Eksamensopgave

Anvendt Statistik - forårsemesteret 2001.

Følgende er eksamensopgaven for kurset *Anvendt Statistik* i forårssemesteret 2001. Den vil blive udleveret onsdag d. 16. maj 2001 klokken 10:15, og skal være undertegnede i hænde senest fredag d. 18. maj 2001 samme tidspunkt. Det ikke blot tillades men anbefales kraftigt at bruge computere og i visse opgaver vil brugen af computere være nødvendig. Det er *ikke* tilladt at arbejde sammen.

God arbejdslyst, held og lykke og tak for et godt semester. *Troels*

I – Fordelinger:

1.1 Lad x være uniformt fordelt i intervallet $[\alpha, \beta]$, hvor $0 < \alpha < \beta$.

- Hvad er forventningsværdien og variansen af $1/x$?
- Sammenlign forventningsværdien $E[1/x]$ med $1/E[x]$.

1.2 Medlemmerne af en større kollaboration, der kører en gigantisk protonhenfaldsdetektor i en saltmine i Ohio, observerede otte neutrinoer i deres apperatur, som faldt sammen med observationen af Supernova 1987A.

- Hvis det gennemsnitlige antal observerede neutrinoer er to om dagen, hvad er så sandsynligheden for at observere otte eller flere på en dag?
- Faktisk kom de otte neutrinoer indenfor en periode på 10 minutter. Hvad er sandsynligheden for at gøre en sådan observation, hvis den gennemsnitlige rate er to pr. 24 timer?

II – Fejlberegning:

2.1 Resistansen R af en cylendrisk modstand er proportional med længden L og omvendt proportional med tværsnitsarealet $A = \pi r^2$.

- For at bestemme R mest præcist, hvilken en af størrelserne L og r bør man så bestemme med mindst relativ fejl?
- Hvad skal forholdet mellem deres relative fejl være, for at de bidrager ligeligt til fejlen på R?

2.2 Lad $x = yz/(y - z)$, hvor y og z er ukorrelerede og har middelværdierne $\mu_y = 1.2$, $\mu_z = 0.9$ og spredningerne $\sigma_y = 0.2$, $\sigma_z = 0.3$, henholdsvis.

- Beregn middelværdi og spredningen på x.
- Hvis y og z er korrelerede variable med korrelationskoefficient $\rho_{y,z} = -0.8$, hvad bliver spredningen på x så?

III – Monte Carlo: (Til denne del skal der bruges computere. Plots kan vedlægges opgavebesvarelsen).

3.1 Lad $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ være sandsynlighedsfordeling (probability density function) for $x \in [0, 1]$.

- Hvilken metode bør benyttes til at generere denne fordeling? Forklar.
- Lav en algoritme, der udfra en jævn fordeling i intervallet $[0, 1]$, genererer 1000 tal efter sandsynlighedsfordelingen $f(x)$. Udregn gennemsnittet af disse tal samt usikkerheden på dette gennemsnittet. Sammenlign med den analytiske værdi for gennemsnittet.

3.3 Lad en Monte Carlo algoritme generere 200 kasser med sidelængderne $a = 2.0 \pm 0.2$, $b = 3.0 \pm 0.15$ og $c = 4.0 \pm 0.1$, hvor usikkerhederne er Gaussiske og a, b og c er ukorrelerede.

- Plot fordelingen af kassernes volumner, og bestem dennes middelværdi og spredning.
- Sammenlign spredningen med den man får fra propagering af fejl.

IV - Statistiske tests:

4.1 Ti studerende måler levetiden af en radioaktiv isotop, og deres resultater samt usikkerheder er anført nedenfor:

Student	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
τ	34.3	32.2	35.4	33.5	34.7	33.4	27.9	32.0	32.4	31.0
σ_τ	1.6	1.2	1.5	1.4	1.6	1.5	1.9	1.2	1.4	1.8

- Find middelværdien og usikkerheden på middelværdien.
- Vurder udfra χ^2-metoden om de studerendes målinger er konsistente.
- I en anden klasse får ti elever et gennemsnit på 30.73 ± 0.42. Givet hypotesen om, at de har målt det samme, hvad er så sandsynligheden for at opnå disse to værdier? Er de to klassers resultater konsistente?

4.2 Et fit til et histogram giver $\chi^2 = 97.2$, hvor antallet af frihedsgrader $N_{\text{dof.}} = 64$.

- Hvad er sandsynligheden for dette eller et større χ-kvadrat?
- For hvilken værdi af χ^2 vil den tilhørende sandsynlighed nå ned på 5 %?

V - Fitting data:

5.1 Astronomen Claudius Ptolemy (2. årh.) udførte eksperimenter med refraktion af lys fra luft til vand. Han målte refraktionsvinklen, θ_r, (vinklen i forhold til lodret i vandet) som funktion af indfaldsvinklen, θ_i (vinklen i forhold til lodret i luften), resultatet af hvilket er anført (i grader) nedenfor:

θ_i	10	20	30	40	50	60	70	80
θ_r	8	$15\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	29	35	$40\frac{1}{2}$	$45\frac{1}{2}$	50

Antag, for simplicitet, at fejlene på θ_i er ubetydelig, og at fejlene på θ_r er uafhængige og Gaussisk fordelte med $\sigma_r = \frac{1}{2}^\circ$.

- Den korrekte refraktionslov kendtes ikke før det syttende århundrede. Indtil da var det almindeligt antaget at sammenhængen mellem vinklerne var:

$$\theta_r = \alpha\theta_i, \tag{1}$$

selv om Ptolemy foretrak:

$$\theta_r = \alpha\theta_i - \beta\theta_i^2. \tag{2}$$

Find ved mindste kvadraters metode parametrene for begge hypoteser og bestem sandsynligheden for at opnå de minimerede χ^2 givet antallet af frihedsgrader. Kommenter resultatet.

- I 1621 opdagede Snell den korrekte refraktionslov:

$$\theta_r = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(\theta_i)}{r}\right), \tag{3}$$

hvor $r = n_r/n_i$ er forholdet mellem refraktionsindex for de to materialer, her luft og vand, hvormed $r = 1.33$. Bestem χ^2 og dets sandsynlighed. Kommenter igen resultatet.

- Hvor præcist kan r bestemmes udfra målingerne?

Experience is that marvelous thing that enables you recognize a mistake when you make it again.

[F. P. Jones]