件下での密度の時空間発展を図示したのが図 3.4 である。同様の図は、文献 [1] の Fig. 1 や、文献 [2] の Fig. 6 にも与えられている。自発的に密度の高い領域と低い領域にわかれており、自然渋滞の形成を再現していることがわかる。今後、密度の高い領域を渋滞領域、低い領域を自由走行領域とよぶ。渋滞領域（自由走行領域）中の車間距離はほぼ一定値 b_j (b_f) をとる。

また、長時間の数値実験を経た後の b_j 、 b_f の値は、初期条件によらず、 a の値のみで決定されていることが知られている [1, 2, 37, 38]。 b_j 、 b_f 対 a のグラフを図 3.5 に示す。横軸を \bar{b} とした線形中立安定線も共に示した。渋滞領域と自由走行領域が共存している状況は、線形安定な二つの一樣解領域をつなぐ界面が存在している状況ともみなすことができることがわかる。この図と同様の図は、文献 [38] の図 3.24 にも与えられている。

3.4 弱非線形解析

OV モデルについては、小松らによって線形中立安定線近傍での弱非線形解析がなされ、 $U''(\bar{b}) \neq 0$ ($\bar{b} \neq 2$) の場合にはコルトヴェーク・ド・フリース (Korteweg-de Vries, KdV) 方程式が、 $U''(\bar{b}) = 0$ ($\bar{b} = 2$) の場合には修正 KdV (MKdV) 方程式が導出された [37, 38]。この節ではその結果を簡単にまとめる。なお、詳しい導出は、付録 A に与えてある。

線形中立安定線からの距離を、 $\epsilon > 0$ を用いて $a = 2U'(\bar{b})(1 \pm \epsilon^2)$ (- 側が線形不安定領域) と表すと、(3.17) 式の k^2 の項の係数が $O(\epsilon^2)$ になる。 $-i\omega_+$ の実部がバランスするためには k^2 と k^4 の項が釣り合う必要があるので、 $k \propto \epsilon$ 、つまり $n \propto \epsilon^{-1}$ である。また、(3.17) 式の k の 1 次の項はガリレイ変換により消去できるので、 ω の最低次の項は $O(\epsilon^3)$ 、つまり $t \propto \epsilon^{-3}$ となる。そこで、

$$z \equiv \epsilon(n + U'(\bar{b})t), \tau \equiv \epsilon^3 t \quad (3.18)$$

として「遅い変数」 z, τ を導入し、

$$x_{n+1} - x_n \equiv b_n(t) = \bar{b} + \epsilon^p h(z, \tau) \quad (3.19)$$

として、線形中立安定線の近傍で運動方程式 (3.1) を展開することにより、次のような縮約方程式が得られた [37, 38]。

(i) $U''(\bar{b}) \neq 0$ の領域では、 $p = 2$ となり、 ϵ の 1 次までで、次のような偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \partial_\tau h &= \frac{1}{6} U' \partial_z^3 h + U'' h \partial_z h \\ &+ \epsilon \left[\pm \frac{U'}{2} \partial_z^2 h - \frac{1}{8} U' \partial_z^4 h - \frac{1}{2} U'' \partial_z (h \partial_z h) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

ここで、 $\partial_\tau \equiv \frac{\partial}{\partial \tau}$ 、 $U' \equiv U'(\bar{b})$ などとした。これは KdV 方程式に摂動項が加わったものである。

(ii) $U''(\bar{b}) = 0$ (線形中立安定線の頂点) では、 $p = 1$ となり、 ϵ の 1 次までで、次のような偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \partial_\tau h &= \frac{1}{6} U' \partial_z^3 h + \frac{1}{2} U''' h^2 \partial_z h \\ &+ \epsilon \left[\pm \frac{U'}{2} \partial_z^2 h - \frac{1}{8} U' \partial_z^4 h - \frac{1}{12} U''' \partial_z^2 h^3 + \frac{1}{24} U'''' \partial_z h^4 \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

これは MKdV 方程式に摂動項が加わったものである。

小松らは、OV モデルの渋滞領域と自由走行領域をつなぐ界面が、MKdV 方程式のキंक解又は反キंक解で表されると考え、MKdV 方程式の持つ周期解が 1 次の摂動項によりどのような変更を受けるかを調べた。その結果、摂動項による

補正を受けても破壊されない解が存在するが、キック-反キック間の相互作用の結果、そのうちの周期解は不安定となり、無限系で最終的に選択されるのは、周期無限大のキック解または反キック解であることが示唆された。また、このキック解と反キック解は対称な形をしている。選択された(反)キック解は、線形中立安定線からの距離 ϵ が小さいとき、OV モデルの渋滞と自由走行をつなぐ界面とよく一致することが示され、(3.21) 式が渋滞-自由走行解の性質をよく記述することが明らかになった [37, 38]。一方、KdV 方程式の解であるパルス的なソリトンに対応する振舞いは、通常の数値実験では観察することが難しいが、みられる場合もある [41]。

なお、弱非線形解析により最低次で MKdV 方程式が導出できる交通流モデルは、OV モデルに限らず複数ある [42–44]。また、三次の非線形項が現れる点と線形中立安定線の頂点が一致しない交通流モデルについては、弱非線形解析によって MKdV 方程式を導くことはできず、三次の非線形項が現れる点近傍で得られる縮約方程式が、最低次で MKdV 方程式に新たな項が付け加わった式になることが知られている。このようなモデル場合、渋滞と自由走行をつなぐ界面とその逆の界面の形は非対称になる [23, 24, 30, 38, 45]。一方、ルール 184 とよばれるルールに従う交通流のセルラーオートマトンモデルは、超離散化の方法によりバーガーズ方程式と関係づけられることが知られている [46, 47]。

第4章 上流と下流が区別された系におけるOVモデルの振舞い

第3章で見たように、周期境界条件下での一様解の安定性と自然渋滞の発生はすでに詳しく議論されている。この場合、周期境界条件は、サーキット上を車が回っている状況に対応する [1, 2, 37, 38]。しかし、現実の高速道路における交通流や粉体パイプ流は、明らかに上流と下流が区別された系であり、周期境界条件を課した研究は必ずしも適切でない。また、周期境界条件を課した場合、長時間数値実験を行なうと定常状態が得られ、主にこの定常状態について解析されているが [37, 38]、高速道路の交通流やパイプ流ではそのような定常状態は実現されない。そこで、この章では、上流と下流が区別された系において一様解に局所的な摂動を加えた場合の振舞いを、数值的、解析的な手法を併用して考察した結果を述べる。まず、4.1節で、線形応答の計算結果を述べる。次に4.2節で、上流と下流が区別された境界条件の下での数値実験の結果を述べる。さらに4.3節で、流れのある系特有の性質の一つである移流不安定性について解析する。4.4節では、数値実験の結果発見された振動解について、その性質を調べ、数値実験で自発的に現れる振動の周期について考察する。4.5節では、そこまでの解析をふまえてOVモデルの解の空間構造を明らかにし、最後に4.6節で、非線形な効果により空間構造が変化するパラメータ領域について考える。

4.1 線形応答

一様解に局所的な摂動を与えた場合の系の振舞いを考察するため、まず無限系に次の摂動を与えたときの線形応答を調べた。

$$\ddot{x}_n = a[U(x_{n+1} - x_n) - \dot{x}_n] + \epsilon_{k,\omega} e^{ikn-i\omega t} \quad (4.1)$$

一様解からのずれについて線形化した運動方程式は次のようになる。

$$\Delta \dot{v}_n(t) = a[U'(\bar{b})\Delta b_n(t) - \Delta v_n(t)] + \epsilon_{k,\omega} e^{ikn-i\omega t} \quad (4.2)$$

$$\Delta \dot{b}_n(t) = \Delta v_{n+1}(t) - \Delta v_n(t) \quad (4.3)$$

解の形を

$$\Delta v_n(t) = V e^{ikn-i\omega t} \quad (4.4)$$

$$\Delta b_n(t) = B e^{ikn-i\omega t} \quad (4.5)$$

と仮定すれば次式が得られる。

$$-i\omega V = a[U'(\bar{b})B - V] + \epsilon_{k,\omega} \quad (4.6)$$

$$-i\omega B = V(e^{ik} - 1) \quad (4.7)$$

すると、感受率 $\chi(k, \omega)$ は次のように与えられる。

$$\chi(k, \omega) \equiv \frac{V}{\epsilon_{k,\omega}} = \frac{-(i\omega/a)/a}{(i\omega/a)^2 - (i\omega/a) - (U'(\bar{b})/a)(e^{ik} - 1)} \quad (4.8)$$

$\chi(k, \omega)$ の極は、分散関係を決定する (3.13) 式の解より決まる。

デルタ関数型の摂動

$$\epsilon(n, t) = \epsilon \delta_{n,0} \delta(t) \quad (4.9)$$

に対する応答¹ は、(4.8) 式の結果を用いて、積分

$$\Delta v_n(t) = \epsilon \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \chi(k, \omega) e^{ikn-i\omega t} \quad (4.10)$$

を実行することで計算できる。この解は

$$\Delta v_n(t) = \text{Res}(0; f_n(z)), \quad z \equiv e^{ik} \quad (4.11)$$

$$f_n(z) = \epsilon e^{-at/2} \left[\frac{1 + 2g(z)}{4g(z)} e^{-atg(z)} - \frac{1 - 2g(z)}{4g(z)} e^{atg(z)} \right] z^{n-1} \quad (4.12)$$

$$g(z) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{U'(\bar{b})}{a}(z-1)} \quad (4.13)$$

となる。ここで、 $\text{Res}(\alpha; f(z))$ は $f(z)$ の $z = \alpha$ における留数を表す。 $n \geq 1$ のときには $\Delta v_n(t) = 0$ 、すなわち摂動を受けた車 ($n = 0$) より前にある車は摂動の影響を受けない。

この応答の定性的な振舞いは、 $U'(\bar{b})/a$ の値によって以下のように分類できる。
(i) $0 < U'(\bar{b})/a < 1/4$ の場合: $-1/2 + g(0)$ は負の実数となり、線形の範囲での最大応答は時間と共に減衰する。
(ii) $1/4 < U'(\bar{b})/a < 1/2$ の場合: $-1/2 + g(0)$ は負の実部を持つ複素数となり、線形の範囲での最大応答は時間と共に振動しながら減衰する。
(iii) $1/2 < U'(\bar{b})/a$ の場合: (3.16) 式より系は線形不安定となり、線形の範囲での最大応答は時間と共に振動しながら拡大する。この計算は、 $t = 0$ で $n = 0$ の車の速度を ϵ だけずらすという OV モデルの数値実験と線形の範囲で一致することが確かめられている。線形不安定領域での線形応答の計算結果を図 4.1 に示す。

¹この摂動は、時刻 0 で $n = 0$ の車の速度を一様解から ϵ だけずらすことに対応する ((4.2) 式を見よ)。

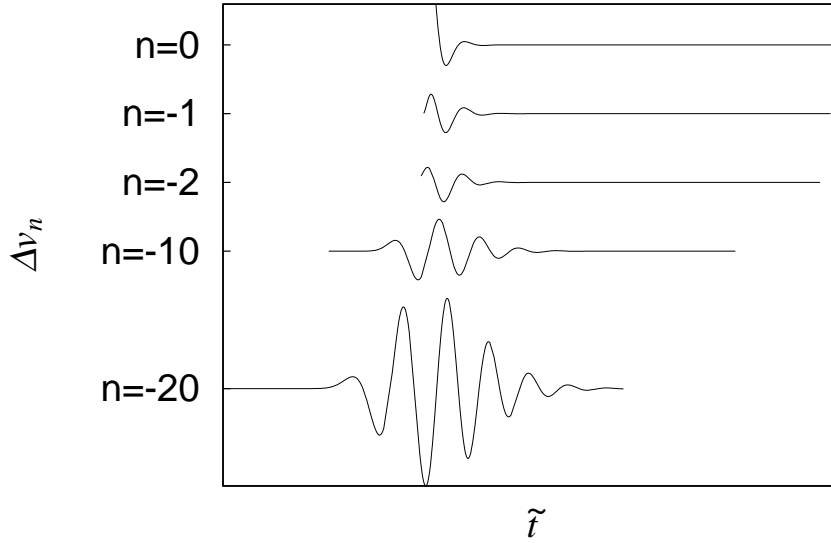


図 4.1: 線形不安定なパラメータ $a = 1$ 、 $\bar{b} = 2$ のもとでの、一様解の速度 $U(\bar{b})$ からの速度のずれ Δv_n を (4.11) 式、(4.12) 式、(4.13) 式を用いて計算したグラフ。 n は車番である。ただし、見易くするために、車毎に縦軸方向にずらし、また空間発展がわかるように横軸は一様解での時刻 t の車の位置、 $\tilde{t} = \bar{b}n + U(\bar{b})t$ にしている。 $t = 0$ で $n = 0$ の車の速度をずらしている。上から順に $n = 0, -1, -2, -10, -20$ であり、ずれが後方車に伝わるに従って増幅されていることがわかる。

4.2 数値実験の結果

4.1 節の線形応答の計算により、局所的な摂動が後ろの車に伝わるに従って発達する様子があった。次に本節では、上流と下流が区別される境界条件のもとで、一様解に局所的な摂動を与えるという 4.1 節の解析に対応した数値実験を行なった結果を述べる。

上流と下流が区別される系において、一様解に摂動を加えた場合の振舞いを議論するため、系の大きさを L として次のような境界条件を設定した。(a) 入口は $x = 0$ とし、時間間隔 $\bar{b}/U(\bar{b})$ で速度 $U(\bar{b})$ の車が入ってくる。(b) 出口は $x = L$ とし、それを越えた車は系から出ていく。先頭になった車 (N 台目とする) が従う運動方程式だけは、(3.1) 式ではなく

$$\ddot{x}_N = a[U(\bar{b}) - \dot{x}_N] \quad (4.14)$$

とする。

(a) と (b) の境界条件を課し、初期条件を車間距離 \bar{b} の一様解として数値実験を行なうと、系に摂動を与えなければ常に一様解が維持される。また、系に摂動を与えたとき、その影響がどちらかの境界に達しても、反対の境界側は影響を受け

ない。これに対し、周期境界条件を課し、初期条件を車間距離 $\bar{b} = L/N$ (N は系内の車の台数) の一様解として数値実験を行なってもやはり一様解が維持されるが、系に摂動を与えた場合、周期境界条件では摂動の影響が系から出ていくことはなく、系内を回り続ける。

初期条件としては、4.1 節の解析に対応させるため、一台の車の速度を一様解から微小量 ϵ だけずらした状態を用意した。具体的には、

$$x_n(0) = \bar{b}n + L/2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ に対して}) \quad (4.15)$$

$$v_0(0) = U(\bar{b}) + \epsilon \quad (4.16)$$

$$v_n(0) = U(\bar{b}) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ に対して}) \quad (4.17)$$

を初期条件とし、数値実験を行なった。なお、数値積分の方法としては、4 次のルンゲ・クッタ法を用いた。

計算機実験の結果、線形不安定領域での系の振舞いが大きく 3 つに分けられることが分かった。それは次のようなものである。

(i) 車間距離 \bar{b} の一様解に対して、緩和率 a がある値 $a_c(\bar{b})$ より大きい場合 ($a_c(\bar{b}) < a < 2U'(\bar{b})$): 摂動の影響は上流 (入口側) にしか伝わらず、摂動の影響が出ている部分と一様解との下流側の境界が後退していく。最終的には摂動の影響は入口から出ていってしまい、線形不安定な一様解に戻る (図 4.2(a))

(ii) a が $a_c(\bar{b})$ より小さい場合 ($a < a_c(\bar{b})$): 摂動の影響は上流にも下流 (出口側) にも広がり、摂動の影響が出ている部分と一様解との下流側の境界が前進する。最終的には線形不安定な一様解の領域はなくなってしまう (図 4.2(b))

(iii) 低密度領域が発達する場合: 初期の系の振舞いは (i) または (ii) と同様であるが、上流側で車間距離の広い低密度領域が発達すると、今度はその領域が下流に向かって前進し、一様解が飲み込まれていく (図 4.2(c))

(i) と (ii) は線形不安定性が移流的 (convective) か絶対的 (absolute) かの違いである [48, 49]。 (iii) は、摂動によるずれが発達してできた構造が一様解を侵食する現象であり、線形な取り扱いで解析することはできない。

また、図 4.2(b) に特に明確であるが、一様解 (灰色の領域) と渋滞-自由走行領域 (不規則な縞の領域) の間に規則的な縞模様が現れている。このパターンは、周期境界条件を課した図 3.4 ではすぐに失われてしまうが、図 4.2(b) では系からその領域が出ていくまでは残っている。この縞模様の領域では車の速度や車間距離が振動的な振舞いをしている。この振動的な振舞いが自発的に現れ、維持されることも、今回用いた境界条件を課した場合の特徴である。

本章の残りの節で、これらの特徴的な振舞いについて詳しく解析する。4.3 節では、移流不安定性とその線形解析について述べる。次に 4.4 節で、振動的な振舞いについて解析し、4.5 節で、系が十分大きい場合に現れる解の空間構造について考察する。ただし、これらの節では、(iii) の効果は考えない。最後に 4.6 節で、(iii) について議論する。

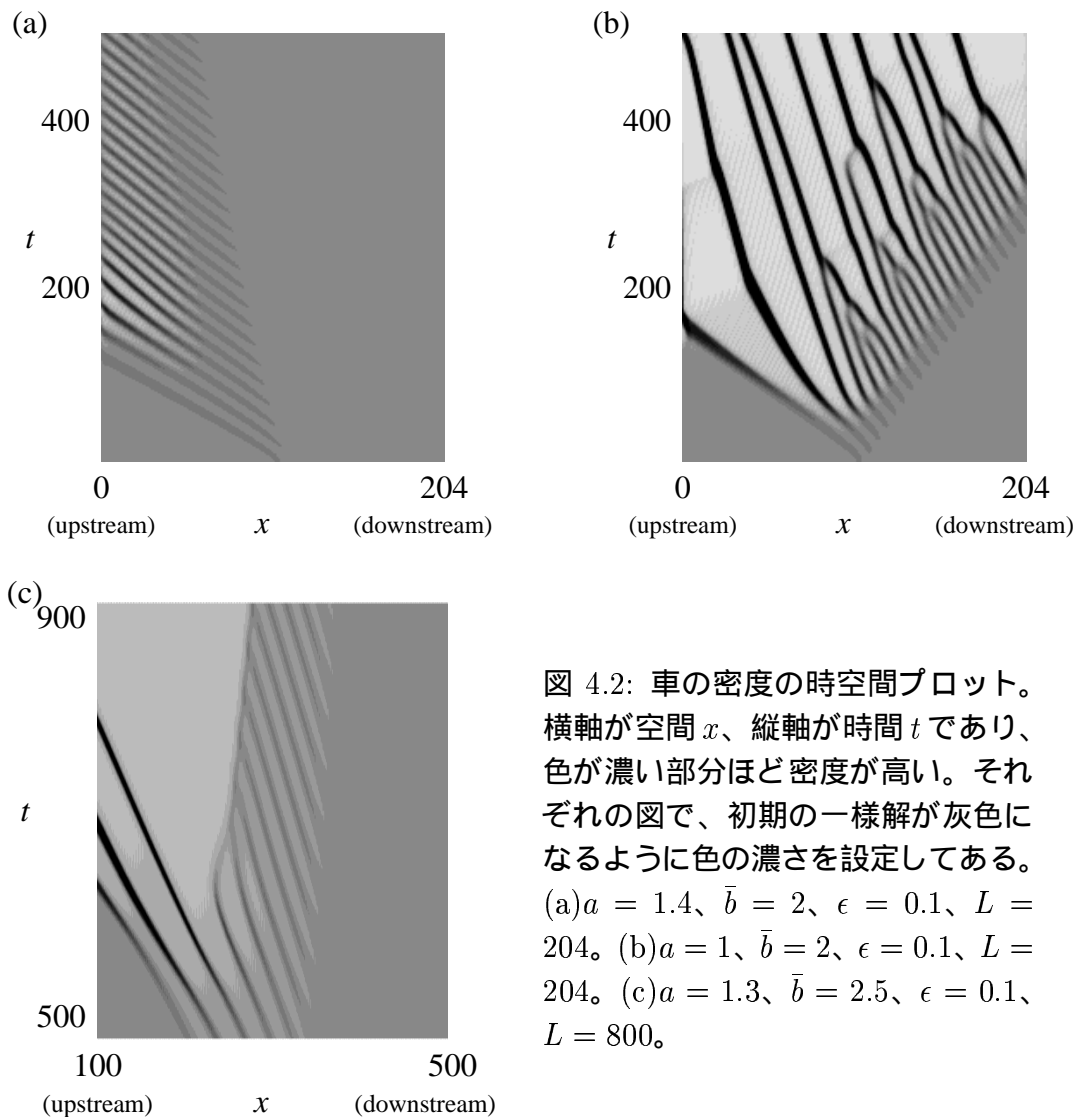


図 4.2: 車の密度の時空間プロット。横軸が空間 x 、縦軸が時間 t であり、色が濃い部分ほど密度が高い。それぞれの図で、初期の一様解が灰色になるように色の濃さを設定してある。(a) $a = 1.4$ 、 $\bar{b} = 2$ 、 $\epsilon = 0.1$ 、 $L = 204$ 。(b) $a = 1$ 、 $\bar{b} = 2$ 、 $\epsilon = 0.1$ 、 $L = 204$ 。(c) $a = 1.3$ 、 $\bar{b} = 2.5$ 、 $\epsilon = 0.1$ 、 $L = 800$ 。

4.3 移流不安定性

系が線形不安定な場合、摂動の影響は時間的に拡大する。しかし、どのような摂動も有限の広がりを持つ波束で表されるため、その後の空間発展には二つの可能性がある。一つは空間のあらゆる点で不安定化する場合であり、絶対不安定という(図 4.3(a))。もう一つは、不安定した波束が運び去られてしまう場合であり、移流不安定という(図 4.3(b)) [48–54]。

図 4.3 から容易に想像されるように、絶対不安定と移流不安定の違いは座標系に依存し、不安定化した波束と共に動く座標から見れば、常に絶対不安定となる。また、有限系に周期境界条件を課した場合は、不安定化した波束が系から運び去られることはなく、有限の時間内に摂動の影響が系全体に及ぶため、通常この違いは問題にならない。しかし、入口と出口が存在する有限系において不安定性が移

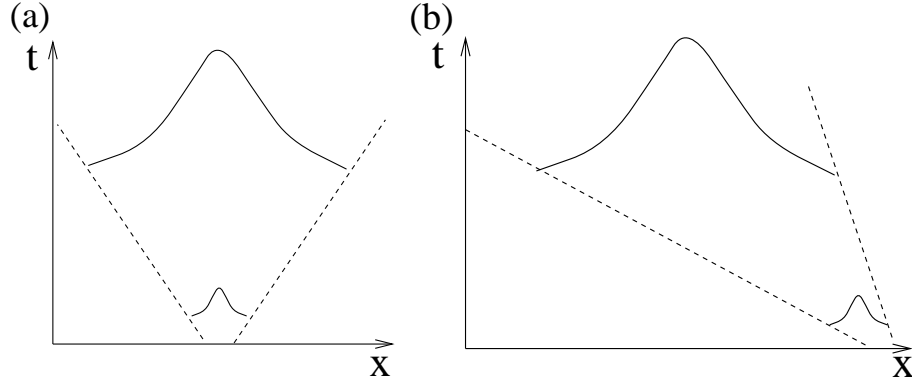


図 4.3: 絶対不安定と移流不安定の概念図。横軸が空間、縦軸が時間である。ともに線形不安定であるため、初期の摂動の振幅は時間が経つにつれて大きくなる。(a) 絶対不安定。空間のあらゆる点で振幅が拡大していく。(b) 移流不安定。不安定化した波束が運び去られてしまうため、 x を固定すると $t \rightarrow \infty$ で振幅は 0 となる。

流的な場合、微小な摂動が加わってもそれが発達する前に運びさらわれてしまうため、線形不安定な解が安定に存在できることになり、振舞いに大きな違いを生む。

4.2 節で述べた (i) と (ii) の違いは、系の境界 (入口 $x = 0$ と出口 $x = L$) に対して静止している座標系から見た不安定性が移流的か絶対的かの違いである。4.1 節の線形応答の計算の結果を用いて系が移流不安定であるかどうかを判定することは容易ではないが、 $t \rightarrow \infty$ の漸近的な振舞いのみに注目した線形解析を行なうと、ある座標系から見た時にその不安定性が移流的か絶対的かを判定することができる [48, 54]。以下ではその方法を述べる。

一様解が無限に続く系に、時刻 0 に局所的な摂動を与えたとする。その後の振舞いが、

$$x_n(t) = \bar{b}n + U(\bar{b})t + \Delta x_n(t) \quad (4.18)$$

の形であたえられたとして、 $\Delta x_n(t)$ の時間発展を考えよう。 $\Delta x_n(t)$ について線形化した運動方程式から

$$\tilde{x}(\omega, k) = \frac{g(\omega, k)}{\Delta(\omega, k)} \quad (4.19)$$

$$g(\omega, k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-ikn} [\Delta \dot{x}_n(0) - (i\omega - a)\Delta x_n(0)] \quad (4.20)$$

$$\Delta(\omega, k) = (i\omega)^2 - a(i\omega) - aU'(\bar{b})(e^{ik} - 1) \quad (4.21)$$

が得られる。ここで、

$$\tilde{x}(\omega, k) \equiv \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-ikn} \Delta x_n(t) \quad (4.22)$$

$$\Delta x_n(t) = \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \tilde{x}(\omega, k) e^{ikn} e^{-i\omega t} \quad (4.23)$$

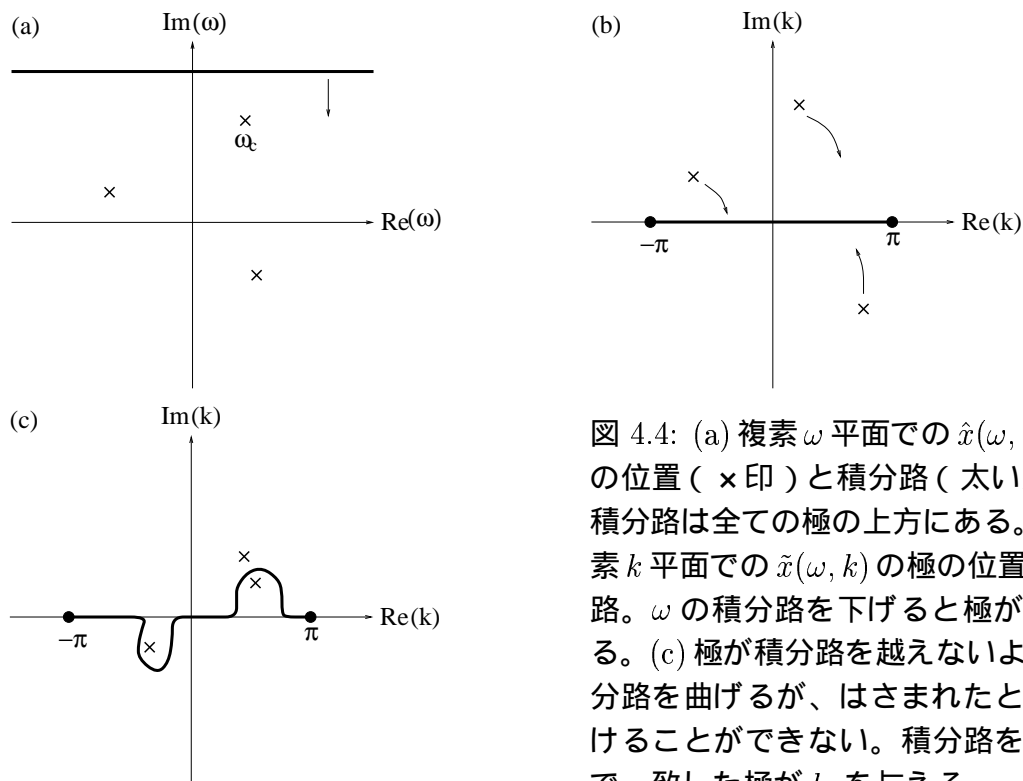


図 4.4: (a) 複素 ω 平面での $\hat{x}(\omega, n)$ の極の位置 (×印) と積分路 (太い実線)。積分路は全ての極の上方にある。(b) 複素 k 平面での $\tilde{x}(\omega, k)$ の極の位置と積分路。 ω の積分路を下げると極が移動する。(c) 極が積分路を越えないように積分路を曲げるが、はさまれたときは避けることができない。積分路をはさんで一致した極が k_c を与える。

とした。(4.20) 式からわかるように、 $g(\omega, k)$ は初期条件で与えられ、特異性はない。また、 $\Delta(\omega, k) = 0$ は (3.13) 式と同等であり、分散関係 $\omega = \omega(k)$ を与える。ここで、

$$\Delta x_n(t) = \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \hat{x}(\omega, n), \quad (4.24)$$

$$\hat{x}(\omega, n) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{x}(\omega, k) e^{ikn} \frac{dk}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\omega, k)}{\Delta(\omega, k)} e^{ikn} \frac{dk}{2\pi} \quad (4.25)$$

を定義すると、 $\hat{x}(\omega, n)$ の、 ω の複素平面での極が (4.24) 式の積分に寄与する。極の中で虚部が最大のものを ω_c とすると、 ω_c と ω_c^* を与える波数 k_c (分散関係より求まる) が $t \rightarrow \infty$ での振舞いを決定する。

次に、 ω_c を $\tilde{x}(\omega, k)$ から評価することを考える。(4.24) 式の積分路は、複素平面で $\hat{x}(\omega, n)$ の全ての極より上にある (図 4.4(a))。 ω が図 4.4(a) の積分路をとったとき、 $\tilde{x}(\omega, k)$ の複素 k 空間での極は図 4.4(b) のようになっているとしよう。このとき k 空間での積分路は実軸上である。次に、(4.24) 式の積分路を下げていく。すると、分散関係に従って、 $\tilde{x}(\omega, k)$ の k の極が移動していく (図 4.4(b))。 (4.24) 式の積分は、積分路を下げていっても解析接続されているので、 $\tilde{x}(\omega, k)$ の極が k の実軸を越えるときは、積分路のほうを曲げて極が積分路を越えないようにしなければならない² (図 4.4(c))。ところが、 $\tilde{x}(\omega, k)$ の二つの極が積分路を挟み込むと

²線形不安定な場合、分散関係を $\omega = \omega(k)$ とすると、 $\text{Im}(\omega(k)) > 0$ を満たす実数の k が存在するので、 $\text{Im}(\omega) > 0$ のうちに必ず $\tilde{x}(\omega, k)$ の極が k の実軸を越える。

きは、どのように積分路を変化させても極を避けることができない(図 4.4(c))。これが $\hat{x}(\omega, n)$ の極に対応している。つまり、 $\hat{x}(\omega, n)$ の極を与える k は、 ω 平面で積分路を下げていったときに k 平面の積分路をはさむ $\tilde{x}(\omega, k)$ の極 ($\Delta(\omega, k) = 0$ の根) で決まる。 $\Delta(\omega, k) = 0$ の二つの根が積分路をはさんで一致したときの解が $k = k_c$ 、 $\omega = \omega_c$ である。 $\omega_c = \omega(k_c)$ は k の重解であるから

$$\left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{\omega=\omega_c} = 0 \quad (4.26)$$

が成り立つ。この ω_c の虚部が正のとき、系の不安定性は絶対的となる。

$t \rightarrow \infty$ での系の漸近的な振舞いを調べるには、 (ω_c, k_c) の近傍で (4.24) 式、(4.25) 式の積分を評価すればよい。(4.26) 式より、

$$\Delta(\omega, k) \propto (k - k_c)^2 + A(\omega - \omega_c) \quad (4.27)$$

であるから (A は定数) (4.25) 式の積分は、 (ω_c, k_c) の近傍では

$$\hat{x}(\omega, n) \propto \frac{e^{ik_cn}}{\sqrt{\omega - \omega_c}} \quad (4.28)$$

と評価できる。従って、(4.24) 式の積分は

$$\Delta x_n(t) \propto \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-i(\omega_c t - k_c n)} \quad (4.29)$$

と評価され、系の漸近的な振舞いが与えられる。

この節の冒頭で述べたように、移流不安定性は観測する座標系の速度に依存する。速度 V で動く座標系で考える場合は、上の計算を $\omega \rightarrow \omega + kV$ として行なえばよい³。なお、このとき、 $t \rightarrow \infty$ での漸近的な振舞いを与える (4.29) 式の n は、 $n' \equiv n - Vt$ に置き換わる。

さて、ここで具体的な表式を考える。分散関係は

$$\Delta(\omega, k) = (i\omega)^2 - a(i\omega) - aU'(\bar{b})(e^{ik} - 1) = 0 \quad (4.30)$$

より与えられ、 $\omega = \omega(k)$ には 2 つの解があるが、不安定化するモードは

$$\omega_+(k) = -i\frac{a}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{a^2 + 4aU'(\bar{b})(e^{ik} - 1)} \quad (4.31)$$

である。速度 V で動く座標系から見たときは、

$$\omega_+(k) = -Vk - i\frac{a}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{a^2 + 4aU'(\bar{b})(e^{ik} - 1)} \quad (4.32)$$

となる。

$$\frac{d\omega_+(k)}{dk} = 0 \quad (4.33)$$

³ $\Delta(\omega + kV, k) = 0$ を考えると、分散関係 $\omega = \omega(k)$ の代わりに $\omega = \omega(k) - kV$ が得られる。

の解を $k = k_c$ とすると、 ω_c は

$$\omega_c = \omega_+(k_c) \quad (4.34)$$

で与えられる。ただし、(4.33) 式の解が複数存在するときは、(4.32) 式にそれぞれの解を代入して得られる ω のうち、虚部が最大のものが ω_c であり、その ω_c を与える波数が k_c である。(4.33) 式を具体的に書くと、

$$-V - \frac{aU'(\bar{b})e^{ik}}{\sqrt{a^2 + 4aU'(\bar{b})(e^{ik} - 1)}} = 0 \quad (4.35)$$

となる。 $z \equiv e^{ik}$ として変形すると、 z についての二次方程式

$$(aU'(\bar{b}))^2 z^2 - 4aU'(\bar{b})V^2 z - aV^2(a - 4U'(\bar{b})) = 0 \quad (4.36)$$

が得られ、解として

$$z_{\pm} = \frac{2V^2}{aU'(\bar{b})} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{a}{4V^2}(a - 4U'(\bar{b}))} \right], \quad (4.37)$$

$$k_{c\pm} = -i \log z_{\pm} = -i \text{Log} z_{\pm} + 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \dots) \quad (4.38)$$

が得られる。ここで、Log は対数の主値を表す。つまり k_c は、対数をとるために 2π の不定性を持つことになる。しかし、積分路が $-\pi$ から π までの有限区間であるので (図 4.4(b)、(c)) m の異なる k_c のうちいずれかが一つが積分路を挟むことになり、その k_c について今まで述べてきた議論が成り立つ。

前述したように、 ω_c は $\omega_+(k_{c+})$ と $\omega_+(k_{c-})$ のうち虚部が大きい方であり⁴、系が移流不安定である条件は

$$\text{Im}(\omega_c) < 0 \quad (4.39)$$

となる。

ここまでは、空間を表す変数を車番 n として解析を行なってきた。この、車番 n を空間の変数とする座標系を、今後「車番座標系」とよぶ。今までの解析はこの車番座標系を基準にしてきたので、「速度 V で動く座標系」といったときの速度は、車番座標系に対する速度である。本節の冒頭で述べたように、4.2 節では、境界に対して静止した座標系から系を見たときを問題としていた。そこで、図 4.2 の横軸 x 、すなわち車の位置を空間の変数とする座標系を、今後「位置座標系」とよぶことにすると、車番座標系に対する位置座標系の速度 V を知る必要がある。一樣解の近傍では、車番座標系ではかった速度 v と位置座標系ではかった速度 v' の間に $v' = \bar{b}v + U(\bar{b})$ の関係がある⁵ので、車番座標系から見た位置座標系の速度は

⁴(4.32) 式の形から、 $\omega_+(k_{c\pm})$ の虚部には k の 2π の不定性は現れない。また、実部には $-Vk$ の項から 2π の不定性が現れるが、 $\omega_+(k_{c\pm})$ が物理的に意味を持つのは $\exp[-i\{\omega_+(k_{c\pm})t - k_{c\pm}n'\}] \equiv \exp[-i\{\omega_+(k_{c\pm})t - k_{c\pm}(n - Vt)\}]$ の形で現れるときのみなので、 kV の項が打ち消し合い、結局この不定性は系の振舞いに影響しない。

⁵ここで、 v の係数に \bar{b} がかかっているのは、車番座標系での単位長さ (1 台) は、位置座標系でみれば車間距離となり、一樣解の近傍では \bar{b} となるためである。

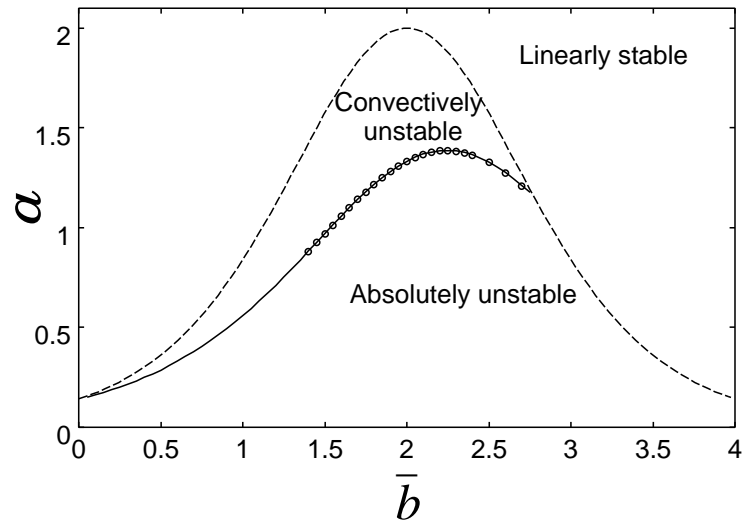


図 4.5: 線形解析によって求めた、位置座標系において一様解が移流不安定なパラメータ領域。実線は $\text{Im}(\omega_c) = 0$ から得られた絶対不安定と移流不安定の境界 $a = a_c(\bar{b})$ である。白丸は数値実験の結果から見積もった境界であるが、実線とよく一致している。破線は線形中立安定線 $a = 2U'(\bar{b})$ を表す。

$V = -U(\bar{b})/\bar{b}$ となる。この V を ω_c の計算に用いて、(4.39) 式で判定すれば、位置座標系から見たときの一様解の不安定性が移流的かどうか分かる。そのようにして得られた移流不安定なパラメータ領域を図 4.3 に示す。数値実験結果とよく一致していることがわかる。

なお、車番座標系から見れば、一様解の不安定性は常に移流的であることを注意しておく。これは、各車の運動が直前の車の運動の影響しか受けない((3.1) 式) ことから、ほとんど自明である。

4.4 振動解

系を充分大きくとり、出入口にはまだ摂動の影響が及んでいない時刻での、系の振舞いを考える。車の密度の時空間図(図 4.2) や、車間距離のスナップショット(図 4.6(a)) をみると、ある程度時間が経った後には、車間距離の空間分布に、下流側から順に次のような構造ができていることがわかった。(i) 摂動の影響が及んでいない一様解領域。(ii) 一様解からのずれが振動しながら成長している領域。(iii) ほぼ一定の振動が続く振動領域。(iv) 振動が崩れる領域。(v) 振幅の大きい、渋滞と自由走行が交互に繰り返される領域。(iii) の領域は、4.2 節でも言及したように、車間距離 b_n (速度 v_n) が一様解の車間距離 \bar{b} (速度 $U(\bar{b})$) のまわりで周期的に振動している。これを「振動解」とよび、本節でその性質を調べる。

4.4.1 振動解の性質

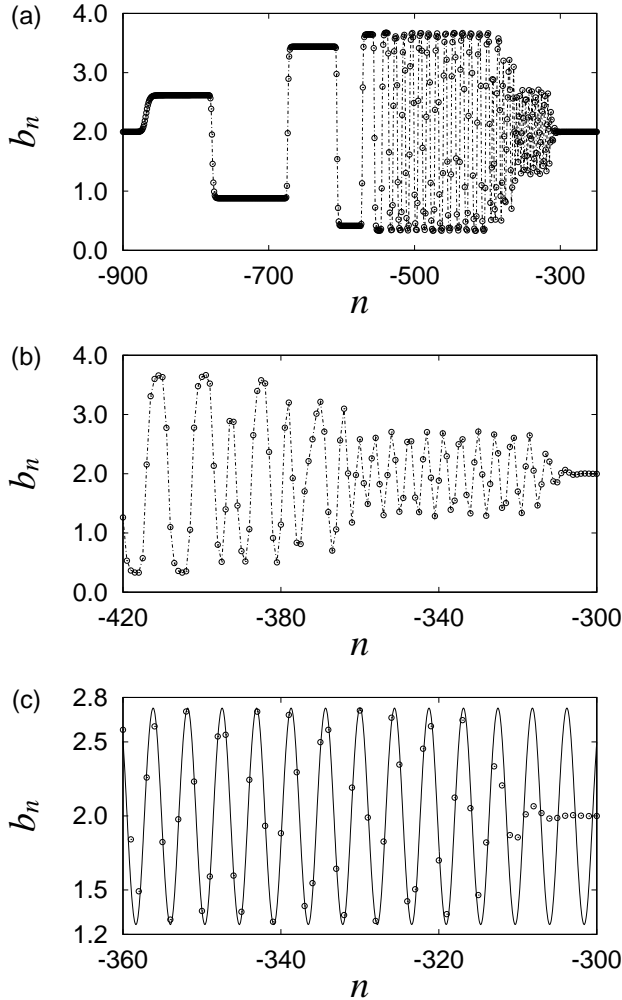


図 4.6: 車番 n 対車間距離 b_n の、時刻 $t = 988$ でのスナップショット (破線で結ばれた白丸)。 $a = 1$ 、 $\bar{b} = 2$ 、 $\epsilon = 0.1$ 、 $L = 10000$ である。(a) 振動解領域が $-360 < n < -300$ であり、その後方の $-550 < n < -400$ あたりに渋滞-自由走行領域がある。(b) (a) の振動解領域付近の拡大図。(c) 白丸が (a)、(b) と同様のスナップショットで、実線が (4.41) 式を $a = 1$ 、 $\hat{b} = 2$ 、 $c = c_s = 0.610$ で解いて得られた振動解。よく一致していることがわかる。

振動解は一定の位相速度で後方に伝播するので、車番空間を振動が後方に伝わる位相速度 c を用いて、車間距離が

$$b_n(t) = \hat{b} + f(n + ct) \quad (4.40)$$

と表されるものと仮定する。すると $z \equiv n + ct$ として、微分方程式

$$c^2 f''(z) = a[U(\hat{b} + f(z + 1)) - U(\hat{b} + f(z)) - cf'(z)] \quad (4.41)$$

が得られる。この式は、 c が与えられれば、任意の初期条件について z の負の方向に数値的に解くことが可能である。そこで、 $z > 0$ で $f(z) = 0$ 、 $f'(z) = 10^{-10}$ を初期条件として数値的に解くと、 c の値がある有限の幅にあるときに振動解が得られた⁶。この振動解が得られる位相速度の範囲は、例えば $a = 1$ 、 $\hat{b} = 2$ の場合、

⁶この方法で得られた振動解は a 、 \hat{b} 、 c を与えれば一意に決まる。但し、一般に \hat{b} は振動解領域

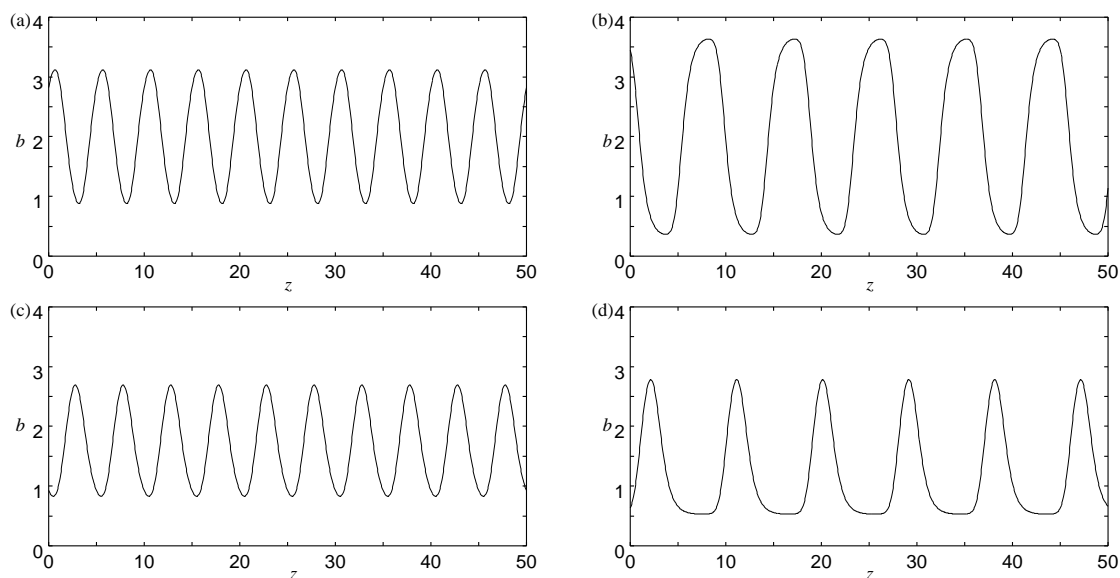


図 4.7: 振動解の様々な波形。すべて $a = 1$ であり、(a) と (b) が $\hat{b} = 2$ 、(c) と (d) が $\hat{b} = 1.9$ である。なお、以下の λ は車番座標系での波長である。(a) $\lambda = 5.0$ 、 $c = 0.584$ 。(b) $\lambda = 9.0$ 、 $c = 0.557$ 。(c) $\lambda = 5.0$ 、 $c = 0.593$ 。(d) $\lambda = 9.0$ 、 $c = 0.582$ 。

$c \in (0.556, 0.637)$ であった。また、(4.41) 式に計算機実験で求めた位相速度 $c = c_s$ を代入して解くと周期的な解が得られ、波長と振幅も実際の振動解に良く合った (図 4.6(c) の実線)⁷。

(4.41) 式で振動解が存在する c の範囲内で c を変化させると、得られる解の波長、振幅、波形も連続的に変化する。 c が大きいと、振幅は小さく、波長は短くなり、波形は正弦波に近くなる。逆に c が小さいと、振幅は大きく、波長は長くなる。このときの波形は、 $\hat{b} = 2$ ($U''(\hat{b}) = 0$) のときはキック-反キック解が周期的につながった波形に近くなり、 $\hat{b} \neq 2$ ($U''(\hat{b}) \neq 0$) のときは平坦な部分に周期的に尖った部分が現れるようになる (図 4.7)。また、 $\hat{b} = 2 + \delta$ の波形は、 a と c を同じ値にして $\hat{b} = 2 - \delta$ で計算した波形を上下反転したものになる。

の平均車間距離ではない (つまり $f(z)$ の平均は 0 ではない。)。これは最適速度 $U(b)$ 関数の形によるものであり、 $\hat{b} > 2$ ($\hat{b} < 2$) だと平均車間距離は \hat{b} より大きく (小さく) なる。 $\hat{b} = 2$ のときは、 $U(b)$ が $b = 2$ で対称になっている ($U(2 + \delta) - U(2) = U(2) - U(2 - \delta)$) ため、 \hat{b} と平均車間距離は一致する。

⁷ $a = A$ 、 $\bar{b} = \bar{B}$ として数値実験を行なって得られた振動解の位相速度を c_s とすると、その振動解と、 $a = A$ 、 $\hat{b} = \bar{B}$ 、 $c = c_s$ として (4.41) 式から得られる振動解が一致するのは、 $\bar{B} = 2$ のときだけである。これは、先に脚注で述べたように、 $U(b)$ が $b = 2$ で対称な形をしているためである。 $\bar{B} < 2$ の場合に、数値実験と一致する振動解が (4.41) 式で $a = A$ 、 $\hat{b} = B$ 、 $c = c_s$ として得られたときは、 B と \bar{B} の間には常に $\bar{B} < B < 2$ の関係がある。ただし、 B の値は実際に数値実験の振動解と合わせてみなければ求められない。 $\bar{B} > 2$ の場合は、不等号が逆になる。

4.4.2 振動解の安定性

周期解の線形安定性は、フロッケ指数 (付録 B) から知ることができる。車間距離の振動解 ((4.40) 式、(4.41) 式) からのずれ \tilde{b}_n が小さいとして (3.1) 式を線形化すると、

$$\dot{\tilde{b}}_n = \tilde{v}_n \quad (4.42)$$

$$\dot{\tilde{v}}_n = a[U'(\hat{b} + f(n+1+ct))\tilde{b}_{n+1} - U'(\hat{b} + f(n+ct))\tilde{b}_n - \tilde{v}_n] \quad (4.43)$$

が得られる。車番座標系に対して静止した、車 N 台で構成される系を考えると、

$$z_j = \tilde{b}_j, \quad z_{j+N} = \tilde{v}_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (4.44)$$

で表される成分を持つ $2N$ 次元のベクトル $\mathbf{z}(t)$ を定義し、境界条件を決定すれば、(B.4) 式の形の周期係数の線形微分方程式系が得られ、フロッケ指数を求めることができる。フロッケ指数の実部が正のとき、解は線形不安定である。

そこで、先頭の車 (車番 N) の車間距離が従う方程式を

$$\dot{\tilde{v}}_N = a[U'(\hat{b} + f(1+ct))\tilde{b}_1 - U'(\hat{b} + f(n+ct))\tilde{b}_N - \tilde{v}_N] \quad (4.45)$$

とした場合 (周期境界条件) と、

$$\dot{\tilde{v}}_N = a[-U'(\hat{b} + f(N+ct))\tilde{b}_N - \tilde{v}_N] \quad (4.46)$$

とした場合 (固定端境界条件、系の「先頭の前」の車間距離 ($N+2$ 台目と $N+1$ 台目の車間距離) は完全に振動解に従う) の二つの境界条件についてフロッケ指数を求めた。ただし、周期境界条件は、車番座標系ではかった波長 λ が $M\lambda = N$ (M は整数) を満たす振動解にしか適用することはできない。

その結果、周期境界条件では振動解は不安定であるが、固定端境界条件では安定であるということがわかった (図 4.8)。これは、振動解が車番座標系において移流不安定であることを示している [49]。つまり、先頭が振動解であればその後ろに振動解が続くが、微小なずれがある場合、後ろに伝わるにつれて増幅され、十分後方では振動解が崩れることになる。

また、 $\hat{b} = 2$ ($U''(\hat{b}) = 0$) の振動解は、 c が小さく、キルク-反キルク解に近い形の解ほど不安定性が弱くなる傾向がある。これは、小松らの、弱非線形解析で得られた MKdV 方程式の解への摂動項の影響についての解析 [37, 38] (3.4 節) を支持する結果と思われる。 $\hat{b} \neq 2$ の振動解に関しては、今のところはっきりとした傾向は見出せない (表 4.1)。

4.4.3 数値実験で現れる振動解の周期

前節までの結果で、様々な周期の移流不安定な振動解が存在することがわかった。本節では、一様解に局所的な摂動を与えたときに自発的に現れる振動解の周期がどのように決定されているかについて考察する。

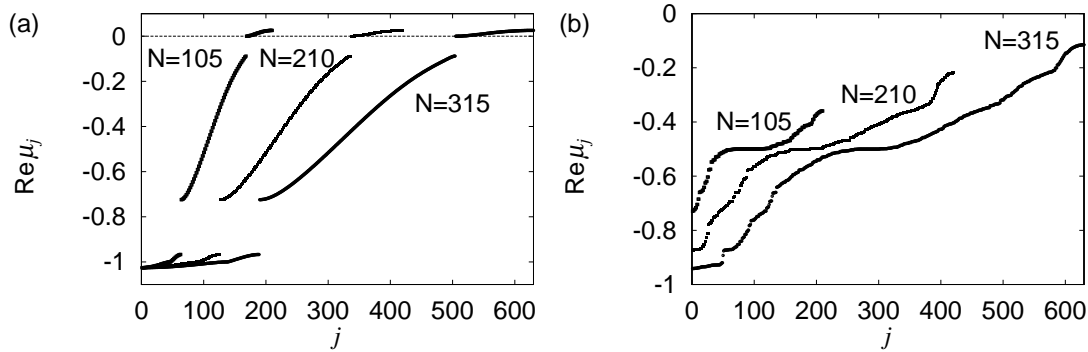


図 4.8: $a = 1$ 、 $\hat{b} = 2$ 、 $\lambda = 5.0$ の振動解のフロッケ指数の実部 $\text{Re}(\mu_j)$ (縦軸)、 N は系全体の車の台数である。横軸 j は指数の番号で、 $\text{Re}(\mu_j)$ が小さい順につけてある。(a) 周期境界条件 (4.45) を課したもの。正の $\text{Re}(\mu_j)$ が存在し、線形不安定である。(b) 固定端境界条件 (4.46) を課したもの。全ての $\text{Re}(\mu_j)$ が負であり、線形安定である。

\hat{b}	λ	$\text{Re}(\mu)_{\max}$	\hat{b}	λ	$\text{Re}(\mu)_{\max}$	\hat{b}	λ	$\text{Re}(\mu)_{\max}$
2.00	4.2	0.0560	1.95	4.2	0.0564	1.90	4.2	0.0576
2.00	4.5	0.0403	1.95	4.5	0.0411	1.90	4.5	0.0427
2.00	5.0	0.0257	1.95	5.0	0.0283	1.90	5.0	0.0315
2.00	7.0	0.0048	1.95	7.0	0.0295	1.90	7.0	0.0402
2.00	9.0	0.0009	1.95	9.0	0.0284	1.90	9.0	0.0388

表 4.1: $a = 1$ 、 $N = 315$ での、周期境界条件におけるフロッケ指数の実部の最大値 $\text{Re}(\mu)_{\max}$ 。 $\hat{b} = 2$ の振動解は、波長が長い解ほど $\text{Re}(\mu)_{\max}$ が小さい。

図 4.6 の一様解領域と振動解領域の境界 ($n \approx -300$) をみると、そこで微小な振動がおこっており、この振動が後方に伝わるに従って増幅されて振動解となっている。この境界の速度 V_0 で動く座標系からみると、この微小振動は拡大も減衰もしない。4.3 節の議論からすれば、 $V = V_0$ で動く座標系からみると、 $\text{Im}(\omega_c) = 0$ であることになる。また逆に、条件 $\text{Im}(\omega_c) = 0$ から V_0 を求めることができる。さらにこのとき、 V_0 で動く系から見た微小振動の振動数と波数はそれぞれ $\text{Re}(\omega_c)$ 、 $\text{Re}(k_c)$ で与えられる [52]。従って、一様解と振動解の境界に現れる微小振動の、車番座標系から見た位相速度 c_0 は、

$$c_0 = -\frac{\text{Re}(\omega_c)}{\text{Re}(k_c)} - V_0 \quad (4.47)$$

で与えられる。ただしここで、(4.40) 式の振動解の位相速度 c と符合を一致させるため、振動が後方に伝わる速度を正とした。さらに、(3.1) 式の形から各車の運動は前の車の運動に追従する傾向があるので、振動解の時間周期は、直前の微小振

動の時間周期と一致すると考えるのが自然である。このとき、車番座標系での振動解の波長 λ は

$$\lambda = (c + V_0) \frac{2\pi}{|\operatorname{Re}(\omega_c)|} \quad (4.48)$$

で与えられる。

(4.47) 式、(4.48) 式から得られる値 c_0 、 λ が数値実験の結果 c_{0s} 、 λ_s と一致することを確かめたのが表 4.2 である。また、一様解に対し、車番座標系に固定した微小振動を加えたとき、上流側にその時間周期を持つ振動解が励起されることを、数値実験によって確かめることができた (付録 C)。これらのことから、数値実験において自発的に現れる振動解の周期は、不安定化するモードのうち、最も下流に残るものの時間周期によって決定されていると結論する。

a	\bar{b}	λ	λ_s	c_0	c_{0s}
1.0	2.0	4.35	4.36	0.670	0.669
1.333	2.0	5.44	5.46	0.784	0.791
1.5	2.0	6.31	6.35	0.839	0.842
$2U'(\bar{b}) - 0.5$	1.8	6.23	6.28	0.799	0.804
$2U'(\bar{b}) - 1.0$	2.2	4.30	4.30	0.629	0.633
$2U'(\bar{b}) - 0.5$	2.2	6.23	6.28	0.799	0.806

表 4.2: λ と c_0 の数値実験との比較。添字のないものは (4.47) 式、(4.48) 式より求めた値であり (ただし (4.48) 式の振動解の位相速度 c は数値実験から求めた値を用いた) 添字 s がついたものは数値実験で求めた値である。

4.5 OV モデルの解の空間構造

今までの解析で、一様解領域の後方に振動解領域が形成されることが明らかになった。4.4 節で述べたように、振動解領域の後ろには、振動解よりずっと速度や車間距離の変化の幅が大きい、渋滞と自由走行が交互に続く領域が存在する (図 4.2(b)、図 4.6(a))。この領域は、振動解が車番座標系で移流不安定であるため、振動解からの微小なずれが後ろの車に伝わるにつれて増幅されるために形成される。また、この領域では数値誤差のような非常に小さい雑音も増幅されて伝わってくるため、その振舞いは誤差に非常に敏感である [51, 52]⁸。従って、数値実験で見られる渋滞-自由走行領域は、振動解のような完全な周期性は持っていない。

⁸移流不安定な系でのずれの拡大率を定量的に評価するには、速度 v で動く慣性系からみたリアプノフ指数である流れつきリアプノフ指数 (co-moving Lyapunov exponent) [53, 55] や、単位距離あたりのずれの拡大率をみる空間リアプノフ指数 (spatial Lyapunov exponent) [56, 57] を求める必要がある。

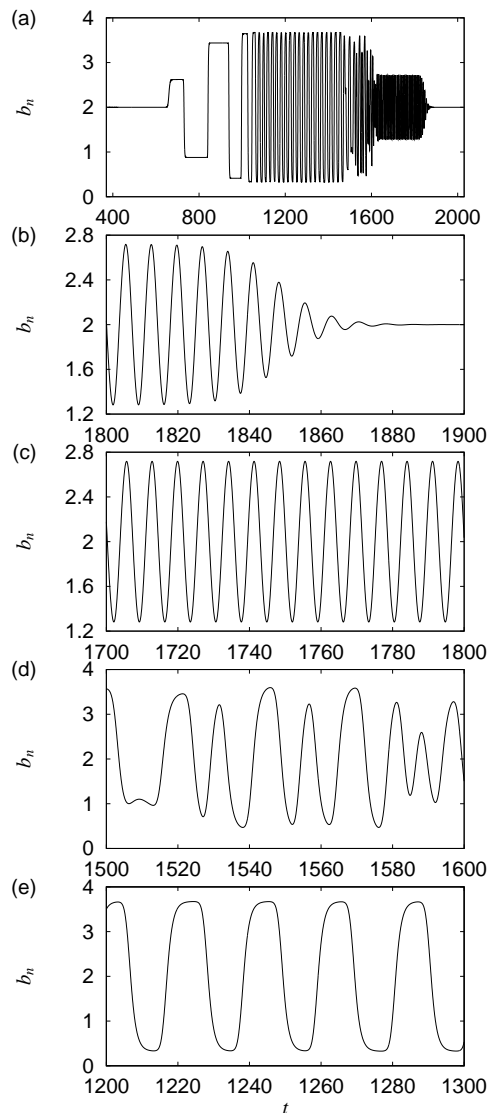


図 4.9: $a = 1$ 、 $\bar{b} = 2$ 、 $\epsilon = 0.1$ 、 $L = 800$ の数値実験において、車番 $n = -578$ の車の車間距離 b_n の時系列をプロットしたもの。(a) 系の端にまだ一様解の領域が残っているため、系に入ってきた時 ($t \approx 400$) からしばらくの間は $b_n = \bar{b}$ であるが、 $t \approx 700$ 程度で摂動の影響が及んでいる領域に達する。 $1000 < t < 1400$ が渋滞-自由走行領域であり、 $1400 < t < 1600$ が渋滞-自由走行と振動解の間の遷移領域、 $1600 < t < 1800$ が振動解領域で、最も下流側にも一様解が残っている。(b) から (e) は (a) の拡大図であり、下流から順に並べてある。(b) 一様解に振動が起こり、その時間振動の振動解が誘起される。(c) 振動解領域。上流に伝わるに伝わって崩れていく。(d) 振幅が増幅されて、振動解が崩れた領域。(e) 渋滞-自由走行領域。完全に周期的ではないことがわかる。

図 4.9 は、 $a = 1$ 、 $\bar{b} = 2$ 、 $\epsilon = 0.1$ での数値実験において、ある一台の車の車間距離の時系列をプロットしたものである。車は上流から順に各領域を通り抜けていくので、上流から空間構造を見ていくのとほぼ同じことになるが、離散的なスナップショットよりも系の振舞いが周期的かどうかの方がわかりやすい。図 4.9(e) を見ると、渋滞-自由走行領域では完全に周期的ではないことがわかる。

ここで述べた解の空間構造は、充分大きな系の一様解に局所的な摂動を与えた場合にはしばらくの間見られるものである。ただし一様解が移流不安定な場合は、構造全体が上流側に移動していき、最終的には系から出て行くため、系は再び移流不安定な一様解に覆われる。また、絶対不安定な場合は構造が全体に広がっていくため、構造が系の境界に達すると、そこから構造が失われていく。つまり、有

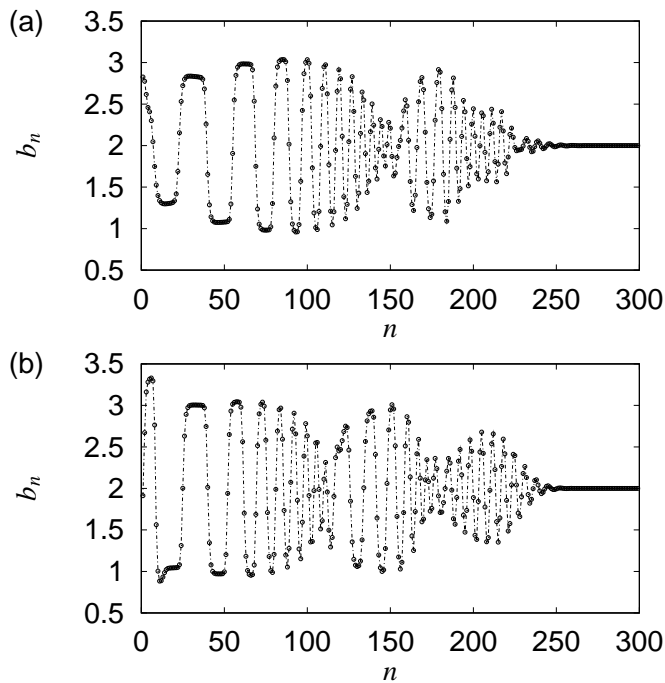


図 4.10: $a = 1.4$, $\bar{b} = 2$, $L = 600$ で, 車が $x_0 = 580$ を越える度に, その車の速度に幅 $[-0.0005 : 0.0005]$ の一様乱数による雑音を加えたものの, 車間距離のスナップショット。横軸は車番であるが, その時刻に系内にある車のうち最も車番が小さいものを 1 番として番号をつけている。(a) は $t = 726$, (b) は $t = 830$ である。図 4.9 ほど振動解領域と渋滞-自由走行領域の区別ははっきりしないが, 空間に固定した構造ができていることがわかる。

限系で長時間の数値実験を行なうと, どちらにしろ最終的にはこの構造は失われることになる。

ただ, 位置座標系で移流不安定なパラメータを用いて, $x = x_0$ を通過する車の速度を ϵ だけずらすといった位置座標系に固定した摂動を加えた場合は, 同様の空間構造が x_0 の上流側に形成され, 系から出ていくことはない(図 4.10)。このように, 空間に固定した雑音を与え続けることによって空間構造が維持されることは, 移流不安定な系の特徴の一つであり, このような構造は雑音維持構造 (noise-sustained structure) とよばれる [49, 52, 57, 58]。

4.6 空間構造が非線形効果により変化する場合

\bar{b} が大きいところで数値実験を行なうと, 後方に出来上がった車間距離の広い部分 (自由走行領域) が振動解を飲み込み, 更には一様解の領域を侵食してしまい, 前の節で述べた構造ができない場合がある (図 4.2(c))。この節では, この現象がどのような場合に起こり得るかを議論する。

位置座標系ではかった自由走行領域と振動解領域の境界の速度を V_i , 振動解領域と線形不安定な一様解領域の境界の速度を V'_0 とする。自由走行領域が振動解領域を飲み込んでしまい, 4.5 節で述べた空間構造が変化する条件は, $V_i > V'_0$ と表される。

また特に、 $V_l > 0 > V'_0$ の場合は、次のような理由により振動解領域が失われる以上の意味を持つ。 $V'_0 < 0$ は振動解領域が後退していくことを意味し、一様解の線形不安定性が移流的であることに対応している。つまり、線形解析では長時間経過すれば元の一様解に戻ることが予想される。ところが、この場合に $V_l > 0$ 、つまり自由走行領域が前進すれば、実際には一様解領域が侵食されていき、最終的には系全体が自由走行領域に覆われてしまう⁹。結局、線形解析によって予想される長時間経過後の系の状態と、実際の状態が異なるのである。

V'_0 は 4.4.3 節で定義した V_0 を用いて、 $V'_0 = \bar{b}V_0 + U(\bar{b})$ より計算できる。そこで、以下に V_l の値を見積もり、空間構造が変化する $V_l > V'_0$ のパラメータ領域と、線形解析の予想と実際の振舞いが異なる $V_l > 0 > V'_0$ のパラメータ領域を決定する。

V_l の値は、以下のように見積もることができる。渋滞-自由走行領域ができたとき、自由走行部分の車間距離（速度）はほぼ一定値 b_l ($U(b_l)$) をとる。その前にある振動解部分は、初期条件の車間距離 \bar{b} （速度 $U(\bar{b})$ ）の一様解の領域に滑らかにつながるので、平均車間距離（速度）はほぼ \bar{b} ($U(\bar{b})$) であるとみなせるであろう。自由走行部分から出ていく車の台数は振動解部分に入っていく車の台数に等しいので、

$$\frac{b_l}{U(b_l) - V_l} = \frac{\bar{b}}{U(\bar{b}) - V_l} \quad (4.49)$$

が成り立つ。(4.49) 式を変形すれば

$$V_l = -\frac{\bar{b}U(b_l) - b_lU(\bar{b})}{b_l - \bar{b}} \quad (4.50)$$

となる。 b_l の値は数値的に求めるしかないが、3.3 節で述べたように、周期境界条件では、自由走行領域の車間距離 b_f は初期条件で与えた車間距離 \bar{b} には依らず、緩和率 a の値で決まっている（図 3.5）[1, 2, 37, 38]。数値実験で得られる b_l の値は周期境界条件で収束する値 b_f に近いので、 $b_l = b_f$ として (4.50) 式を用いれば、 a 、 \bar{b} の関数として V_l を評価することができる。

なお、条件 $V_l > 0$ は、(4.50) 式より

$$\frac{U(\bar{b})}{\bar{b}} > \frac{U(b_f)}{b_f} \quad (4.51)$$

と書き換えることができる。図 3.5 と図 4.11 を見ると、(4.51) 式が成り立ち、線形解析による予想と実際の振舞いが異なる可能性があるのは \bar{b} が比較的大きい場合であることがわかる。

解の空間構造が変化する $V_l > V'_0$ のパラメータ領域と、(4.51) 式により与えられる $V_l > 0$ のパラメータ領域を求めたものが図 4.12 である。白丸が $V_l = V'_0$ の、黒い四角が $V_l = 0$ のパラメータであり、破線が線形中立安定線、実線は移流不安定

⁹この状況は、非線形な効果で維持される構造が一様な構造を侵食するかどうかという問題で議論された「非線形絶対不安定性 (Nonlinear absolute instability)」[59–61] と関係すると思われる。

と絶対不安定の境界 ($V'_0 = 0$) である。図中の (a)、(b)、(c) の領域は、 $V_l > V'_0$ であり、4.5 節で述べた空間構造が変化を受け、振動解領域は失われて線形不安定な一様解の直後に自由走行領域が形成される。ただし (a) では変化を受けた構造自体が上流から出ていき、線形不安定な一様解に戻るのに対し、(b)、(c) では線形不安定な一様解が完全に失われる。特に (b) は、線形には移流不安定であるのに一様解が失われる領域である。(d)、(e) は 4.5 節で述べた空間構造が維持される領域である。(d) では一様解が移流不安定であり、構造全体が上流に移動していくため最終的には一様解に戻るが、(e) では絶対不安定であり、構造が系全体に広がって一様解領域が失われる。なお、(d) は、雑音を加え続けると 4.5 節で述べたような雑音維持構造が形成される領域でもある。

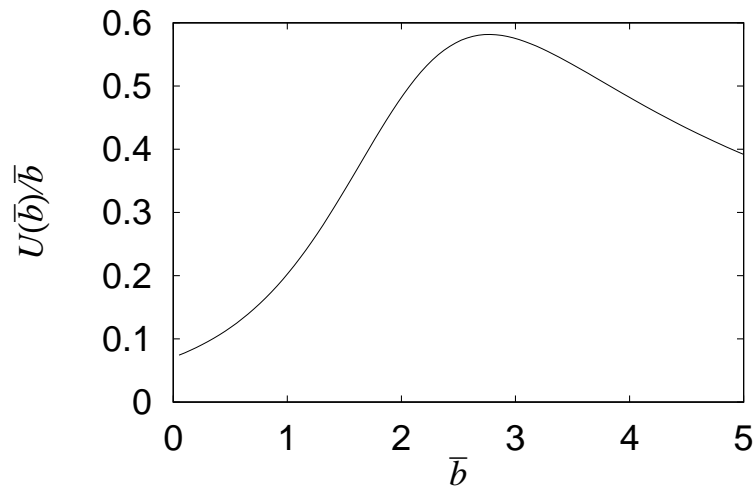


図 4.11: \bar{b} 対 $U(\bar{b})/\bar{b}$ のプロット。図 3.5 と合わせて見ると、(4.51) 式を満たす可能性があるのは \bar{b} が比較的大きい場合であることがわかる。

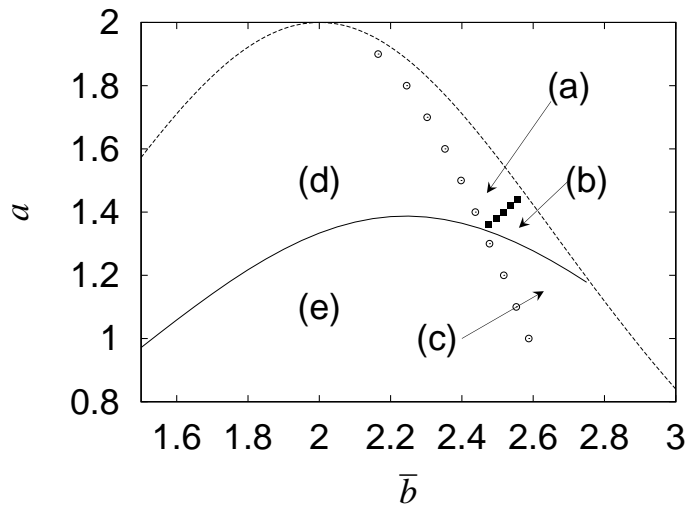


図 4.12: 解の空間構造により分類した状態図。縦軸 a 、横軸 \bar{b} 、破線が線形中立安定線、実線が移流不安定と絶対不安定の境界 ($V_0' = 0$) であり、白丸、黒い四角がそれぞれ $V_l = V_0'$ 、 $V_l = 0$ のパラメータを表す。それぞれの領域での振舞いは以下の通りである。(a) : $0 > V_l > V_0'$ の領域。振動解領域は自由走行領域に侵食されるため、空間構造が変化する。しかし、構造全体が上流に移動していくため、最終的には線形不安定な一様解に戻る。(b) : $V_l > 0 > V_0'$ の領域。やはり振動解領域は自由走行領域に侵食され、空間構造が変化する。一様解の線形不安定性は移流的であるが、自由走行領域は前進するため、一様解領域は失われ、系全体が自由走行領域に覆われてしまう。(c) : $V_l > V_0' > 0$ の領域。振動解領域は自由走行領域に侵食され、空間構造が変化する。最終的には (b) と同じように一様解が失われる。(d) : $0 > V_0' > V_l$ の領域。4.5 節で議論した空間構造が維持される。ただし一様解の不安定性は移流的であるので、充分長い時間が経つと系は再び線形不安定な一様解に覆われる。(e) : $V_0' > 0$ 、 $V_0' > V_l$ の領域。やはり空間構造は維持される。一様解の不安定性は絶対的であり、長時間経つと線形不安定な一様解領域は失われる。

第5章 まとめと議論

5.1 本論文のまとめ

本論文では、交通流及び粉体パイプ流の密度波形成について研究を行なった。

第2章で述べたように、これらの現象の解析を目的として提案されたモデルは数多くあるが、本論文では交通流のモデルとして提案されたOVモデルを取り扱った。これは、OVモデルが簡単な構造をしているため理解しやすく、また多少の変更により粉体パイプ流のモデルとして用いることができると考えられたからであった。

OVモデルについては周期境界条件下での解析が詳しくなされており、その数理構造がある程度わかっている(第3章)が、現実の系は上流と下流が区別されており、周期境界条件は必ずしも適切な境界条件とはいえない。そこで第4章では、上流と下流が区別される境界条件の下でのOVモデルの振舞いを解析した。まず4.1節で、局所的な摂動に対する線形応答を計算し、線形不安定な一様解に摂動を与えると、後ろの車に伝わるに従って応答が拡大することを確認した。次に4.2節で、上流と下流が区別される境界条件の下で一様解に局所的な摂動を加えるという数値実験を行ない、線形不安定領域内で、パラメータによって異なる振舞いがみられることを示した。4.3節では、一様解の線形不安定性が移流不安定と絶対不安定に分けられることを示し、この二つを分けるパラメータの境界を、線形解析を用いて求めた。さらに、車間距離や速度が周期的に振動する領域があることを見出し、4.4節で詳しく解析した。その結果、モデル方程式が様々な周期の振動解を持つことがわかった(4.4.1節)。この振動解が車番座標系で移流不安定であることを示し(4.4.2節)、一様解に局所的な摂動を加えたときに現れる振動解の時間周期が、最も下流に残るモードの時間周期によって選択されていることを確認した(4.4.3節)。4.5節では、振動解の移流不安定性のために後方に渋滞-自由走行領域が形成され、結果的に、下流側から順に、一様解 → 振動解 → 渋滞-自由走行という空間構造が形成されることを示した。この構造は、系が充分大きければ必ずみられるものであり、また移流不安定なパラメータを用いて位置座標系に固定した摂動を加えた場合は、同様の構造が、空間に固定された構造として現れる。最後に4.6節で、4.5節で述べた構造が、密度の低い自由走行領域が振動解領域や一様解領域を侵食することによって変化する場合について考察し、そのような変化が起きるパラメータ領域を決定した。

5.2 議論

本研究では、一様解や振動解の車番座標系における不安定性が移流的であることによって、空間構造が形成されることが明らかになった。4.3節で言及したように、追従型の交通流モデルが移流不安定性を持つことは、モデル方程式が「一方向結合系」[57]（直前の車の振舞いしか自分自身の振舞いに影響しない）であることからほとんど自明であり（車番座標系での不安定性は移流的でしかあり得ない）すでにダイスラー（R. J. Deissler）によって指摘されていた[49]。他の追従モデルでも周期解が存在することが知られている[28, 29, 62]ことを考えると、追従モデルではOVモデルと同様の空間構造がみられることが期待される。また、流体力学的モデルでも移流不安定な一様解が存在し、オンランプを導入すると、その上流側に移流不安定な一様解が現れる場合があることが指摘されている[63, 64]。さらに、これらのモデルには振動的な振舞いがみられることも知られている[63–65]。これらのことから、移流不安定性による空間構造の形成は、モデルの詳細によらない普遍的な性質であることが期待される。

さらに、交通流で実際に観測されている、自由走行 → (オンランプ) → 同期流 → SGT（下流側から上流側へみたとき）という空間構造（2.1節、[7]）は、本研究で明らかにされた一様解 → 振動解 → 渋滞-自由走行という構造と類似している。この構造の形成に、移流不安定性が何らかの役割を果たしている可能性があると思われる。

また、移流項のある複素ギンツブルグ-ランダウ方程式のパターン形成に関する研究と、本研究との比較は興味深い。複素ギンツブルグ-ランダウ方程式では、自明解に微小な雑音を与え続けると、自明解 → 移流不安定な周期的解 → カオス的解という雑音維持構造ができることが知られており[49, 52]、特に自明解 → 周期解のパターンはOVモデルで見られるものとよく似ている。複素ギンツブルグ-ランダウ方程式とOVモデル、または他の交通流モデルの、数理構造上の類似点と相違点は何なのかという点も、興味ある問題である。

移流不安定性の存在は、流れのある系一般に見られる性質であり、交通流のみならず粉体パイプ流についても何らかの役割を果たしていることが期待される。粉体パイプ流で密度波がはっきりと見られるのは流入口からある程度離れたところであり、流入口で加わる摂動の影響が下流のみに伝わっているのではないかと思われる。従って、3.1節で述べた最適速度関数を、摂動の影響がすべて下流に行くように設定（ $U(0)$ を充分大きくすればよい）すると、粉体パイプ流の密度波形成の性質をある程度記述するものになるのではないかと期待される。3.1節で述べたように、 $U(0)$ の値の違いは周期境界条件を課した場合は問題にならないが、上流と下流が区別された境界条件の下で空間に固定した摂動を与えた場合に見られる構造には、大きな違いを生むものと思われる。

また、参考文献[10]で提案された粉体パイプ流のモデルとOVモデルの違いの一つに、前者は後方の粉体粒子の影響も受けるという点がある。後方からの影響

を採り入れた場合、粒子の番号の座標系での移流不安定性は自明ではなくなるが、位置座標系で一様解が移流不安定なパラメータ領域は存在するであろう。そのときに位置座標系に固定した摂動を加えた場合にできる構造が、OVモデルで見られる構造と定性的にどのような違いがあるのかを調べることも、今後の課題の一つである。

最後になったが、本研究では、交通流や粉体パイプ流の重要な特徴の一つである、いわゆる $1/f$ 揺らぎ (第1章、第2章) についての議論はなされていない。パワースペクトルが冪的な振舞いを示す現象論的なモデルはいくつか提案されており [34, 66]、その中にはOVモデルの拡張とみなせるものもある [10, 23, 32] が、その意味の理解はまだ充分とはいえない。この問題について検討することも今後の大きな課題である。

謝辞

まず、本研究のテーマを提案し、様々な提案や議論をしてくださった中西秀教授に心から感謝致します。また、野村清英助教授、淵崎員弘助手には、本論文を丁寧に査読していただき、また計算機の使用法などについても様々な助言をしていただきました。本当にありがとうございました。物性理論講座の小田垣孝教授、吉森明助教授、松井淳助手には、ゼミや普段の会話を通じていろいろと助言をいただきました。また、本論文について貴重な助言をいただいたことにつきましても、心より御礼申し上げます。東京大学の藤本仰一さんには、移流不安定性に関する文献を教えてくださいましたことに感謝します。また、固体理論、物性理論の両講座の皆様には、本研究に関することのみならず、日常生活においても様々な面で助けていただきました。本当にありがとうございました。今日まで私を支えてくださったすべての方々に、心より感謝申し上げます。

付録A 弱非線形解析

ここでは、小松ら [37, 38] の手法に従い、線形中立安定線近傍で OV モデルから KdV 方程式または MKdV 方程式が導かれることを示す。

(3.1) 式は、 $b_n \equiv x_{n+1} - x_n$ 、 $v_n \equiv \dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n$ を用いて

$$\dot{b}_n = v_n \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{v}_n = a(U(b_{n+1}) - U(b_n) - v_n) \quad (\text{A.2})$$

と書ける。弱線形(不)安定領域で $\{v_n\}$ は $\{b_n\}$ の変化を通じて変化する、つまり

$$v_n(t) = \tilde{V}(b_n, b_{n+1}, b_{n-1}, \dots) \quad (\text{A.3})$$

と仮定して OV モデルの弱非線形解析を行なう。

パラメータの線形中立線からのずれを、微小量 ϵ を用いて

$$a = 2U'(\bar{b})(1 \pm \epsilon^2) \quad (\text{A.4})$$

とすると、(3.17) 式の k^2 の項の係数が $O(\epsilon^2)$ になる。 $-i\omega_+$ の実部が釣り合うためには k^2 と k^4 の項が釣り合う必要があるので、 $k \propto \epsilon$ 、つまり $n \propto \epsilon^{-1}$ であることがわかる。また、(3.17) 式の k の 1 次の項は $n \rightarrow n + U'(\bar{b})t$ というガリレイ変換により消去できるので、 ω の最低次の項は $k^3 \propto O(\epsilon^3)$ 、つまり $t \propto \epsilon^{-3}$ となる。そこで、

$$z \equiv \epsilon(n + U'(\bar{b})t), \quad \tau \equiv \epsilon^3 t \quad (\text{A.5})$$

として「遅い変数」 z 、 τ を導入し、

$$b_n(t) = \bar{b} + \epsilon^p h(z, \tau) \quad (\text{A.6})$$

とする。

(A.3) 式より

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \tilde{V}(\epsilon^p b(z, \tau), \epsilon^p h(z + \epsilon, \tau), \epsilon^p h(z - \epsilon, \tau), \dots) \\ &= \tilde{V}(\epsilon^p h, \epsilon^{p+1} \partial_z h, \epsilon^{p+2} \partial_z^2 h, \dots) \\ &= \epsilon^p V_{11} h + \epsilon^{p+1} V_{12} h' + \epsilon^{p+2} V_{13} h'' + \epsilon^{p+3} V_{14} h''' + \epsilon^{p+4} V_{15} h'''' + \dots \\ &\quad + \epsilon^{2p} V_{21} h^2 + \epsilon^{2p+1} V_{22} h h' + \epsilon^{2p+2} (V_{23} h h'' + V_{24} h'^2) + \epsilon^{2p+3} (V_{25} h' h'' + V_{26} h h''') + \dots \\ &\quad + \epsilon^{3p} V_{31} h^3 + \epsilon^{3p+1} V_{32} h^2 h' + \epsilon^{3p+2} (V_{33} h h'^2 + V_{34} h^2 h'') + \dots \\ &\quad + \epsilon^{4p} V_{41} h^4 + \epsilon^{4p+1} V_{42} h^3 h' + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

と書くことが出来る。ここでダッシュは z についての偏微分を表す。(A.3) 式、(A.6) より

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial h} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial h'} \frac{dh'}{dt} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial h''} \frac{dh''}{dt} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial h'''} \frac{dh'''}{dt} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial h''''} \frac{dh''''}{dt} + \dots \quad (\text{A.8})$$

であるから、(A.7) 式と (A.1) 式を用いて

$$\begin{aligned} \dot{v}_n = & \epsilon^p [V_{11}^2] h \\ & + \epsilon^{p+1} [2V_{11}V_{12}] h' \\ & + \epsilon^{p+2} [2V_{11}V_{13} + V_{12}^2] h'' \\ & + \epsilon^{p+3} [2V_{11}V_{14} + 2V_{12}V_{13}] h''' \\ & + \epsilon^{p+4} [2V_{11}V_{15} + 2V_{12}V_{14} + V_{13}^2] h'''' \\ & + \epsilon^{2p} [3V_{11}V_{21}] h^2 \\ & + \epsilon^{2p+1} [3V_{11}V_{22} + 4V_{12}V_{21}] hh' \\ & + \epsilon^{2p+2} [(3V_{11}V_{23} + 4V_{13}V_{21} + 2V_{12}V_{22})hh'' + (3V_{11}V_{24} + 2V_{13}V_{21} + 2V_{12}V_{22})h'^2] \\ & + \epsilon^{2p+3} [(3V_{11}V_{25} + 4V_{13}V_{22} + 2V_{12}V_{23} + 4V_{12}V_{24} + 6V_{14}V_{21})h'h'' \\ & + (3V_{11}V_{26} + 4V_{14}V_{21} + 2V_{12}V_{23} + 2V_{13}V_{22})hh'''] \\ & + \epsilon^{3p} [4V_{11}V_{31} + 2V_{21}^2] h^3 \\ & + \epsilon^{3p+1} [4V_{11}V_{32} + 5V_{21}V_{22} + 6V_{12}V_{31}] h^2 h' \\ & + \epsilon^{3p+2} [(4V_{11}V_{33} + 6V_{21}V_{24} + 2V_{22}^2 + 4V_{12}V_{32} + 6V_{13}V_{31} + 2V_{21}V_{23})hh'^2 \\ & + (4V_{11}V_{34} + 5V_{21}V_{23} + 6V_{13}V_{31} + 2V_{12}V_{32} + V_{22}^2)h^2 h''] \\ & + \epsilon^{4p} [5V_{11}V_{41} + 5V_{21}V_{31}] h^4 \\ & + \epsilon^{4p+1} [5V_{11}V_{42} + 6V_{21}V_{32} + 7V_{22}V_{31} + 8V_{41}V_{12}] h^3 h' + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

と表すことが出来る。また、(A.6) 式より

$$\begin{aligned} U(b_{n+1}) - U(b_n) &= U(\bar{b} + \epsilon^p h(z + \epsilon, \tau)) - U(\bar{b} + \epsilon^p h(z, \tau)) \\ &= \epsilon^p U' \left[\epsilon h' + \frac{1}{2} \epsilon^2 h'' + \frac{1}{6} \epsilon^3 h''' + \frac{1}{24} \epsilon^4 h'''' + \dots \right] \\ &+ \frac{1}{2} \epsilon^{2p} U'' \left[2\epsilon h h' + \epsilon^2 (h'^2 + h h'') + \epsilon^3 \left(\frac{1}{3} h h''' + h' h'' \right) + \dots \right] \\ &+ \frac{1}{6} \epsilon^{3p} U''' \left[3\epsilon h^2 h' + \epsilon^2 \left(\frac{3}{2} h^2 h'' + 3h h'^2 \right) + \dots \right] \\ &+ \frac{1}{24} \epsilon^{4p} U'''' \left[\epsilon 4h^3 h' + \dots \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となる。ここで、 $U' \equiv U'(\bar{b})$, $U'' \equiv U''(\bar{b})$, \dots などとした。(A.7) 式、(A.9) 式、(A.10) 式を (A.2) 式に代入し、 ϵ の次数が同じ項を比較すれば $\{V_{ij}\}$ を求めることが出来る。

最も低い次数は ϵ^p の項であり、次の式が得られる:

$$V_{11}^2 h = -aV_{11} h \Rightarrow V_{11} = 0, -a. \quad (\text{A.11})$$

しかし, $V_{11} = -a$ の解から得られる縮約方程式は

$$(\epsilon^3 \partial_\tau + \epsilon U' \partial_z) h = -ah \quad (\text{A.12})$$

であり、これは速い減衰モードに対応している。そこで、以降では $V_{11} = 0$ の解を採用する。すると ϵ の次数毎に以下のような式が得られ、 $\{V_{ij}\}$ が決定される。

次数	得られる式	V_{ij}
$p+1$	$0 = a(U'h' - V_{12}h')$	$V_{12} = U'$
$p+2$	$V_{12}^2 h'' = a(\frac{U'}{2}h'' - V_{13}h'')$	$V_{13} = \frac{U'}{2a}(a - 2U')$ $= \pm \frac{U'}{2}\epsilon^2 + O(\epsilon^4)$
$p+3$	$2V_{12}V_{13}h''' = a(\frac{U'}{6}h''' - V_{14})$	$V_{14} = \frac{U'}{6} + O(\epsilon^2)$
$p+4$	$(2V_{12}V_{14} + V_{13}^2)h'''' = a(\frac{U'}{24}h'''' - V_{15}h''''')$	$V_{15} = -\frac{U'}{8} + O(\epsilon^2)$
$2p$	$0 = a(-V_{21}h^2)$	$V_{21} = 0$
$2p+1$	$0 = a(U''hh' - V_{22}hh')$	$V_{22} = U''$
$2p+2$	$(2V_{12}V_{22})hh'' + (2V_{12}V_{22})h'^2$ $= a(\frac{U''}{2}(hh'' + h'h')) - (V_{23}hh'' + V_{24}h'^2)$	$V_{23} = V_{24}$ $= -\frac{1}{2}U'' + O(\epsilon^2)$
$2p+3$	$(4V_{13}V_{22} + 6V_{14}V_{21})h'h'' + 2(V_{12}V_{23} + V_{13}V_{22})hh'''$ $= a(\frac{U'''}{2}(\frac{1}{3}hh''' + h'h'')) - (V_{25}h'h'' + V_{26}hh''')$	$V_{25} = 2U''' + O(\epsilon^2)$ $V_{26} = \frac{2}{3}U''' + O(\epsilon^2)$
$3p$	$0 = a(-V_{31}h^3)$	$V_{31} = 0$
$3p+1$	$0 = a(\frac{U'''}{2}h^2h' - V_{32}h^2h')$	$V_{32} = \frac{U'''}{2}$
$3p+2$	$(2V_{22}^2 + 4V_{12}V_{32})hh'^2 + (2V_{12}V_{32} + V_{22}^2)h^2h''$ $= a(\frac{U'''}{2}(\frac{1}{2}h^2h'' + hh'^2)) - (V_{33}hh'^2 + V_{34}h^2h'')$	$V_{33} = 2V_{34}$ $= -\frac{1}{2}U''' - \frac{U''^2}{U'}$ $+ O(\epsilon^2)$
$4p$	$0 = a(-V_{41}h^4)$	$V_{41} = 0$
$4p+1$	$0 = a(\frac{U''''}{6}h^3h' - V_{42}h^3h')$	$V_{42} = \frac{1}{6}U''''$

ここで、(A.4) 式を用いた。

これらの $\{V_{ij}\}$ を (A.1) 式に代入すると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \epsilon^p (\epsilon^3 \partial_\tau + \epsilon U' \partial_z) h \\
&= \epsilon^{p+1} U' h' + \epsilon^{p+2} \left(\pm \frac{U'}{2} \epsilon^2 \right) h'' + \epsilon^{p+3} \frac{1}{6} U' h''' - \epsilon^{p+4} \frac{1}{8} U' h'''' + \dots \\
&+ \epsilon^{2p+1} U'' h h' - \epsilon^{2p+2} \frac{1}{2} U'' (h h'' + h'^2) + \epsilon^{2p+3} 2U'' \left(h' h'' + \frac{1}{3} h h''' \right) + \dots \\
&+ \epsilon^{3p+1} \frac{1}{2} U''' h^2 h' - \epsilon^{3p+2} \left(\frac{1}{2} U''' + \frac{U''^2}{U'} \right) \left(h h'^2 + \frac{1}{2} h^2 h'' \right) + \dots \\
&+ \epsilon^{4p+1} \frac{1}{6} U'''' h^3 h' + \dots
\end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

左辺の第2項と右辺の第1項は打ち消しあうことがわかる。

(i) $U'' \neq 0$ のとき、分散項 $\epsilon^{p+3} \frac{1}{6} U' h'''$ と右辺の最低次の非線形項 $\epsilon^{2p+1} U'' h h'$ が釣り合うようにすると、 $p+3 = 2p+1$ より $p=2$ が得られる。このとき、縮約方程式は

$$\begin{aligned} \partial_\tau h &= \frac{1}{6} U' \partial_z^3 h + U'' h \partial_z h \\ &+ \epsilon \left[\pm \frac{U'}{2} \partial_z^2 h - \frac{1}{8} U' \partial_z^4 h - \frac{1}{2} U'' \partial_z (h \partial_z h) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

となる。これは、KdV 方程式に摂動項が加わったものである。

(ii) $U'' = 0$ のとき、右辺の最低次の非線形項は $\epsilon^{3p+1} \frac{1}{2} U''' h^2 h'$ となるので、この項が分散項と釣り合うようにすると、 $p+3 = 3p+1$ より $p=1$ が得られる。このとき、縮約方程式は

$$\begin{aligned} \partial_\tau h &= \frac{1}{6} U' \partial_z^3 h + \frac{1}{2} U''' h^2 \partial_z h \\ &+ \epsilon \left[\pm \frac{U'}{2} \partial_z^2 h - \frac{1}{8} U' \partial_z^4 h - \frac{1}{12} U''' \partial_z^2 h^3 + \frac{1}{24} U'''' \partial_z h^4 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

となる。これは、MKdV 方程式に摂動項が加わったものである。

付録B フロッケ指数

非線形な周期解の安定性を定量的に調べるには、線形化した微分方程式からフロッケ指数を求め、その実部をみる方法がある。以下にフロッケ指数の計算方法を述べる。この方法は参考文献 [67] に従った。

非線形な微分方程式系

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{N}(\mathbf{y}) \quad (\text{B.1})$$

が、周期解

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t), \quad \mathbf{y}_0(t + \tau) = \mathbf{y}_0(t) \quad (\text{B.2})$$

を持つとする。ここで太字は N 次元のベクトルを表す。この周期解からのずれ

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \quad (\text{B.3})$$

について微分方程式を線形化すると、微分方程式系

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \quad (\text{B.4})$$

が得られる。ここで \mathbf{x} は N 次元のベクトル、 A は N 次の正方行列であり、その成分は

$$A_{ij} = \frac{\partial N_i(\mathbf{y}_0)}{\partial y_{0j}} \quad (\text{B.5})$$

で与えられ、 $A(t + \tau) = A(t)$ を満たす。これで、周期解 \mathbf{y}_0 の線形安定性を調べる問題は、(B.4) 式の固定点 $\mathbf{x} = 0$ の線形安定性を調べることに帰着された。

(B.4) 式の解行列を $Q(t)$ とすると、

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) \quad (\text{B.6})$$

が成り立つ。ここで、演算子 T を

$$TG(t) = G(t + \tau) \quad (\text{B.7})$$

と定義すると、

$$(T\dot{Q}(t)) = T\dot{Q}(t) = T(A(t)Q(t)) = A(t)(TQ(t)) \quad (\text{B.8})$$

が成り立つので、 $TQ(t)$ も (B.4) 式の解行列である。従って、正則な定数行列 C を用いて

$$TQ(t) = Q(t)C \quad (\text{B.9})$$

と書くことができる。\$C\$ を解析的に求めることが出来ない場合も、初期条件を単位行列として、(B.4) 式に従って \$\tau\$ まで数値的に時間発展させることで \$C\$ を得ることができる。

ここで、行列 \$\Lambda\$ を

$$\exp(\Lambda\tau) \equiv C \quad (\text{B.10})$$

と定義すると、\$\Lambda\$ も正則行列である。この \$\Lambda\$ を用いて、解行列 \$Q(t)\$ を

$$Q(t) = U(t) \exp(\Lambda t) \quad (\text{B.11})$$

と分解する。これを (B.9) 式に代入すると

$$U(t + \tau) \exp(\Lambda(t + \tau)) = U(t) \exp(\Lambda t) \exp(\Lambda\tau) \quad (\text{B.12})$$

より

$$U(t + \tau) = U(t) \quad (\text{B.13})$$

が得られる。つまり \$U(t)\$ は周期的であるので、固定点の安定性は \$\exp(\Lambda t)\$ が決定することになる。

ここで、行列 \$\Lambda\$ をジョルダン標準形に移す行列 \$S\$ を導入すると、

$$\Lambda = S\tilde{\Lambda}S^{-1} \quad (\text{B.14})$$

で定義される \$\tilde{\Lambda}\$ がジョルダン標準形になる。(B.11) 式より

$$Q(t) = \tilde{Q}(t)S^{-1}, \quad \tilde{Q}(t) \equiv U(t)S \exp(\tilde{\Lambda}t) \quad (\text{B.15})$$

が得られ、\$S\$ が正則な定数行列であることから \$\tilde{Q}\$ も解行列であることがわかる。従ってこれ以降は \$\tilde{Q}\$ について考える。\$\Lambda\$ の \$j\$ 番めの固有値 \$\mu_j\$ が \$m_j\$ 重縮退しているとき、\$m_j\$ 次の正方行列 \$B_j\$ を用いて、

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} B_1 & & & O \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_M \end{pmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

$$B_j = \begin{pmatrix} \mu_j & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \mu_j \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

と書くことができる。単位行列 \$I\$ を用いて、\$B_j\$ を

$$B_j = \mu_j I + K_j \quad (\text{B.18})$$

と分解すると、 $K_j t$ の冪乗は次数 m_j で 0 になり、結局解ベクトル $\mathbf{q}_j(t)$ は

$$\mathbf{q}_j(t) = \exp(\mu_j t) \mathbf{v}_j(t) \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j(t) &= \mathbf{v}_j^0(t) + \mathbf{v}_j^1(t)t + \cdots + \mathbf{v}_j^{m_j}(t)t^{m_j} \\ \mathbf{v}_j^k(t) &= \mathbf{v}_j^k(t + \tau) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

で与えられる。この固有値 μ_j がフロッケ指数である。 μ_j の実部が正のとき固定点 $\mathbf{x} = 0$ が不安定であることがわかる。

フロッケ指数のみを求めるときには行列 Λ を求める必要はなく、行列 C の固有値 λ_j より

$$\mu_j = \frac{\log(\lambda_j)}{\tau} \quad (\text{B.21})$$

を用いて求めることができる。

付録C 先頭を一樣解の周りで微小振動させた場合の振舞い

先頭のをを一樣解の周りで周期的に微小振動させたときの系の振舞いを線形の範囲で解析的に調べ [48]、更に数値計算を行なった。ここではその結果を述べる。一樣解に

$$\begin{aligned} g(t, n) &= 0 & (t < 0) \\ g(t, n) &= \epsilon \delta_{n,0} e^{i\omega_0 t} & (t > 0) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

という摂動を与えたときの線形応答を考える。一樣解からのずれ $\Delta x_n(t)$ について線形化した運動方程式から

$$\tilde{x}(\omega, k) = \frac{g(\omega, k)}{\Delta(\omega, k)} \quad (\text{C.2})$$

が得られる。ここで、 $\tilde{x}(\omega, k)$ は $\Delta x_n(t)$ の (4.22) 式による変換であり、 $\Delta(\omega, k) = 0$ は分散関係をあたえる。 $g(\omega, k)$ は $g(t, n)$ を (4.22) 式と同様に変換したもので、

$$g(\omega, k) = \frac{-\epsilon}{i(\omega - \omega_0)} \quad (\text{C.3})$$

である¹。したがって、

$$\Delta x_n(t) = \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-\epsilon e^{i\omega t}}{i(\omega - \omega_0)} \hat{x}(\omega, n) \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{x}(\omega, n) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikn}}{\Delta(\omega, k)} \quad (\text{C.5})$$

が得られる。これは自動的に $t < 0$ のとき $\Delta x_n(t) = 0$ を満たす。

この系で、 $t \rightarrow \infty$ としてから $|n| \rightarrow \infty$ の極限をとったとき、 $|\Delta x_n(t)|$ が成長するかどうかを考える²。4.3節と同様に、まず (C.4) 式の ω についての積分路を下にずらすことを考える。系の不安定性は車番座標系では移流的であるので、 $\Delta(\omega, k)$

¹この変換を行なうとき、逆変換が $\text{Im}(\omega) > 0$ の積分路をとって行なわれるので、 $e^{i\omega t}$ が $t \rightarrow \infty$ の極限で 0 になることを用いた。

² $n \rightarrow \infty$ の極限をとってから $t \rightarrow \infty$ とすると、必ず $\Delta x_n(t) \rightarrow 0$ になる。これは、たとえ摂動の影響が空間を増幅されながら伝わるとしても、無限遠まで摂動の影響が及ぶには無限の時間がかかるためである。

は ω の上半面に零点を持たない。よって、(C.4) 式の被積分関数の、最も上にある極は、実軸上の $\omega = \omega_0$ となる。従って、 $t \rightarrow \infty$ のときの漸近形は

$$\Delta x_n(t) \propto e^{i\omega_0 t} \hat{x}(\omega_0, n) \quad (\text{C.6})$$

である。

$\text{Im}\omega \rightarrow \infty$ のとき、 k の上半面、下半面にある極をそれぞれ $k_+(\omega)$ 及び $k_-(\omega)$ とする。 ω についての積分路を下げていくと k_+ 、 k_- は移動していくので、4.3 節と同様 k の積分路を曲げて極を避けなければならない。 $n \rightarrow +\infty (-\infty)$ の極限をとったときは、(C.5) 式の k についての積分路を上(下)にずらさずほど値が小さくなるが、極 k_+ (k_-) を越えて上(下)にずらすことはできない。結局最も寄与が大きい極は、 $\text{Im}\omega \rightarrow \infty$ のとき上半面(下半面)にあった極のうちで、 $\text{Im}\omega \rightarrow 0$ としたときに最も下(上)にある極である。そのような極 k_+ (k_-) を用いると、 $n \rightarrow +\infty$ のときの漸近形は

$$\Delta x_n(t) \propto \exp(ik_+(\omega_0)n - i\omega_0 t) \quad (\text{C.7})$$

$n \rightarrow -\infty$ のときの漸近形は

$$\Delta x_n(t) \propto \exp(ik_-(\omega_0)n - i\omega_0 t) \quad (\text{C.8})$$

と書ける。したがって、 $k_+(\omega_0)$ が下半面にあれば $n > 0$ で不安定、 $k_-(\omega_0)$ が上半面にあれば $n < 0$ で不安定である。つまり、分散関係から得られた $k = k(\omega)$ について、 $\omega = \omega_0 + i\gamma$ として (γ は実数)、 γ が 0 から ∞ まで変化するとき $\text{Im}(k(\omega))$ の符合が変われば、(C.1) 式で与えられるような摂動は、空間的に増幅される。

さて、ここで具体的な表式を考える。(4.30) 式より

$$k(\omega) = -i \log \left(-\frac{\omega^2 + ia\omega - aU'(\bar{b})}{aU'(\bar{b})} \right) \quad (\text{C.9})$$

が得られる。 x, y を実数とするとき

$$\text{Im}(-i \log(x + iy)) = -\log \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \quad (\text{C.10})$$

より、

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \text{Im}(k(\omega_0 + i\gamma)) < 0 \quad (\text{C.11})$$

である。したがって、 $\text{Im}(k(\omega_0)) > 0$ のとき、系は $n < 0$ で不安定である。 $\text{Im}(k(\omega_0)) > 0$ を満たすには、(C.9) 式より

$$(\omega_0^2 - aU'(\bar{b}))^2 + (a\omega_0)^2 - (aU'(\bar{b}))^2 < 0 \quad (\text{C.12})$$

である必要がある。式を整理すると、

$$\omega_0^2 < a(2U'(\bar{b}) - a) \quad (\text{C.13})$$

となる。 $a > 2U'(\bar{b})$ 、つまり線形安定のときこの条件を満たす振動数は存在しない。 $k(\omega)$ の表式から、

$$\operatorname{Re}(k(\omega_0)) = \arctan\left(\frac{a\omega_0}{\omega_0^2 - aU'(\bar{b})}\right) \quad (\text{C.14})$$

$$\operatorname{Im}(k(\omega_0)) = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{(\omega_0^2 - aU'(\bar{b}))^2 + (a\omega_0)^2}{(aU'(\bar{b}))^2}\right) \quad (\text{C.15})$$

が得られる。線形の範囲で振動が後方に伝わる位相速度 c_0 、成長率 σ はそれぞれ

$$c_0 = -\frac{\omega_0}{\operatorname{Re}(k(\omega_0))} \quad (\text{C.16})$$

$$\sigma = \operatorname{Im}(k) \quad (\text{C.17})$$

で与えられ、数値実験の結果と比較することができる。

線形解析の計算を確かめ、さらに後方に摂動の周期 $T = 2\pi/\omega_0$ と同じ周期の振動解が現れることを確かめるために、先頭の車を

$$x_N(t) = \bar{b}N + U(\bar{b})t + 10^{-5} \sin(\omega_0 t) \quad (\text{C.18})$$

に従うものとし、初期条件を一様解として充分時間が経った後の先頭から 200 台後ろまでの車の振舞いを数値実験で調べた。その結果、振幅が小さい領域の位相速度は (C.16) 式に従うが、振幅が大きい領域では位相速度が変化することがわかった (図 C.1(a))。この位相速度が変化する領域が、ほぼ図 C.1(b) の $n < 100$ の領域に対応しており、振動解の領域である。C.1(b) の実線は、図 C.1(a) の振動解領域から求めた位相速度 c を用いて (4.41) 式より求めた振動解であるが、数値実験の結果と良く一致している。表 C.1 に、 c_0 、 σ の (C.16) 式、(C.17) 式による結果と数値実験による結果、それに振動解領域の時間周期を掲載した。先頭の周期振動の時間周期と一致する振動解が誘起されていることがわかる。

$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$	c_0	c_{0s}	σ	σ_s	T_s
7.0	0.661	0.660	0.0851	0.0851	6.98
8.0	0.703	0.703	0.135	0.135	7.97
9.0	0.745	0.744	0.145	0.144	8.99

表 C.1: $a = 1$ 、 $\bar{b} = 2$ での線形解析結果と数値実験結果の比較。 c_0 、 σ がそれぞれ (C.16) 式、(C.17) 式から求めたものであり、添字 s がついたものが数値実験の結果である。また、 T_s は振動解の時間周期である。 T とよく一致している。

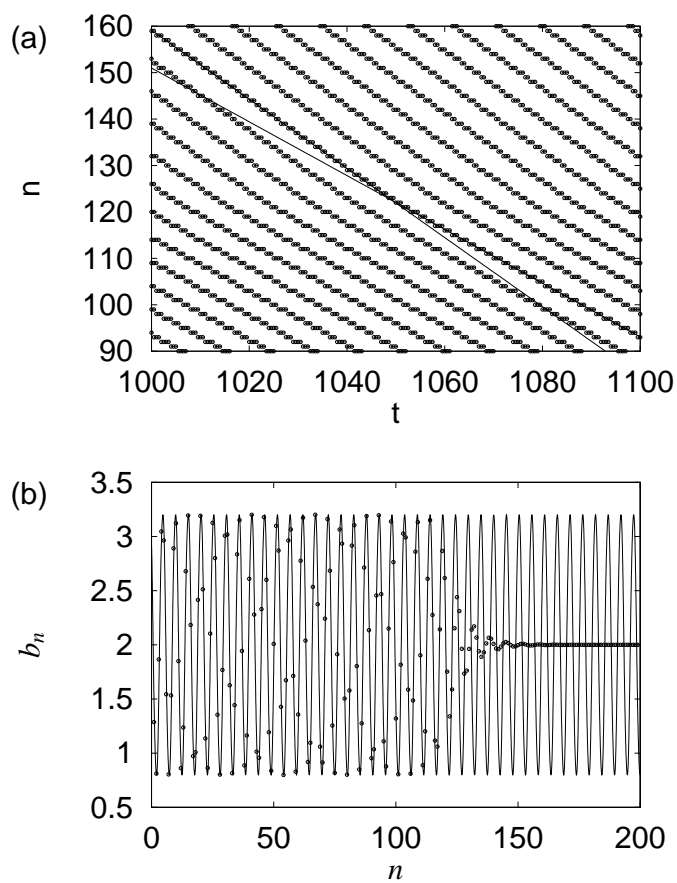


図 C.1: $a = 1$ 、 $\bar{b} = 2$ 、 $\omega_0 = 2\pi/9$ での数値計算結果。(a) 波の山を時間 t 対車番 n でプロットしたもの。傾きが位相速度を表す。 $n \approx 125$ 辺りで変化していることがわかる。(b) $t = 1100$ での車番 n 対車間距離 b_n のスナップショット。実線は、(a) 図から求めた位相速度 $c = 0.579$ を用い、(4.41) 式で $a = 1$ 、 $\hat{b} = 2$ として計算した振動解である。 $n < 100$ の部分に振動解領域が形成されていることがわかる。

参考文献

- [1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama. Structure stability of congestion in traffic dynamics. *Jpn. J. Ind. Appl. Math.* **11**, 203 (1994).
- [2] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama. Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. *Phys. Rev. E* **51**, 1035 (1995).
- [3] B. S. Kerner and H. Rehborn. Experimental features and characteristics of traffic jams. *Phys. Rev. E* **53**, R1297 (1996).
- [4] 西成活裕、林幹久 編. 東名高速道路における交通量資料集 I, 交通流数理研究会 (1999).
- [5] B. S. Kerner and H. Rehborn. Experimental properties of complexity in traffic flow. *Phys. Rev. E* **53**, R4275 (1996).
- [6] B. S. Kerner and H. Rehborn. Experimental properties of phase transition in traffic flow. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4030 (1997).
- [7] B. S. Kerner. Experimental features of self-organization in traffic flow. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3797 (1998).
- [8] T. Musha and H. Higuchi. The 1/f fluctuation of a traffic current on an expressway. *Jpn. J. Appl. Phys.* **15**, 1271 (1976).
- [9] S. Horikawa, T. Isoda, T. Nakayama, A. Nakahara, and M. Matsushita. Self-organized critical density waves of granular particles flowing through a pipe. *Physica A* **233**, 699 (1996).
- [10] O. Moriyama, N. Kuroiwa, M. Matsushita, and H. Hayakawa. 4/3 law of granular particles flowing through a vertical pipe. *Phys. Rev. E* **80**, 2833 (1998).

- [11] O. Moriyama, T. Isoda, N. Kuroiwa, M. Kanda, I. Ràfols, and M. Matsushita. Dynamics of granular flow through a vertical pipe: Effect of medium flow. *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 1616 (1998).
- [12] O. Moriyama, N. Kuroiwa, M. Kanda, and M. Matsushita. Statistics and structure of granular flow through a vertical pipe. *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 1603 (1998).
- [13] A. Nakahara and T. Isoda. $1/f^\alpha$ density fluctuation at the slugging transition point of granular flows through a pipe. *Phys. Rev. E* **55**, 4264 (1997).
- [14] T. Raafat, J.-P. Hulin, and H. J. Herrmann. Density waves in dry granular media falling through a vertical pipe. *Phys. Rev. E* **53**, 4345 (1996).
- [15] J.-L. Aider, N. Sommier, T. Raafat, and J.-P. Hulin. Experimental study of a granular flow in a vertical pipe: A spatiotemporal analysis. *Phys. Rev. E* **59**, 778 (1999).
- [16] S. Horikawa, A. Nakahara, T. Nakayama, and M. Matsushita. Self-organized critical density waves of granular material flowing through a pipe. *J. Phys. Soc. Jpn.* **64**, 1870 (1995).
- [17] T. Pöschel. Recurrent clogging and density waves in granular material flowing through a narrow pipe. *J. Phys. I France* **4**, 499 (1994).
- [18] J. Lee and M. Leibig. Density waves in granular flow: a kinetic wave approach. *J. Phys. I France* **4**, 507 (1994).
- [19] J. Lee. Density waves in the flows of granular media. *Phys. Rev. E* **49**, 281 (1994).
- [20] G. Peng and H. J. Herrmann. Density waves of granular flow in a pipe using lattice-gas automata. *Phys. Rev. E* **49**, R1796 (1994).
- [21] G. Peng and H. J. Herrmann. Density waves and $1/f$ density fluctuations in granular flow. *Phys. Rev. E* **51**, 1745 (1995).
- [22] D. A. Kurtze and D. C. Hong. Traffic jams, granular flow, and soliton selection. *Phys. Rev. E* **52**, 218 (1995).
- [23] H. Hayakawa and K. Nakanishi. Universal behaviors in granular flows and traffic flows. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **130**, 57 (1998).
- [24] 早川尚男. 粉体の物理: 静力学、摩擦、流体力学、流動層、及び交通流. 物理学論文選集 XI 粉粒体の物理学, page 12 (1999).

- [25] B. S. Kerner and P. Konhäuser. Cluster effect in initially homogeneous traffic flow. *Phys. Rev. E* **48**, R2335 (1993).
- [26] D. Helbing and M. Treiber. Gas-kinetic-based traffic model explaining observed hysteretic phase transition. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3042 (1998).
- [27] G. B. Whitham. Exact solutions for a discrete system arising in traffic flow. *Proc. R. Soc. Lond. A* **428**, 49 (1990).
- [28] Y. Igarashi, K. Itoh, and K. Nakanishi. Toda lattice solutions of differential-difference equations for dissipative systems. *J. Phys. Soc. Jpn.* **68**, 791 (1999).
- [29] E. Tomer, L. Safonov, and S. Havlin. Presence of many stable homogeneous states in an inertial car-following model. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 382 (2000).
- [30] H. Hayakawa and K. Nakanishi. Theory of traffic jam in one-lane model. *Phys. Rev. E* **57**, 3839 (1998).
- [31] S. Yukawa and M. Kikuchi. Coupled-map modeling of one-dimensional traffic flow. *J. Phys. Soc. Jpn.* **64**, 35 (1995).
- [32] S. Tadaki, M. Kikuchi, Y. Sugiyama, and S. Yukawa. Coupled map traffic flow simulator based on optimal velocity model. *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 2270 (1998).
- [33] K. Konishi, H. Kokame, and K. Hirata. Coupled map car-following model and its delayed-feedback control. *Phys. Rev. E* **60**, 4000 (1999).
- [34] K. Nagel and M. Paczuski. Emergent traffic jams. *Phys. Rev. E* **51**, 2909 (1995).
- [35] K. Nagel. Particle hopping models and traffic flow theory. *Phys. Rev. E* **53**, 4655 (1996).
- [36] D. Helbing and M. Schreckenberg. Cellular automata simulating experimental properties of traffic flow. *Phys. Rev. E* **59**, R2505 (1999).
- [37] T.-S. Komatsu and S. Sasa. Kink soliton characterizing traffic congestion. *Phys. Rev. E* **52**, 5574 (1995).
- [38] 小松 輝久. 交通渋滞を特徴づけるキンクソリトン. 博士論文 (1995).
- [39] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama. Phenomenological study of dynamical model of traffic flow. *J. Phys. I France* **5**, 1389 (1995).

- [40] L. Neubert, L. Santen, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg. Single-vehicle data of highway traffic: A statistical analysis. *Phys. Rev. E* **60**, 6480 (1999).
- [41] M. Muramatsu and T. Nagatani. Soliton and kink jams in traffic flow with open boundaries. *Phys. Rev. E* **60**, 180 (1999).
- [42] T. Nagatani. Time-dependent Ginzburg-Landau equation for the jamming transition in traffic flow. *Physica A* **258**, 237 (1999).
- [43] T. Nagatani. Thermodynamic theory for the jamming transition in traffic flow. *Phys. Rev. E* **58**, 4271 (1998).
- [44] T. Nagatani. TDGL and MKdV equations for jamming transition in lattice models of traffic. *Physica A* **264**, 581 (1999).
- [45] S. Wada and H. Hayakawa. Kink solution in a fluid model of traffic flow. *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 763 (1998).
- [46] K. Nishinari and D. Takahashi. Analytical properties of ultradiscrete burgers equation and rule-184 cellular automaton. *J. Phys. A Math. Gen.* **31**, 5439 (1998).
- [47] 西成 活裕. 交通流と超離散. 数理科学 9月号, 32 (1999).
- [48] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii. *Physical Kinetics*, chapter 6. Pergamon, Oxford (1981).
- [49] R. J. Deissler. External noise and the origin and dynamics of structure in convectively unstable systems. *J. Stat. Phys.* **54**, 1459 (1989).
- [50] R. J. Deissler. One-dimensional strings, random fluctuations, and complex chaotic structures. *Phys. Lett.* **100A**, 451 (1984).
- [51] K. Kaneko. Spatial period-doubling in open flow. *Phys. Lett.* **111**, 321 (1985).
- [52] R. J. Deissler. Noise-sustained structure, intermittency, and the Ginzburg-Landau equation. *J. Stat. Phys.* **40**, 371 (1985).
- [53] R. J. Deissler and K. Kaneko. Velocity-dependent Lyapunov exponents as a measure of chaos for open-flow systems. *Phys. Lett. A* **119**, 397 (1987).
- [54] 蔵本由紀、川崎恭治、山田道夫、甲斐昌一、篠本滋. パターン形成, chapter 3. 朝倉書店 (1991).

- [55] K. Kaneko. Lyapunov analysis and information flow in coupled map lattice. *Physica D* (1986).
- [56] D. Vergni, M. Falcioni, and A. Vulpiani. Spatial complex behaviour in non chaotic flow systems. *Phys. Rev. E* **56**, 6170 (1997).
- [57] K. Fujimoto and K. Kaneko. Noise-induced input dependence in a convectively unstable dynamical system. *Physica D* **129**, 203 (1999).
- [58] F. H. Willeboordse and K. Kaneko. Pattern dynamics of a coupled map lattice for open flow. *Physica D* **86**, 428 (1995).
- [59] J. M. Chomaz. Absolute and convective instabilities in nonlinear systems. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1931 (1992).
- [60] A. Couairon and J. M. Chomaz. Absolute and convective instabilities, front velocities and global modes in nonlinear systems. *Physica D* **108**, 236 (1997).
- [61] P. Colet, D. Walgraef, and M. S. Miguel. Convective and absolute instabilities in the subcritical Ginzburg-Landau equation. *cond-mat/9901284* (1999).
- [62] K. Nakanishi. Multi-bunch solutions of differential-difference equation for traffic flow. *patt-sol/9909005* (1999).
- [63] D. Helbing, A. Hennecke, and M. Treiber. Phase diagram of transition states in the presence of inhomogeneities. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4360 (1999).
- [64] H. Y. Lee, H. W. Lee, and D. Kim. Dynamic states of continuum traffic equation with on-ramp. *Phys. Rev. E* **59**, 5101 (1999).
- [65] H. Y. Lee, H.-W. Lee, and D. Kim. Origin of synchronized traffic flow on highways and its dynamic phase transitions. *Phys. Rev. E* **81**, 1130 (1998).
- [66] S. Yukawa and M. Kikuchi. Density fluctuations in traffic flow. *J. Phys. Soc. Jpn.*, page 916 (1996).
- [67] H. Haken. *Advanced synergetics: Instability hierarchies of self-organizing systems and devices*, chapter 2. Springer-Verlag (1983).