

# **Introduktion til den specielle relativitetsteori**

**Mogens Dam**

Niels Bohr Institutet

5. august 2015

9. udgave



# Forord

Denne indføring i den specielle relativitetsteori er i udgangspunktet baseret på Kapitel 8 og 9 i Ole Knudsens og Olaf Pedersens *Lærebog i mekanik*. Andenudgaven fra 2003 var i forhold til førsteudgaven fra 2002 omstruktureret og på visse områder omskrevet. Specielt gjaldt dette Kapitel 6, hvor filosofien ændredes til at benytte bevarelsen af 4-impuls som udgangspunkt for den relativistiske mekanik. Femteudgaven fra 2005 var udvidet med et stort antal opgaver, hvoraf en del er gennemregnede. Syvende udgave tjente, som sjetteudgaven, først og fremmest til at korrigere diverse småfejl. Derudover ændredes notationen således, at 3-vektorer nu angives med en pil, altså f.eks.  $\vec{a}$ , mens 4-vektorer blot angives med fed type, f.eks.  $\mathbf{U}$ . I ottende udgave fra 2012 var et par diskussioner udvidet og diverse småfejl korrigeret. Det samme er tilfældet for denne niende udgave, hvor hvert kapitel yderligere er afrundet med en opsummering.

Mogens Dam  
Niels Bohr Institutet  
August 2015



# Indhold

<b>1</b>	<b>Fra det Newtonske til det specielle relativitetsprincip</b>	<b>1</b>
1.1	Relativitet . . . . .	1
1.2	Newtons bevægelseslove og inertialsystemer . . . . .	1
1.3	Galilei-transformationen . . . . .	3
1.4	Det Newtonske relativitetsprincip . . . . .	5
1.5	Æteren . . . . .	6
1.6	Michelson-Morley-forsøget . . . . .	8
1.7	Lorentz's æterteori . . . . .	12
1.8	Det specielle relativitetsprincip . . . . .	12
	Opsummering af Kapitel 1 . . . . .	14
	Gennemregnede eksempler til Kapitel 1 . . . . .	15
	Opgaver til Kapitel 1 . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Lorentz-transformationen</b>	<b>19</b>
2.1	Den specielle relativitetsteoris grundlag . . . . .	19
2.2	Revision af fundamentale begreber . . . . .	19
2.2.1	Samtidighed . . . . .	20
2.2.2	Længde . . . . .	22
2.2.3	Varighed . . . . .	24
2.3	Inertialsystemers homogenitet og isotropi . . . . .	24
2.4	Koordinat-gitteret . . . . .	24
2.5	Begrebet <i>iagttager</i> . . . . .	25
2.6	Udledning af Lorentz-transformationen . . . . .	26
2.7	Lorentz-transformationen på differens- og differential-form . . . . .	31
2.8	Kvadrerede former . . . . .	32
2.9	Den relativistiske hastighedsgrænse . . . . .	33
2.10	Rumtidsdiagrammer . . . . .	35
2.11	Grafisk repræsentation af Lorentz-transformationen . . . . .	36
2.11.1	Passive Lorentz-transformationer . . . . .	37
2.11.2	Aktive Lorentz-transformationer . . . . .	39
2.11.3	Eksempel: Hyperbolsk bevægelse . . . . .	40
	Opsummering af Kapitel 2 . . . . .	42
	Gennemregnede eksempler til Kapitel 2 . . . . .	43
	Opgaver til Kapitel 2 . . . . .	44

<b>3</b>	<b>Relativistisk kinematik</b>	<b>47</b>
3.1	Længdeforkortningen . . . . .	47
3.2	Tidsforlængelsen . . . . .	48
3.2.1	Feynman-uret . . . . .	50
3.2.2	Sammenhængen mellem længdeforkortning og tidsforlængelse . . .	51
3.2.3	Accelererede ure . . . . .	51
3.3	Eksperimentel påvisning af tidsforlængelsen . . . . .	52
3.3.1	Eksempel: Direkte påvisning af tidsforlængelsen . . . . .	52
3.3.2	Påvisning af tidsforlængelsen ved hjælp af partikelhenfald . . . . .	52
3.4	Tvillingeparadokset . . . . .	54
3.5	Transformation af hastigheder . . . . .	55
3.5.1	Parallelle hastigheder . . . . .	56
3.5.2	Størrelsen af sammensatte hastigheder . . . . .	56
3.5.3	Transformation af $\gamma$ -funktionen . . . . .	57
3.5.4	Eksempel: Retningen af en bevægelse . . . . .	57
	Opsummering af Kapitel 3 . . . . .	58
	Gennemregnede eksempler til Kapitel 3 . . . . .	59
	Opgaver til Kapitel 3 . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Relativistisk optik</b>	<b>65</b>
4.1	Doppler-effekten . . . . .	65
4.1.1	Den klassiske Doppler-effekt . . . . .	65
4.1.2	Den relativistiske Doppler-effekt . . . . .	67
4.1.3	Relativistisk versus klassisk Dopplereffekt . . . . .	69
4.1.4	Eksempel: Ives-Stilwell forsøget . . . . .	70
4.2	Lysets aberration . . . . .	71
4.2.1	Klassisk aberration . . . . .	73
4.2.2	Relativistisk aberration . . . . .	74
4.3	Den tilsyneladende form af bevægede objekter . . . . .	74
	Opsummering af Kapitel 4 . . . . .	77
	Gennemregnede eksempler til Kapitel 4 . . . . .	78
	Opgaver til Kapitel 4 . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Rumtiden og fire-vektorer</b>	<b>81</b>
5.1	Rumtiden . . . . .	81
5.2	Tre-dimensionale rumtidsdiagrammer . . . . .	82
5.3	Lyskegler og intervaller . . . . .	83
5.4	Tre-vektorer . . . . .	84
5.5	Fire-vektorer . . . . .	87
5.6	Fire-vektorers geometri . . . . .	88
5.7	Egentiden . . . . .	89
5.8	Fire-hastigheden . . . . .	90
5.8.1	Eksempel: Hastighedstransformationerne fra 4-hastigheden . . . . .	91

5.9	Fire-accelerationen . . . . .	92
5.9.1	Transformation af acceleration . . . . .	93
	Opsummering af Kapitel 5 . . . . .	94
	Gennemregnede eksempler til Kapitel 5 . . . . .	95
	Opgaver til Kapitel 5 . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Relativistisk mekanik</b>	<b>97</b>
6.1	Forudsætninger . . . . .	97
6.2	Den nye mekaniks aksiomer . . . . .	98
6.2.1	Fire-impulsen og den relativistiske impuls . . . . .	98
6.2.2	Fire-impuls-bevarelse . . . . .	99
6.2.3	Eksempel: Impulsbevarelse i stød mellem to partikler . . . . .	99
6.3	Relativistisk energi . . . . .	101
6.3.1	Eksempel: Ækvivalensen mellem indre energi og masse . . . . .	103
6.3.2	Eksempel: $E_0 = mc^2$ og makroskopiske legemer . . . . .	104
6.3.3	Eksempel: Solens udstråling . . . . .	105
6.4	De relativistiske bevarelseslove . . . . .	105
6.5	Sammenhængen mellem energi og impuls . . . . .	105
6.6	Masseløse partikler . . . . .	106
6.6.1	Doppler-effekten fra transformationen af fotonens 4-impuls . . . . .	107
6.6.2	Eksempel: Compton-spredning . . . . .	108
6.7	Massecenter-systemet og den invariante masse . . . . .	109
6.7.1	Eksempel: Elektron-positron-sammenstød . . . . .	110
6.7.2	Eksempel: Observation af Higgs-bosonen ved LHC . . . . .	112
6.7.3	Tærskelenergien . . . . .	112
6.8	Bindingsenergien . . . . .	114
6.8.1	Eksempel: Brintatomets bindingsenergi . . . . .	115
6.8.2	Eksempel: Deuteronens bindingsenergi . . . . .	115
6.8.3	Eksempel: Solens og stjerners energiproduktion . . . . .	116
6.9	Reaktionsenergien . . . . .	116
6.9.1	Eksempel: Neutron-henfald . . . . .	116
6.10	Fire-kraften og tre-kraften . . . . .	117
6.10.1	Transformationsregler for kraften . . . . .	118
6.11	Den relativistiske bevægelsesligning . . . . .	119
6.11.1	Cyklotronbevægelsen . . . . .	119
6.11.2	Hyperbolsk bevægelse . . . . .	120
6.11.3	Eksempel: Muon-acceleratoren . . . . .	122
	Opsummering af Kapitel 6 . . . . .	124
	Gennemregnede eksempler til Kapitel 6 . . . . .	125
	Opgaver til Kapitel 6 . . . . .	129
<b>A</b>	<b>Invariant? Bevaret? Konstant?</b>	<b>137</b>

*Indhold*

---

<b>B Rækkeudvikling i relativitetsteorien</b>	<b>139</b>
<b>C Løsninger til opgaver</b>	<b>141</b>

# 1 Fra det Newtonske til det specielle relativitetsprincip

## 1.1 Relativitet

Kernen i Einsteins specielle relativitetsteori fra 1905 er, at den, sammen med hans generelle relativitetsteori fra 1915, grundlægger den moderne fysiks teorier for rum og tid. Dette indebærer en afløsning af de Newtonske begreber *absolut rum* og *absolut tid*.

Idet samtlige fysiske processer udfolder sig i rum og tid, må fysikkens love til enhver tid være i overensstemmelse med de rådende teorier for disse grundlæggende begreber. Såfremt man således udskifter teorierne for rum og tid, må man nødvendigvis tilpasse de fysiske love i overensstemmelse hermed. Denne proces gav ophav til udviklingen af den "relativistiske fysik", som har medført bemærkelsesværdige forudsigelser (såsom at masse og energi er ækvivalente størrelser), men som ikke desto mindre i overvældende grad er blevet bekræftet eksperimentelt.

I fysikken henviste ordet *relativitet* oprindeligt til opgivelsen af begrebet *absolut rum*, som havde været et efterstræbt mål lige siden Newtons dage. For skønt den klassiske mekanik i sig selv ikke tillader påvisning af "absolut hvile" og derfor advokerer et relativt rumbegreb, hævdede Newton eksistensen af et særligt absolut rum som den primære scene for sin mekanik. Efter fremkomsten af Maxwells teori for elektromagnetismen forklaredes lyset i slutningen af det 19. århundrede som en udbredelse af bølger i den iøvrigt uagttagelige *æter*. Det var da muligt at definere et *absolut rum*; nemlig det, der var i hvile i forhold til æteren. Med fremsættelsen af det *specielle relativitetsprincip*, som omfatter alle fysiske fænomener overhovedet, gjorde Einstein i 1905 endegyldigt op med ideen om et absolut rum. Som et overraskende men uundgåeligt biprodukt ledte princippet samtidigt til, at man måtte opgive det for den Newtonske teori grundlæggende begreb *absolut tid*.

## 1.2 Newtons bevægelseslove og inertialsystemer

Grundlæggende for den klassiske mekanik er Newtons tre bevægelseslove, af hvilke den første (inertiens lov) kan opfattes som et specialtilfælde af den anden:

**Newtons 1. lov:** Et legeme, som ikke påvirkes af nogen kraft, bevæger sig med konstant hastighed

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{konstant}, \quad (1.1)$$

hvor  $\vec{r}$  er legemets stedvektor.

**Newtons 2. lov:** Et legemes acceleration,  $\vec{a} = d\vec{u}/dt$ , er proportional med kraften,  $\vec{F}$ , der virker på legemet,

$$\boxed{\vec{F} = m \frac{d\vec{u}}{dt}}, \quad (1.2)$$

hvor proportionalitetskonstanten  $m$  er legemets inertielle masse.

**Newtons 3. lov:** Hvis et legeme A påvirker et legeme B med en kraft  $\vec{F}_{AB}$ , så vil B påvirke A med kraften  $\vec{F}_{BA}$ , som er modsatrettet og af samme styrke:

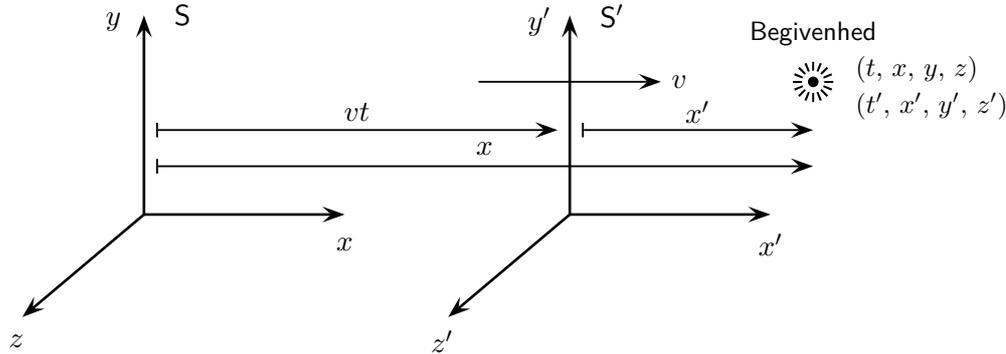
$$\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}. \quad (1.3)$$

Ved anvendelsen af fysiske lovmæssigheder fastlægger man oftest et koordinatsystem, i forhold til hvilket man kan bestemme fysiske størrelser så som position, hastighed, elektrisk felt, etc. Da man ikke kan måle en partikels stedvektor i forhold til et abstrakt matematisk punkt, men kun dens afstand fra et eller flere materielle legemer, kan et koordinatsystem kun fastlægges ved at referere til et eller andet materielt objekt. Et sådant stift referencelegeme og dens logiske udvidelse kaldes i fysikken et *referencesystem*. Som et eksempel definerer Jorden et referencesystem i hele Universet. Til ethvert referencesystem kan vi knytte et retvinklet koordinatsystem på mange måder ved at vælge tre indbyrdes ortogonale planer og måle et punkts koordinater  $x, y, z$  som afstandene til disse planer. Dette forudsætter selvsagt at rummets geometri er Euklidisk<sup>1</sup> – en antagelse, som regnedes for indlysende indtil fremkomsten af den generelle relativitetsteori i 1915! Yderligere må tiden,  $t$ , være defineret i hele rummet, idet den indgår i de fysiske love. I den Newtonske teori, hvor tidens gang er nøje sammenknyttet med den første lov (frie partikler tilbagelægger lige store afstande i lige lange tidsrum) er tiden absolut og tikker af sted med samme rate overalt i Universet. Kun valget af enheder og nulpunkt kan vælges frit fra referencesystem til referencesystem.

Et referencesystem, i hvilket Newtons først lov gælder, kaldes et *inertialsystem*. Sådanne systemer foretrækkes ofte, idet, som det vil fremgå af det følgende, alle Newtons love heri har gyldighed.

I praksis er det vanskeligt at finde perfekte inertialsystemer i vores verden. Hvis vi f.eks. placerer et referencesystem på Jorden, må vi tage Jordens rotation i betragtning. Referencesystemet roterer altså og er dermed ikke noget inertialsystem. I sådanne ikke-inertielle referencesystemer vil frie partikler udføre accelererede bevægelser. I den

<sup>1</sup> En Euklidisk geometri er essentielt en geometri hvori den Pythagoræiske læresætning gælder. I et 2-dimensionalt plan er længden  $\Delta r$  af et vilkårligt linje-segment dermed givet ved  $(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ , hvor  $\Delta x$  og  $\Delta y$  er koordinatdifferencerne i et vilkårligt retvinklet koordinatsystem i planet. Dette er sandt for flade overflader (f.eks. stuegulvet) men ikke for krumme overflader (f.eks. overfladen på en ballon). I det 3-dimensionale rum gælder tilsvarende sammenhængen  $(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$  i det Euklidiske tilfælde. Modsætningen hertil er et "krumt" rum, hvori denne sammenhæng er brudt, og hvor man i analogi til det 2-dimensionale tilfælde må (forsøge at) forestille sig, at rummet krummer i en ny, fjerde dimension.



**Figur 1.1:** En begivenhed betragtes fra to referencesystemer, S og S', i standardkonfigurationen.

Newtonske dynamik siges den accelererede bevægelse af frie partikler i et roterende referencesystem at være forårsaget af centrifugalkraften og Coriolis-kraften. Sådanne kræfter, som forsvinder ved transformation til et inertialsystem, kaldes fiktive kræfter. Vi vil i det følgende se bort fra sådanne komplikationer og antage, at perfekte inertialsystemer eksisterer.

### 1.3 Galilei-transformationenen

Når man beskæftiger sig med relativitetsteorien, er det vigtigt at anvende en meget præcis sprogbrug for at undgå misforståelser og fejl. Grundlæggende for en præcis beskrivelse af fysiske fænomener er begrebet en *begivenhed*. En begivenhed er en øjeblikkelig hændelse, som sker i et bestemt punkt i rummet. En eksploderende kineser, et enkelt glimt af en lille pære eller sammenstødet mellem to punktformede partikler er gode tilnærmelser til begivenheder, idet hver af disse sker til et bestemt tidspunkt i et bestemt punkt i rummet. En begivenhed er således karakteriseret ved et sæt af fire tal  $(t, x, y, z)$ , af hvilke det første definerer et tidspunkt  $t$ , mens de øvrige tre definerer et punkt  $(x, y, z)$  i rummet.

begivenhed

Lad os betragte to referencesystemer S og S', som bevæger sig med en jævn, retlinjet hastighed  $v$  i forhold til hinanden. Der benyttes identiske enheder for længde og tid i de to systemer. De to koordinatsystemer orienteres således i forhold til deres indbyrdes bevægelse, at begyndelsespunktet i S' bevæger sig langs den positive  $x$ -akse i S; at  $x$ - og  $x'$ -akserne er sammenfaldende; og at  $y$ - og  $y'$ -akserne og dermed ligeledes  $z$ - og  $z'$ -akserne til stadighed er parallelle. Yderligere nulstilles urene, således at  $t = t' = 0$ , idet de to systemer er sammenfaldende. To systemer indrettet på denne måde siges at være i *standardkonfiguration* (Figur 1.1).

standardkonfiguration

Antager vi nu, at en *begivenhed* har koordinaterne  $(t, x, y, z)$  i S og  $(t', x', y', z')$  i S', så er det klassiske (og intuitive) forhold mellem disse to koordinatsæt givet ved

Galilei-transformationen

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned}} \quad (1.4)$$

hvor  $v$  er hastigheden af  $S'$  i forhold til  $S$ . Rigtigheden af dette indses umiddelbart ved at betragte Figur 1.1, idet afstanden mellem de to begyndelsespunkter er  $vt$ . Det ses, at antagelsen om absolut tid er indeholdt i Galilei-transformationen: Tiden i de to systemer er identisk uafhængigt af disses indbyrdes bevægelse.

Ved at differentiere venstresiderne af (1.4) med hensyn til  $t'$  og højresiderne med hensyn til  $t$  får vi umiddelbart de klassiske hastighedstransformationer, som sammenknytter hastighedskomponenterne for en partikel i bevægelse i  $S$  med dem i  $S'$

$$\boxed{\begin{aligned} u'_x &= u_x - v, \\ u'_y &= u_y, \\ u'_z &= u_z, \end{aligned}} \quad (1.5)$$

hvor  $(u_x, u_y, u_z) = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$  og  $(u'_x, u'_y, u'_z) = (dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt')$ . Sammensætning af parallelle hastigheder foregår altså ved simple addition: Hvis man f.eks. går fremad i et tog med 5 km/t ( $u'_x$ ), og toget kører 80 km/t ( $v$ ), vil man bevæge sig med 85 km/t ( $u_x$ ) i forhold til banelegemet. I den specielle relativitetsteori vil dette ikke længere være tilfældet.

Ved at differentiere endnu engang, fås transformationsreglerne for accelerationen

$$\boxed{\begin{aligned} a'_x &= a_x, \\ a'_y &= a_y, \\ a'_z &= a_z, \end{aligned}} \quad (1.6)$$

hvor  $a'_x = du'_x/dt'$  etc. Accelerationen er altså den samme i de to systemer: Vi siger, at accelerationen er *invariant* over for Galilei-transformationen.

Ved benyttelse af vektor-notation tager de ovennævnte sammenhænge den mere koncise form

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}t, \\ \vec{u}' &= \vec{u} - \vec{v}, \\ \vec{a}' &= \vec{a}, \end{aligned}} \quad (1.7)$$

hvor  $\vec{r}$ ,  $\vec{u}$  og  $\vec{a}$  er henholdsvis positions-, hastigheds- og accelerations-vektorene i  $S$ , de mærkede symboler er de tilsvarende størrelser i  $S'$ , og  $\vec{v}$  er hastigheden af  $S'$  relativ til  $S$ .

**Indskud 1.1 Invariant og invarians**

En invariant er noget, der er uændret under en transformation. Egenskaben at være en invariant kaldes invarians. Se Appendiks A for en mere omfattende diskussion af begrebet invarians i den specielle relativitetsteori.

**1.4 Det Newtonske relativitetsprincip**

Vi har set, at et inertialsystem er et referencesystem, i hvilket inertiens lov gælder. Antag nu, at systemet  $S$  på Figur 1.1 er et inertialsystem, således at alle frie partikler heri bevæger sig jævnt og retlinjet. Idet, ifølge (1.5), konstante hastigheder i  $S$  transformerer over i konstante hastigheder i  $S'$ , indser vi, at alle frie partikler ligeledes vil bevæge sig jævnt og retlinjet i  $S'$ , som derfor også vil være et inertialsystem. Modsat indser vi, at *kun* systemer der bevæger sig jævnt og retlinjet i forhold til  $S$  kan være inertialsystemer. Thi alle faste punkter i ethvert inertialsystem er potentielt frie partikler og må derfor bevæge sig jævnt og retlinjet i forhold til  $S$ . Og alle punkter i et givet referencesystem må åbenbart bevæge sig med samme hastighed i forhold til  $S$ , idet systemet ellers ikke kan være stift. Gruppen af alle inertialsystemer består altså af samtlige referencesystemer, der bevæger sig jævnt og retlinjet i forhold til et givet inertialsystem, f.eks. det absolutte rum, skulle et sådant eksistere.

Fra invariansen af accelerationen, (1.7)(iii), ser vi, at alt vi behøver for at Newtons love skal være invariante mellem inertialsystemer er aksiomer, som udsiger, at (i) massen er invariant,  $m' = m$ , og at (ii) enhver kraft er invariant,  $\vec{F}' = \vec{F}$ . Begge disse antagelser er indeholdt i Newtons teorier. Den resulterende egenskab ved den Newtonske mekanik, at den er gyldig i ethvert inertialsystem, kaldes *det Newtonske* (eller *den klassiske mekaniks*) *relativitetsprincip*. Den kan sammenfattes på følgende måde:

Det er ikke muligt på grundlag af *mekaniske* fænomener at skelne mellem inertialsystemer eller at udpege et særligt udmærket inertialsystem.

Det Newtonske relativitetsprincip

Newton var, som Galilei før ham, dybt imponeret over dette resultat. Den klassiske mekaniks relativitetsprincip er selvfølgelig en forudsætning for, at vi kan anvende Newtons love på fysiske fænomener i vor dagligdag, selvom Jorden bevæger sig med stor hastighed gennem rummet. Galilei havde observeret det mere beskedne forhold, at på et skib udfolder alle mekaniske fænomener sig på samme måde uafhængig af, om skibet er i hvile, eller om det bevæger sig med jævn hastighed gennem stille vand. I dag har vi personlige erfaringer med denne lighed, hver gang vi f.eks. foretager en tog- eller flyrejse. Omvendt tjener nu selvfølgelig enhver manifestation af det Newtonske relativitetsprincip til styrkelsen af den antagede invarians af masse og kraft, på hvilken den bygger.

Det store spørgsmål er nu, hvorvidt relativiteten af den Newtonske mekanik er et simpelt lykketræf, eller om den afspejler en dyb sandhed om Naturen. Hvis det sidste er tilfældet, er det sandsynligt, at et udvidet relativitetsprincip vil være gældende på områder udover mekanikken.

## 1.5 Æteren

Vi skal nu se på, hvorvidt, og i givet fald hvordan, man kunne tænke sig blandt alle inertialsystemer at udpege et særligt, som tilsvarende det absolutte rum. Det synes, at have været Descartes (1596–1650), som først indførte ideen om en allestedsnærværende *æter*, som udbredelsesmedium for ellers uforklarlige vekselvirkninger. Legemer, som er i indbyrdes fysisk kontakt, kan skubbe til hinanden, men det krævede en æter at formidle kraften mellem en magnet og sømmet den tiltrækker, eller mellem Månen og tidevandene. En generation senere legede Newton med ideen om en æter til at forklare tyngdekraften. For Newtons samtids, så som Hooke og Huygens, var æterens vigtigste rolle at være bærer af lysbølger. De forestillede sig lyset som svingninger i en elastisk *lysæter*, på samme måde som lydbølger er svingninger i luften. Lysæteren udviklede sig til at være en hovedhjørnesten i den elektromagnetiske teori, som den udvikledes af Maxwell (1831–1879), og blev et sandsynligt pejlemærke for det absolutte rum.

I Maxwells elektromagnetiske teori optræder en konstant,  $c$ , med enheder som en hastighed. Denne konstant var oprindeligt defineret ved forholdet mellem den elektrostatiske og den elektrodynamiske enhedsladning og kan bestemmes gennem simple laboratorieforsøg, som involverer ladninger og strømme. Yderligere forudsagde teorien, at ændringer i det elektromagnetiske felt i vakuum udbreder sig med denne hastighed  $c$ . Den forudsagde med andre ord eksistensen af elektromagnetiske bølger. Det overraskende var, at hastigheden  $c$  var præcist sammenfaldende med den kendte lyshastighed. Dette fik Maxwell til at formode, at lys måtte være elektromagnetiske bølger. Som bærer for sådanne bølger genoplivede Maxwell den gamle æterteori, og  $c$  tolkedes herefter som udbredelseshastigheden af elektromagnetiske bølger *i forhold til æteren*. Det var da muligt at definere et særligt *absolut* inertialsystem, nemlig det, der var i hvile i forhold til æteren, og dette system identificerede man derfor med Newtons absolutte rum. Det absolutte rum skulle som følge heraf kunne udpeges gennem studiet af elektromagnetiske fænomener, altså først og fremmest gennem studiet af lys.

elektromagnetiske  
bølger

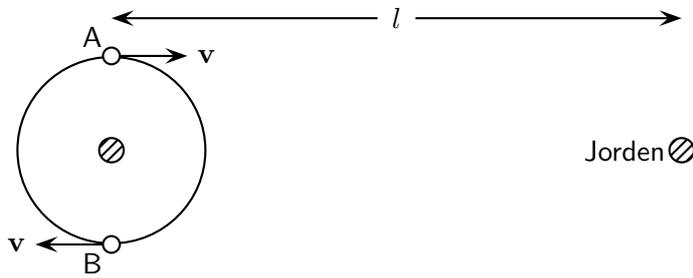
### **Indskud 1.2 Lysets tøyen**

Den første måling af lysets hastighed foretoges af Ole Rømer (1644–1710) i 1676, idet han viste, at visse uregelmæssigheder ved Jupiters månens formørkelser kun kunne forklares ud fra en endelig lyshastighed. Disse formørkelser kunne indtræffe op til 16 minutter senere end det beregnede tidspunkt, svarende til at lyset gennemløber jordbanediameteren  $3 \times 10^8$  km. Dette giver den tilnærmede værdi for lysets hastighed

$$c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

### **Indskud 1.3 Emissionsteorien**

Om lysets fysiske natur havde der i det 17. århundrede udviklet sig to forskellige forestillinger: i) *ondulationsteorien*, hvor lyset opfattes som bølger, og ii) *emissionsteorien*, hvor lyset opfattes som småpartikler udsendt af lyskilden. Efter fremkomsten af Maxwells elektromagnetisme blev *ondulationsteorien* totalt dominerende i den sidste del af det 19. århundrede. Lad os alligevel et øjeblik betragte *emissionsteorien*.



Figur 1.2: En dobbeltstjerne i afstanden  $l$  fra Jorden

Idet lyset altså opfattes som småpartikler udsendt af kilden, må det have en konstant hastighed  $|\vec{c}|$  i forhold til kilden i enhver retning. Bevæges lyskilden med hastigheden  $\vec{v}$  i forhold til iagttageren, må denne da vente at finde lyshastigheden  $\vec{c} + \vec{v}$ . Forudsætningen herfor er, at lyshastigheden følger loven om simpel vektoraddition, ligesom tilfældet er med hastigheder af materielle partikler ifølge Galilei-transformationen.

Herved fører emissionsteorien til modstrid med erfaringerne, hvilket bl.a. påvistes på simpel måde i 1913 af den hollandske astronom de Sitter (1872–1934). Han betragtede et dobbeltstjernesystem bestående af en mørk centralstjerne i hvile i afstanden  $l$  fra Jorden, og en lysende ledsagerstjerne, der bevæger sig i en cirkulær bane omkring centralstjernen med hastigheden  $v$  og omløbstiden  $T$ . Denne omløbstid kan bestemmes direkte ved observation. På Figur 1.2 er ledsagerstjernen vist i to yderstillinger A og B, i hvilke den bevæger sig henholdsvis hen imod og bort fra Jorden. Lad ledsageren passere A til tiden nul. Det udsendte lys vil her have hastigheden  $c + v$  i retningen mod Jorden og nå denne efter et tidsrum bestemt ved

$$t_1 = \frac{l}{c + v}.$$

Lyset fra positionen B når derimod Jorden til tiden

$$t_2 = \frac{T}{2} + \frac{l}{c - v}.$$

Når stjernen er vendt tilbage til A efter et helt omløb, udsender den lys, som når Jorden til tiden

$$t_3 = T + \frac{l}{c + v}.$$

Herefter skulle vi vente, at de to halvdele af banen gennemløbes i forskellig tid set fra Jorden, nemlig

$$\text{AB i tiden} \quad \tau_1 = \left( \frac{T}{2} + \frac{l}{c - v} \right) - \frac{l}{c + v} = \frac{T}{2} + \frac{2vl}{c^2 - v^2}$$

$$\text{BA i tiden} \quad \tau_2 = \left( T + \frac{l}{c + v} \right) - \left( \frac{T}{2} + \frac{l}{c - v} \right) = \frac{T}{2} - \frac{2vl}{c^2 - v^2}$$

Dette er i modstrid med observationerne, efter hvilke ledsageren bruger samme tid til at gå fra den ene yderstilling til den anden uafhængigt af retningen. Ydermere skulle forskellen mellem de to tidsrum

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{4vl}{c^2 - v^2} \quad (1.8)$$

kunne antage værdier, der er større end omløbstiden selv. Dobbeltstjernen  $\beta$  Aurigae har således  $T = 4$  døgn,  $v = 100$  km/s og  $l = 2 \times 10^{15}$  km, hvilket fører til  $\tau_1 - \tau_2 \simeq 100$  døgn. Dermed skulle der være vendt helt op og ned på begivenhedernes rækkefølge, når de iagttages fra Jorden. Sådanne effekter er aldrig konstateret, hvorfor hypotesen om en konstant lyshastighed i forhold til lyskilden måtte opgives.

## 1.6 Michelson-Morley-forsøget

Med baggrund i Maxwell-teoriernes store succes fra omkring 1860 blev æteren som sådan et centralt emne for studie og debat i slutningen af det 19. århundrede. Der var således en betydelig interesse i at observere æterens tilstedeværelse gennem direkte målinger. I særdeleshed søgte man at fastlægge hastigheden af Jordens bevægelse gennem æteren, ved at måle "æter-vinden" gennem laboratoriet. Princippet i disse forsøg var, at lysets hastighed ville være forskellig, eftersom en lysstråle bevægede sig med eller mod Jordens bevægelse i forhold til æteren. Da Jordens hastighed i sin bane omkring Solen er omtrent 30 km/s, skulle man forvente, at dens hastighed i forhold til æteren på et eller andet tidspunkt i løbet af året *mindst* ville være af denne størrelse uafhængig af æterens bevægelse i forhold til Solsystemet. Idet Jordens banehastighed altså tilsvarende 1/10.000 af lyshastigheden, kunne effekten antages at være så lille, at den på daværende tidspunkt kun kunne påvises med fintmærkende interferometerforsøg.

### Indskud 1.4 Interferometerforsøg

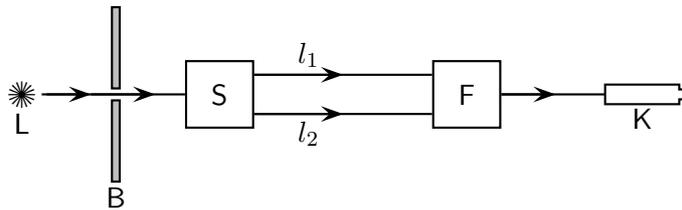
Princippet for et interferometer fremgår af Figur 1.3, hvor  $L$  betegner en lyskilde, som udsender monokromatisk lys med frekvens  $\nu$  og bølgelængde  $\lambda$ . Efter at have passeret blændeåbningen  $B$  rammer lysstrålen den med  $S$  betegnede del af instrumentet, i hvilken den – f.eks. ved et arrangement af spejle, prismer eller linser – spaltes i to adskilte stråler, af hvilke den ene i løbet af tiden  $t_1$  gennemløber vejen  $l_1$ , mens den anden i tiden  $t_2$  gennemløber vejen  $l_2$ . Derefter forenes de atter ved hjælp af et passende optisk arrangement  $F$ , hvorefter de sammen passerer ind i kikkerten  $K$ .

På strækningen  $l_1$  vil der befinde sig  $\nu t_1$  lysbølger, mens der på strækningen  $l_2$  vil befinde sig  $\nu t_2$  bølger. Forskellen mellem de to bølgetal er altså

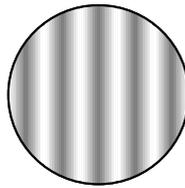
$$\Delta n = \nu(t_1 - t_2). \quad (1.9)$$

Såfremt de to lystider er forskellige, vil de to stråler derfor have en faseforskel, når de atter mødes. Denne faseforskel betinger, hvad man ser i kikkerten.

Er  $\Delta n$  et helt tal  $p$ , vil de forenede stråler forstærke hinanden, således at vi måtte vente at se hele kikkertens synsfelt belyst. Er  $\Delta n$  derimod at formen  $(p + \frac{1}{2})$  vil de to



**Figur 1.3:** Principskitse af et interferometer

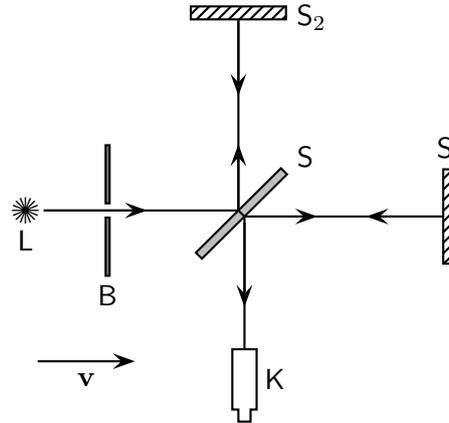


**Figur 1.4:** Interferensstriber

stråler svække hinanden, og har de samme intensitet, vil de udslukke hinanden, således at vi skulle vente at se hele kikkertens synsfelt formørket. I praksis forhindrer instrumenternes uundgåelige optiske ufuldkommenheder dette, således at kikkertens synsfelt i begge tilfælde tager sig ud som vist på Figur 1.4. Hvor der er lyse striber, har de to stråler forstærket hinanden, mens de mørke striber fremkommer, hvor de to stråler har svækket hinanden.

Lad os nu tænke os, at vi mellem  $S$  og  $F$  foretager en ændring af en af lysvejene, idet vi f.eks. opvarmer luften på strækningen  $l_1$  og dermed ændrer dens brydningsforhold og altså også lyshastigheden. Dermed vil  $t_1$  ændre sig og derfor også  $\Delta n$ . Dette vil medføre en ændret beliggenhed af de lyse og mørke striber. Foretages ændringen af  $l_1$  gradvist, vil man se, at striberne tilsyneladende vandrer hen over synsfeltet. Vandrer en mørk stribe hen, hvor der før umiddelbart ved siden af var en lys, kan vi slutte, at  $\Delta n$  er ændret med  $\frac{1}{2}$ , og derfor også at lysvejen  $l_1$  i optisk henseende er ændret med  $\frac{1}{2}\lambda$ . På denne måde afslører interferometeret ganske små ændringer i den optiske vejforskel langs de to strækninger mellem  $S$  og  $F$ .

Det kendteste forsøg på at eftervise æter-vinden blev udført af Michelson og Morley i 1887, hvor de forsøgte at måle forskellen mellem lyshastighederne i to ortogonale retninger. Princippet i Michelson-Morley-forsøgets interferometer fremgår af Figur 1.5, hvor  $L$  er en monokromatiske lyskilde. Strålen rammer først spejlet  $S$  under en vinkel på  $45^\circ$ . Dette spejl er halvforsølvbet, således at strålen spaltes i to lige stærke delstråler. Den ene af disse passerer (med en ringe parallelforskydning) gennem  $S$  og rammer spejlet  $S_1$ , som reflekterer alt lyset tilbage til  $S$ . Den anden delstråle kastes af  $S$  hen til spejlet  $S_2$ , hvorfra den reflekteres tilbage til  $S$ . Her forenes de to delstråler, inden de træder ind i kikkerten  $K$ , hvor man iagttager et system af interferensstriber.



Figur 1.5: Michelson-Morley-forsøget.

Vi vil nu beregne de tidsrum, lyset bruger til at gennemløbe de to strækninger  $SS_1S$  og  $SS_2S$ , på hvilke strålerne er adskilte. Vi tænker os først apparatet opstillet, således at retningen  $SS_1$  er parallel med Jordens hastighed  $v$  gennem æteren. På strækningen  $SS_1$  vil lyshastigheden i forhold til instrumentet da være  $c - v$ , mens den på strækningen  $S_1S$  vil være  $c + v$ . For den samlede lystid har vi da

$$T_1 = \frac{L_1}{c - v} + \frac{L_1}{c + v} = \frac{2L_1c}{c^2 - v^2}, \quad (1.10)$$

hvor  $L_1$  er længden af  $SS_1$ . På strækningen  $SS_2S$  må lystiden bestemmes, idet vi tager hensyn til bevægelsen af instrumentet i forhold til æteren. I laboratoriesystemet er denne bevægelse vinkelret på lysstrålens retning, og ved at betragte den retvinklede trekant på Figur 1.6 ser vi, at lysets hastighed i forhold til instrumentet er  $\sqrt{c^2 - v^2}$ . Det samme vil være tilfældet på nedturen, hvorfor den samlede lystid er

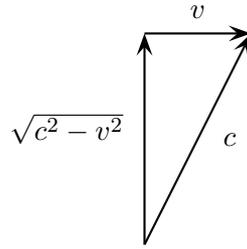
$$T_2 = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad (1.11)$$

hvor  $L_2$  er længden af  $SS_2$ . For forskellen i lystider mellem de to stråler finder vi da

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{2L_1c}{c^2 - v^2} - \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (1.12)$$

Idet instrumentet er indrettet således, at de to arme er lige lange, altså  $L \equiv L_1 = L_2$ , får vi for  $v \ll c$  det tilnærmede udtryk

$$\Delta T = \frac{2L}{c} \left[ 1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots - 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right] \simeq \frac{L}{c} \frac{v^2}{c^2},$$



**Figur 1.6:** Lysudbredelsen i retningen vinkelret på ætervinden i Michelson-Morley-forsøget.

idet vi har rækkeudviklet<sup>2</sup> i den lille størrelse  $v^2/c^2$ . Vi indfører nu bølgelængden  $\lambda = c/\nu$  og finder ved anvendelse af (1.9) bølgetalsforskellen mellem de to stråler

$$\Delta n = \frac{L v^2}{\lambda c^2}. \quad (1.13)$$

Idet instrumentet havde  $L = 11$  m og anvendte lys med bølgelængden  $\lambda = 500$  nm =  $500 \times 10^{-9}$  m, finder vi heraf ved at benytte Jordens banehastighed  $v = 30$  km/s

$$\Delta n \simeq 0.2.$$

Dette oversteg langt instrumentets følsomhed, som var omkring en størrelsesorden mindre.

Forsøget udførtes nu først således, at man iagttog interferensstriberne, mens hele instrumentet drejedes  $90^\circ$ , hvorved dets to arme  $SS_1$  og  $SS_2$  bytter roller. I den nye stilling skulle vi således få den samme forskel med modsat fortegn, hvorfor ændringen skulle være dobbelt så stor. Imidlertid iagttog man ikke nogen sådan ændring. Derefter foretoges et andet eksperiment, idet man gennem et halvt år iagttog stribernes beliggenhed i det fast opstillede eksperiment. I løbet af denne tid forventede man, at Jorden i sin bane omkring Solen ville skifte bevægelsesretning i forhold til æteren, hvilket igen skulle give en ændret forskel i bølgetal. Heller ikke i dette tilfælde iagttog man nogen effekt.

Den mest åbenbare tolkning af Michelson-Morley-eksperimentet var, at Jorden ikke bevægede sig i forhold til æteren, eller med andre ord, at denne tog del i Jordens bevægelse ligesom atmosfæren. Dette ville naturligvis forklare, at der ikke fremkom nogen effekt ved anvendelsen af lyskilder på Jorden. Derimod opstod der vanskeligheder med fjerne lyskilder, så som fiksstjernerne, idet man ikke kunne tænke sig at Jorden under sin bevægelse medførte æteren overalt i verdensrummet. Man ville derfor ikke kunne forklare lysets aberration (se Afsnit 4.2).

Den elektromagnetiske teori var derfor efterladt med et paradoks: Lysets gennemsnitlige hastighed for en frem-og-tilbage-rejse var uafhængig af ætervinden. (Moderne

<sup>2</sup> For rækkeudvikling i relativitetsteorien, se Appendiks B.

laser-baserede forsøg har bekræftet dette udfald til en præcision af  $10^{-15}$ .) Konklusionen af Michelson-Morley-forsøget overgås langt af, hvad vi ved i dag, nemlig at *envejs*-hastigheden af lyset til enhver tid er uafhængig af enhver form for ætervind. Dette demonstreres på fornemste vis ved hjælp af systemet *Den Internationale Atomtid*, TAI (Temps Atomique International). TAI bestemmes ved hjælp af et stort antal Cæsium-133-baserede atom-ure, som er placeret i forskellige nationale laboratorier Jorden rundt. Urenes visning sammenlignes fortløbende ved hjælp af udvekslede radiosignaler (elektromagnetisk stråling, som kun adskiller sig fra lys ved at have en lavere frekvens). Enhver påvirkning af disse radiosignaler fra en ætervind af den forventede størrelse ville hurtigt opdages ved hjælp af disse super-præcise ure. Ingen påvirkning er blevet påvist: Sommer som vinter, nat som dag, signalerne fra ét ur til et andet ankommer altid med den samme forsinkelse. Et andet eksempel er den utrolige præcision som opnås med moderne satellit-baserede navigationssystemer så som GPS (Global Positioning System). Disse systemer står og falder med, at lysets hastighed er retningsuafhængig og dermed uafhængig af enhver ætervind.

## 1.7 Lorentz's æterteori

Et forsøg på at forklare den udeblevne observation af ætervinden fremsattes i 1889 af Fitzgerald (1851–1901) og få år senere af Lorentz (1853–1928). Det gik ud på, at når et legeme bevæges igennem æteren med hastigheden  $v$  så forkortes dets længde i bevægelsesretningen med faktoren  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Dette giver en eksakt annullering af effekten af ætervinden i Michelson-Morley-forsøget, hvilket indses ved at sætte  $L_1 = L_2\sqrt{1 - v^2/c^2}$  i (1.12). Lorentz var i en vis grad i stand til at retfærdiggøre en sådan forkortning, idet han henviste til stoffets elektromagnetiske opbygning og til den kendte kontraktion af det elektromagnetiske felt fra en ladning i bevægelse.

Hvad denne hypotese ikke afstedkommer, er at gøre lysets hastighed uafhængig af ætervinden, og den er derfor i modstrid med moderne forsøg, der viser, at lysets *envejs*-hastighed er retningsuafhængig.

## 1.8 Det specielle relativitetsprincip

Einsteins forklaring på ætervinds-paradokset var mere drastisk. Med henvisning til den klassiske mekaniks relativitetsprincip, ifølge hvilket alle inertialsystemer er ligeværdige for udførelsen af mekaniske eksperimenter, fremsatte han for første gang i afhandlingen *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* fra 1905 sit berømte *specielle relativitetsprincip*, hvis første postulat lyder

Einsteins første  
postulat

Alle inertialsystemer er ligeværdige for udførelsen af alle fysiske eksperimenter.
--

Ifølge Einstein findes der altså ingen æter, ligesom der ikke findes noget absolut rum. Alle inertialsystemer er fuldstændigt ligeværdige, idet samtlige fysiske love gælder uforandret i dem alle. I særdeleshed gælder de samme elektromagnetiske og optiske love i

alle inertialsystemer. Denne sidste konstatering næsten påtvinger os endnu en hypotese, som Einstein da også antog som sit andet postulat:

Einsteins andet  
postulat

I det tomme rum udbreder lyset sig retlinjet med hastigheden  $c$  i enhver retning i ethvert inertialsystem.

Einstein var selvfølgelig klar over, at hans andet postulat var i voldsom modstrid med Galilei-transformationen og dermed vore klassiske ideer om rum og tid: Lige meget hvor hurtigt man forsøger at forfølge en lysstråle (ved at forflytte sig til stadigt hurtigere inertialsystemer), vil man bestandig se lysstrålen fjerne sig med hastigheden  $c$ . Einsteins store bedrift var, at han var i stand til at finde en ny struktur for rum og tid, som på en naturlig og elegant måde imødekommer begge postulater. Dette krævede en udskiftning af Galilei-transformationen som den grundlæggende forbindelse mellem inertialsystemer. Den nye transformation – Lorentz-transformationen – lader i det store hele rum og tid ved det velkendte inden for det enkelte inertialsystem, men ændrer måden hvorpå en iagttager i ét inertialsystem opfatter andre inertialsystemer. Frem for alt krævede det indførelsen af begrebet *relativ* tid, som igen ikke adskiller sig fra den gamle (absolutte) tid i det enkelte inertialsystem, men som er forskellig fra system til system.

Med Einsteins to postulater forklares naturligvis Michelson-Morley-forsøget. Thi når vi i (1.10) og (1.11) erstatter de tre antagne lyshastigheder  $c + v$ ,  $c - v$  og  $\sqrt{c^2 - v^2}$  med én og samme hastighed  $c$ , bliver differencen (1.12) trivielt lig nul. På tilsvarende måde forklaredes det negative udfald af alle forsøg til påvisning ætervinden, og disse tjente nu omvendt som empirisk underbygning af Einsteins postulater.

I løbet af kort tid formuleredes nu en komplet teori baseret på Einsteins to postulater. Denne teori – *den specielle relativitetsteori* – havde som program at ændre alle fysikkens love, hvor det var nødvendigt, for at gøre dem invariante over for Lorentz-transformationen og dermed gyldige i alle inertialsystemer. Thi Einsteins relativitetsprincip er i virkeligheden et *metaprinzip*: Det udlægger regler for *formen* af *alle* fysikkens love. Ændringerne, som teorien afstedkom, har, skønt af stor betydning i mange moderne anvendelser, forsvindende betydning for de fleste klassiske problemer. Dette er da også årsagen til, at de ikke var blevet opdaget tidligere.

I dag, et århundrede senere, har den specielle relativitetsteoris enorme succes gjort det umuligt at betvivle gyldigheden af dens grundlæggende præmisser. Dens betydning for den moderne fysik har været overvældende. Den har således bl.a. ført til en ny teori for rum og tid, hvor de to blander sig indbyrdes og danner *rumtiden*; til eksistensen af en maksimal hastighed for alle partikler og signaler; til en ny mekanik, hvor trægheden vokser med hastigheden; til erkendelsen af, at masse og energi er ækvivalente størrelser; til en simpel og succesrig makroskopisk elektrodynamik for legemer i bevægelse; til en ny termodynamik; til en kinetisk gasteori omfattende fotoner såvel som partikler; til de Broglies tilknytning af bølgenatur til partikler; til Sommerfelds finstruktur i de atomare spektre; til Diracs partikel-antipartikel symmetri; til Paulis forklaring af sammenhængen mellem spin og statistik; og den har banet vejen for den generelle relativitetsteori og kosmologien.

## Opsummering af Kapitel 1

- i) I den klassiske mekanik er transformationen mellem inertialsystemer (i standard-konfiguration, se Figur 1.1) givet ved Galilei-transformationen

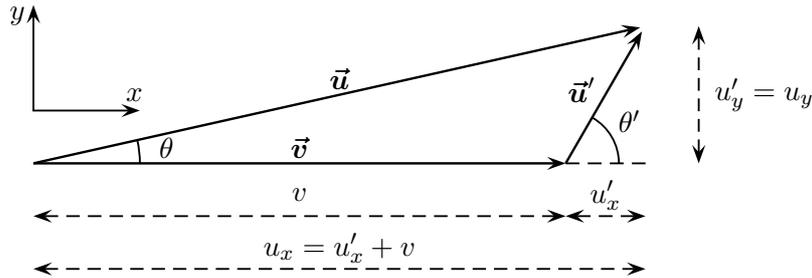
$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Transformationen indeholder antagelser om absolut tid ( $t = t'$ ) og om, at hastigheder adderes som vektorer.

- ii) Galilei-transformationen leder til det Newtonske relativitetsprincip, som siger, at alle inertialsystemer er ligeværdige for udførelsen af alle *mekaniske* eksperimenter.
- iii) Det specielle relativitetsprincip udgør en dramatisk udvidelse af det Newtonske relativitetsprincip. Det opsummeres i Einsteins to postulater:
1. Alle inertialsystemer er ligeværdige for udførelsen af alle fysiske eksperimenter;
  2. I det tomme rum udbreder lyset sig retlinjet med hastigheden  $c$  i enhver retning i ethvert inertialsystem.
- iv) Det specielle relativitetsprincip er i dramatisk modstrid med Galilei-transformationens foreskrift for addition af hastigheder.

## Gennemregnede eksempler til Kapitel 1

- 1.1 Et tog kører med 100 km/t langs en retlinjet skinnestrækning, idet en sten kastes vandret fra toget med 30 km/t i en retning der danner vinklen  $60^\circ$  med køreretningen, begge målt i forhold til toget. Beregn stenens hastighed (størrelse og retning) i forhold til jorden.



Lad  $(x, y)$  og  $(x', y')$  repræsentere henholdsvis skinne- og togsystemet, med  $x$ - og  $x'$ -akserne pegende i togets køreretning, som vist på figuren. Vi kan da anvende den inverse af Galilei-transformationen (1.5)

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x + v \\ u_y &= u'_y, \end{aligned}$$

hvor  $\vec{v}$  er togets hastighed,  $\vec{u}'$  er stenens hastighed i forhold til toget, og  $\vec{u}$  er stenens hastighed i forhold til skinnerne (jorden). Altså er

$$u_x = u' \cos \theta' + v \quad \text{og} \quad u_y = u' \sin \theta',$$

hvor  $\theta'$  er vinklen i togsystemet mellem stenens og togets bevægelsesretninger. Stenens hastighed i forhold til jorden er altså

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{v^2 + u_x'^2 + u_y'^2 + 2vu'_x} = \sqrt{v^2 + u'^2 + 2vu' \cos \theta'}$$

i en retning, der i forhold til køreretning danner en vinkel givet ved

$$\tan \theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{u'_y}{v + u'_x}.$$

Ved indsættelse af de opgivne talstørrelser fås

$$u = 117.9 \text{ km/t} \quad \text{og} \quad \theta = 12.7^\circ.$$

## Opgaver til Kapitel 1

- 1.1** En båd sejler mod strømmen på en flod, som flyder med hastigheden  $v$ . Da båden passerer under en bro kastes en bølge i vandet. Efter at have fortsat op mod strømmen i endnu et kvarter drejer båden pludselig omkring (vi antager at ingen tid spildes ved denne manøvre) for at fortsætte sin rejse med samme hastighed i forhold til vandet som før, men nu med strømmen. Idet den når bøjen, har denne flydt 1.0 km ned ad floden i forhold til broen. Beregn hastigheden,  $v$ , af vandet.
- 1.2** En fører af et tog, som kører 120 km/t, observerer et andet tog 2.0 km foran sig, som kører i samme retning på samme skinnesæt med en konstant hastighed af 60 km/t. Føreren påbegynder umiddelbart en nedbremsning. Hvad er togets minimale acceleration (deceleration), hvis en kollision skal undgås?
- 1.3** En bold slippes fra toppen af en høj bygning. Tre sekunder senere slippes endnu en bold fra samme punkt. Vis, idet der ses bort fra luftmodstand, at den relative hastighed af de to bolde forbliver konstant. Hvad er boldenes relative hastighed?
- 1.4** Et punkt A ligger 30 m direkte nord for et punkt B. Ved en konstant vind direkte fra nord finder man, at en lydbølge tager 85 ms om at rejse fra A til B, og 95 ms om at rejse fra B til A. Find vindhastigheden og lydhastigheden i stillestående luft.
- 1.5** Et skib, A, sejler mod øst med 12 knob, medens et andet skib, B, sejler mod syd med 18 knob. Hvad er hastigheden (størrelse og retning) af A set fra B?
- 1.6** En kvinde svømmer retlinjet med hastigheden 1.0 m/s, frem og tilbage mellem to flydende pontoner, som er fast forbundne til hinanden med afstanden 30 m. Beregn tiden for turen under følgende forudsætninger
- Pontonerne er i hvile i forhold til vandet;
  - Systemet af de to pontoner trækkes med hastigheden 0.33 m/s parallel med retningen, der forbinder de to pontoner.
  - Systemet af de to pontoner trækkes med hastigheden 0.33 m/s vinkelret på retningen, der forbinder de to pontoner.
- 1.7** En radioaktiv kilde, som bevæger sig med farten  $v$  i laboratoriet, udsender alfa-partikler. I kildens hvilesystem udsendes alfa-partiklerne med farten  $u'$  i en retning, der danner vinklen  $\theta'$  med kildens bevægelsesretning. Find vinklen  $\theta$  i laboratoriet mellem alfa-partiklen og kildens bevægelsesretning.

Antag derefter, at kilden udsender alfa-partikler isotropt i hvilesystemet (d.v.s. lige mange partikler i enhver retning i rummet). Vis, at den halvdel af partiklerne, der udsendes i den fremadrettede hemisfære i hvilesystemet er koncentreret i en kegle med halvvinkel  $\tan^{-1}(u'/v)$  i laboratoriet.

- 1.8** a) En togvogn kører på en ret skinnestrækning med en konstant fart 5.0 m/s. I togvognen udføres et eksperiment, hvor alle bevægelser måles i forhold til togvognen: En masse  $m_1 = 2.0$  kg bevæger sig forlæns med farten  $u_1 = 1.0$  m/s og kolliderer centralt med en masse  $m_2 = 1.0$  kg, der bevæger sig i modsat retning med farten  $u_2 = 4.0$  m/s. Efter stødet ligger  $m_2$  i hvile. Find hastigheden  $w_1$  (størrelse og retning) af  $m_1$ . Hvor meget kinetisk energi er gået tabt?
- b) Beskriv stødet set fra skinne-systemet. Er impulsen bevaret? Hvor meget kinetisk energi er gået tabt?



## 2 Lorentz-transformationen

### 2.1 Den specielle relativitetsteoris grundlag

Ligesom den Newtonske mekanik, er den specielle relativitetsteori afgørende forbundet med begrebet inertialsystemer. Et inertialsystem kan i princippet tænkes opbygget af et sæt af tre indbyrdes ortogonale stive stænger ( $x$ ,  $y$  og  $z$ -akser), der er fast nittet til hinanden i begyndelsespunktet og som har samme længdeinddeling indridset langs hver akse. Ethvert inertialsystem har en Euklidisk geometri (rummet er fladt), og i ethvert inertialsystem gælder Newtons første lov. Man kan forestille sig uendelig mange sådanne referencesystemer med alle mulige orienteringer af akserne og med alle mulige hastigheder i forhold til hinanden. Mens dette gælder uden indskrænkning i den Newtonske mekanik, er der i den specielle relativitetsteori den begrænsning, at alle indbyrdes hastigheder af inertialsystemer er mindre end lyshastigheden,  $c$ . I den Newtonske teori deler alle inertialsystemer den samme universelle (absolutte) tid, og systemer i relativ bevægelse er indbyrdes forbundne gennem Galilei-transformationen. Den vigtige matematiske opdagelse, der muliggjorde den specielle relativitetsteori, var, at såfremt man er villig til at opgave ideen om en absolut tid, så er en ny type af transformation mellem inertialsystemer mulig, samtidigt med at man opretholder den Euklidiske geometri og gyldigheden af Newtons første lov i ethvert inertialsystem og opretholder det specielle relativitetsprincip, ifølge hvilket alle inertialsystemer er ligeværdige. Denne nye transformation, Lorentz-transformationen, er karakteriseret ved, at den lader lyshastigheden,  $c$ , transformere over i den samme hastighed i alle inertialsystemer.

Den specielle relativitetsteori er altså i udgangspunktet en teori for rum og tid i en verden af inertialsystemer, som er forbundne via Lorentz-transformationen. Teorien inkluderer resultater så som tidsforlængelsen, længdeforkortningen, den relativistiske hastighedssammensætning, eksistensen af en maksimal hastighed etc.

I dette og de følgende tre kapitler vil vi foretage en detaljeret udforskning af den nye teori for rum og tid inklusive de ovenfor nævnte fænomener. Først i Kapitel 6 vender vi os så mod formuleringen af en relativistisk invariant mekanik til afløsning af de Newtonske love.

### 2.2 Revision af fundamentale begreber

Før vi påbegynder den formelle udledning af Lorentz-transformationen og dens følger, vil vi i dette afsnit foretage nogle kvalitative overvejelser om konsekvenserne af det specielle relativitetsprincip for de grundlæggende begreber *samtidighed*, *længde* og *varighed*.

Gennem logiske argumenter baseret på tankeeksperimenter er det vort mål, at forstå intuitivt, hvorfor det specielle relativitetsprincip nødvendigvis indebærer et brud med den klassiske opfattelse af disse begreber.

### 2.2.1 Samtidighed

Vi tænker os to inertialsystemer  $S$  og  $S'$  med hver sit tidsmål  $t$  og  $t'$ . I den klassiske mekanik går man uden videre ud fra, at disse tidsmål kan bringes til at stemme overens, og i Galilei-transformationen sætter man derfor  $t' = t$ . Er der tale om to samtidige begivenheder i  $S$ , vil de altså også være samtidige i  $S'$ . Denne *aprioriske* opfattelse af samtidighed, kan ikke uden videre opretholdes i relativitetsteorien, og vi søger derfor en definition, der ved fysiske målinger tillader os at afgøre, om to begivenheder er samtidige eller ikke. Vi benytter os her af Einsteins andet postulat, ifølge hvilken lyset bevæger sig med samme hastighed,  $c$ , i enhver retning i ethvert inertialsystem. Dette tillader os at indføre følgende *definition* af samtidighed:

Fysisk definition af samtidighed

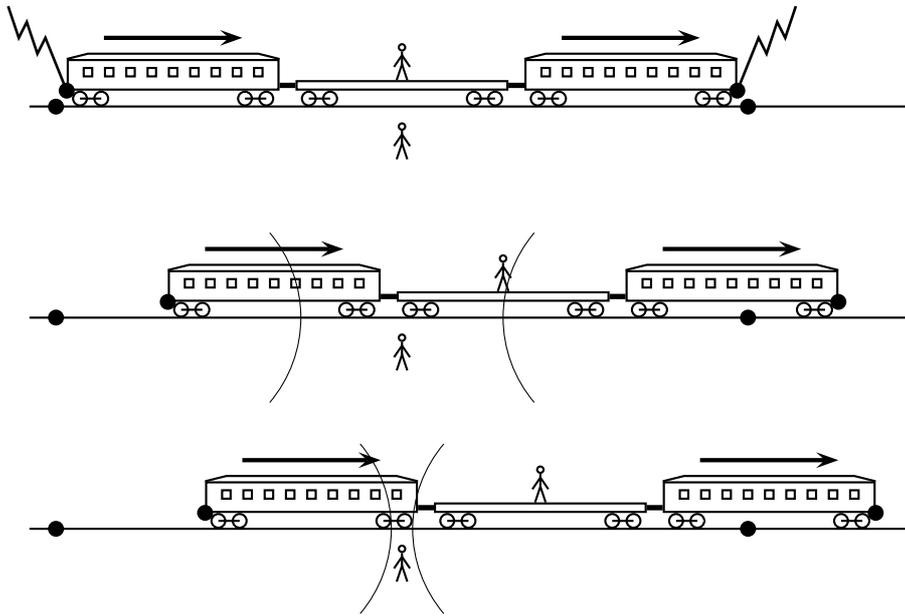
To begivenheder, der foregår i punkterne  $A$  og  $B$ , siges at være samtidige, såfremt et lyssignal udsendt fra  $A$ , når begivenheden her finder sted, og et lyssignal udsendt fra  $B$ , når begivenheden finder sted der, vil nå frem til en iagttager i samme afstand fra  $A$  og  $B$  til samme tidspunkt.

Denne definition medfører, at to iagttagere i indbyrdes bevægelse i almindelighed ikke vil være enige om samtidigheden af to begivenheder.

Einstein demonstrerede dette gennem det følgende berømte tankeeksperiment. Lad os betragte et hurtigtog i jævn retlinjet bevægelse i forhold til jordoverfladen, som her antages at udgøre et inertialsystem. Under et tordenvejr slår et lyn ned ved togets forende og et andet ved dets bagende. Derved afsættes der mærker på såvel toget som skinnerne, og lysglimt vil bevæge sig forlæns og baglæns langs toget (Figur 2.1). En iagttager, som står på jorden, modtager de to lysglimt til samme tidspunkt. Ved en efterfølgende opmåling finder han, at han befandt sig præcis midt mellem mærkerne på skinnerne, og han konkluderer derfor ifølge definitionen, at de to lynnedslag skete samtidigt.

En anden iagttager befinder sig præcis midt i toget. Set fra iagttageren på jorden bevæger toget sig hen imod glimtet, der kommer fra togets forende, og væk fra glimtet, der kommer fra togets bagende. Iagttageren i toget modtager derfor glimtet fra forenden før glimtet fra bagenden. Dette er præcis, hvad iagttageren i toget oplever: Glimtet fra forenden ankommer først, siden ankommer glimtet fra bagenden. Men da denne iagttager kan verificere, at hun befinder sig i samme afstand fra togets forende og bagende, hvor mærker er afsat af de to lynnedslag, må hun konkludere, at lynnedslaget ved forenden skete tidligere end lynnedslaget ved bagenden. Lyset bevæger sig jo nemlig også i hendes inertialsystem med samme hastighed i begge retninger.

Skete de to lynnedslag så samtidigt eller gjorde de ikke? Hvor mærkeligt det end måtte lyde, findes der ikke noget entydigt svar på dette spørgsmål. I den ovennævnte situation var de to begivenheder samtidige set fra jord-systemet, men ikke-samtidige set fra tog-systemet. Samtidighed af to begivenheder er altså et relativt begreb. Kun i det



**Figur 2.1:** Einsteins tog-eksperiment illustrerer at samtidighed er et relativt begreb. **Øverst:** Lyn slår ned i for- og bagenden af et tog i bevægelse, hvorved der efterlades mærker på både tog og skinner. Lysglimt udbreder sig i alle retninger. **Midten:** En iagttager, der opholder sig midt i toget, konkluderer at de to lynnedslag ikke var samtidige. Hendes argumenter: “i) Jeg befinder mig lige langt fra mærkerne afsat i for- og bagenden af toget. ii) Lyset har en fast hastighed i mit system og bevæger sig med samme hastighed i begge retninger. iii) Lysglimtet fra forenden ankom først. Altså, iv) må glimtet fra forenden have været afsendt før glimtet fra bagenden, og de to lynnedslag var dermed *ikke samtidige*.” **Nederst:** En iagttager, der står på jorden midt mellem mærkerne på skinnerne, konkluderer at lynnedslagene var *samtidige*, idet de to lysglimt når ham til samme tidspunkt.

specielle tilfælde, hvor to begivenheder sker i samme punkt (eller i et plan vinkelret på den relative bevægelsesretning af de to inertialsystemer) medfører samtidighed i ét system også samtidighed i det andet.

Relativiteten af samtidighed er et vanskeligt begreb at forstå. Næsten ethvert paradoks, der bliver fremført for at “modbevise” relativitetsteorien er baseret på en eller anden misforståelse i anvendelsen af begrebet samtidighed.

### 2.2.2 Længde

Hvad *længdebegrebet* angår bemærker vi først, at hvis en iagttager ønsker at måle længden af en stang i hvile i forhold til sig selv, kan han nøjagtigt som i det klassiske tilfælde gøre dette ved at placere en målestok langs stangen og finde differencen mellem koordinaterne for stangens endepunkter, således som de aflæses på målestokken. Er stangen derimod i bevægelse i forhold til iagttageren, kan vi ikke anvende denne definition. En længdemåling kan i dette tilfælde defineres på følgende måde:

Fysisk definition af  
længde

Ved længden af en stang, der bevæger sig i sin længderetning parallelt med en målestok, forstår vi afstanden mellem to mærker afsat på målestokken ud for stangens endepunkter til samme tidspunkt.

Det afgørende er her, at mærkerne skal afsættes samtidigt i forhold til den iagttager, der foretager længdemålingen og derfor er i hvile i forhold til målestokken. En anden iagttager (i bevægelse i forhold til den første) vil, som vi har set, i almindelighed finde, at de to mærker er afsat til forskellig tidspunkt, og vil derfor finde en anden værdi for stangens længde.

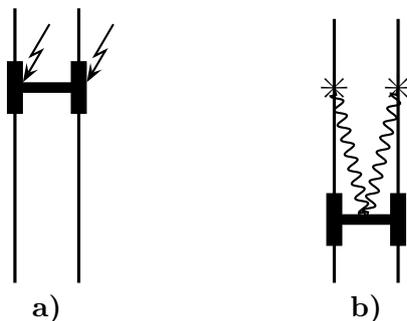
I tankeeksemplet ovenfor vil iagttageren på jorden kunne måle togets længde ved at bestemme afstanden mellem de to mærker på skinnerne, idet disse jo for ham var afsat samtidigt. Da iagttageren i toget fandt, at mærket ved forenden blev afsat før mærket ved bagenden, er afstanden mellem mærkerne på skinnerne for hende mindre end togets længde. En iagttager, for hvem en stang er i bevægelse langs sin længderetning, vil altså i almindelighed finde en mindre værdi af stangens længde end en iagttager, for hvem stangen er i hvile. Den største længde findes altså i stangens hvilesystem og kaldes stangens *hvilelængde*.

hvilelængde

### Transversale dimensioners invarians

Mens de to iagttagere i tankeeksemplet ovenfor var uenige om længden af toget, kan de ikke blive uenige om dets bredde, eller i almindelighed om dimensionen af legemer vinkelret på disses bevægelsesretning. Vi kan f.eks. betragte en af vognakslerne, der set fra toget vil stå vinkelret på dets bevægelsesretning. Dette vil akslen imidlertid også gøre set fra jorden, hvilket ses af symmetri Grunde: højre ende af akslen udmærker sig ikke frem for venstre, og omvendt, og derfor kan ingen af akselenderne være forskudt i forhold til den anden.

Vi tænker os nu, at to lyn slår ned, ét i hver ende af akslen, som vist på Figur 2.2. De to lynnedslag er samtidige set fra toget, såfremt en iagttager i et plan vinkelret på midten af akslen ser de to glimt samtidigt. Tænker vi os derpå de to glimt registreret af en iagttager på jorden lige under det punkt, hvor iagttageren på toget så glimtene, vil den førstnævnte også se dem samtidigt, idet han jo ligeledes har samme afstand fra de to nedslagspunkter. Når der således er enighed om samtidigheden af begivenheder i punkter, hvis forbindelseslinje er vinkelret på bevægelsesretningen, vil der også være enighed om den rumlige afstand mellem de to begivenheder. Vi kan her ræsonnere på



**Figur 2.2:** Ved at betragte to lyn, der slår ned ved enderne af en vogn-aksel, indser vi, at akslens længde er uafhængig af togets hastighed. Hvis en iagttager a), der befinder sig i toget i et plan vinkelret på midten af akslen, ser de to glimt samtidigt, vil det samme være tilfældet for en jordbaseret iagttager b), der befinder sig midt mellem de to skinner. Da de er enige om samtidigheden af lynnedslagene vil de også være enige om akslens længde.

følgende måde: Iagttagere i toget kan umiddelbart måle akslens hvilelængde  $l_0$ . Hvis der som før er afsat mærker på skinnerne ved lynnedslagene, vil iagttageren på jorden måle akslens længde som afstanden mellem disse mærker. Lad os tænke os at han finder en længde  $l$ , så at vi kan sætte  $l = kl_0$ , hvor  $k$  er en proportionalitetsfaktor, der eventuelt kan afhænge af hastigheden. Men også iagttageren på toget vil anerkende den af ham målte afstand mellem mærkerne på skinnerne som længdemål for akslen. Denne længde er altså  $l_0$ , således at iagttageren på toget vil sætte  $l_0 = kl$ , hvor  $l$  er det samme tal som før. Dette er en umiddelbar følge af de to inertialsystemers ligeberettigelse, dvs. af relativitetsprincippet. Af de to ligninger følger imidlertid  $k^2 = 1$ , og da  $k$  er et positivt tal, bliver  $k = 1$  og  $l = l_0$ .

Et simpelt spørgsmål fører til et endnu mere grundlæggende argument mod, at et legemes dimensioner vinkelret på bevægelsesretningen skulle afhænge af legemets hastighed. Spørgsmålet er, omkring hvilken akse forandringen skulle foregå. Tænk vi os igen toget i bevægelse, ville man måske umiddelbart tænke sig, at det måtte skrumpe omkring en akse, som går midt ned gennem toget. Men lad os så forestille os to tog ved siden af hinanden, som begge kører med samme hastighed. Skulle nu begge tog skrumpe omkring deres respektive akser (og derved lade afstanden mellem de to tog vokse!)? Eller skulle systemet af de to tog skrumpe omkring en akse tilsvarende midten af systemet? Begge muligheder er åbenlyst absurde, og den uundgåelige konklusion er, at togenes bredde er uforandret.

Vi ser altså, at når et legeme bevæger sig, vil dets dimensioner vinkelret på bevægelsesretningen være uforandrede.

### 2.2.3 Varighed

Egentid for proces:  
Varighed i det  
system, hvor  
processen foregår i  
hvile

Hvad endeligt begrebet *varighed* angår, er det næsten på forhånd klart, at varigheden af en proces må bedømmes forskelligt af to iagttagere i forskellig bevægelsestilstand, eftersom disse jo er uenige om samtidigheden af to begivenheder. Tænker vi os en kineser antændt, går der et lille tidsrum inden den eksploderer. Er kineseren i hvile i forhold til iagttageren, vil denne på sit ur måle en vis varighed – kaldet *egentiden* – af denne proces. En iagttager i bevægelse i forhold til kineseren vil se antændelsen og eksplosionen i forskellige punkter af sit eget inertialsystem og i almindelighed finde en anden varighed. De nærmere forhold ved dette fænomen vil vi imidlertid først undersøge i næste kapitel, når vi i har udledt Lorentz-transformationen.

## 2.3 Inertialsystemers homogenitet og isotropi

Ifølge relativitetsprincippet er alle inertialsystemer ligeværdige. Dette gælder specielt for alle inertialsystemer, der bevæger sig parallelt med hinanden med samme hastighed, og som derfor udelukkende adskiller sig fra hinanden gennem rumlige og tidslige translationer og rotationer. Det følger heraf, at ethvert inertialsystem er fuldkommen symmetrisk. Hermed menes, at det er rumligt homogent og isotropt ikke alene i geometrisk Euklidisk forstand, men for alle fysiske fænomener, og at det også er tidsmæssigt homogent. Et givet fysikeksperiment, som udføres i et inertialsystem, vil med andre ord have samme udfald uanset hvor det udføres (homogenitet), hvilken retning det drejes i (isotropi) og hvornår det udføres (tidslig homogenitet).

## 2.4 Koordinat-gitteret

Hovedformålet med dette kapitel er at udlede Lorentz-transformationen, som er den matematiske kerne i den specielle relativitetsteori. Men før vi begynder at *transformere* koordinater fra ét inertialsystem til et andet, skal vi her først afklare, hvordan man tilskriver koordinater til en begivenhed i et *enkelt* inertialsystem.

Først og fremmest har vi brug for universelle enheder for tid og længde. I de to følgende indskud ser vi på, hvordan standardenhederne for disse størrelser er defineret i den moderne fysik.

### **Indskud 2.1 Tidsenheden sekund**

Vores tidsenhed var oprindeligt knyttet til Jordens daglige rotation, idet et sekund var defineret som  $1/60$  af  $1/60$  af  $1/24$  af et døgn. Da Jordens rotationshastighed imidlertid aftager langsomt, er denne definition uhensigtsmæssig. Et sekund er nu defineret som varigheden af 9 192 631 770 perioder af strålingen, der tilsvare overgangen mellem de to hyperfin-niveauer i grundtilstanden af atomet cæsium-133.

### **Indskud 2.2 Lysets hastighed og længdeenheden meter**

Siden Ole Rømers første bestemmelse af lysets hastighed er målingerne heraf blevet

stadigt mere forfinede. Man stod således omkring 1980 i den situation, at man kunne måle lyshastigheden betydeligt mere præcist end man kunne definere vores standardlængdeenhed, meteren. Man valgte da i 1983 at vende argumentationen omkring, og definere lyshastigheden til at være

$$c \equiv 299\,792\,458 \text{ m/s.} \quad (2.1)$$

Meteren er herefter defineret ved den længde, som et lyssignal tilbagelægger i vakuum i  $1/299\,792\,458$  s.

Som standardkoordinater for inertialsystemer anvender vi ortogonale koordinater  $x, y, z$ . En iagttager, som tænkes i hvile i begyndelsespunktet af et inertialsystem, vil kunne tildele koordinater til begivenheder, hvis han er udstyret med et standard-ur (f.eks. et cæsium-ur), en teodolit<sup>1</sup> og udstyr til at udsende og modtage lyssignaler. Afstanden til enhver partikel kan da bestemmes ved hjælp af radar-metoden, hvor et udsendt lyssignal (delvist) reflekteres af partiklen; afstanden fås da ved at multiplicere den forløbne tid med  $\frac{1}{2}c$ . Idet retningen af det reflekterede lys bestemmes ved hjælp af teodolitten ligger partiklens koordinater  $(x, y, z)$  herefter fast. Tiden  $t$  for reflektionsprocessen bestemmes ved hjælp af det samme lyssignal som gennemsnittet af tiderne for udsendelsen og modtagelsen.

Skønt den ovennævnte fremgangsmåde er generelt anvendelig, er det begrebsmæssigt at foretrække at aflæse en begivenheds koordinater *lokalt*. Til dette brug tænker vi os små standard-ure anbragt i hvile i punkterne  $(m\varepsilon, n\varepsilon, p\varepsilon)$ , som udgør hjørnerne i et vilkårligt fint, ortogonalt gitter af tynde stænger;  $m, n$ , og  $p$  løber over alle heltal, og  $\varepsilon$  er en vilkårlig lille længde. Urenes rumkoordinater kan tænkes indgraveret på dem. Synkronisering af urene kan ske ved hjælp af et eller andet signal, hvis hastighed er retningsuafhængig. Et lyssignal vil derfor kunne anvendes. Antager vi, at et kugleformet lyssignal udsendes fra begyndelsespunktet til tiden  $t_0$ , vil samtlige ure være synkroniserede, hvis de justeres til at vise  $t_0 + r/c$ , idet signalet passerer, hvor  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  er afstanden til begyndelsespunktet. Efter denne kalibrering kan enhver begivenheds koordinater  $x, y, z$  og  $t$  aflæses simpelthen ved at kigge på det nærmeste ur.

I den Newtonske teori vil urene i ethvert inertialsystem simpelthen kunne overtage den absolutte tid, og denne vil i den ovennævnte betydning være tilfredsstillende i ethvert inertialsystem. Modsat i den specielle relativitetsteori, hvor den tid, der er tilfredsstillende i ét inertialsystem, vil bryde med isotropien i et andet inertialsystem, hvis den overtages direkte. Det er derfor nødvendig i ethvert inertialsystem at foretage en *uafhængig* synkronisering af urene.

## 2.5 Begrebet *iagttager*

For at undgå misforståelser er det vigtigt at gøre sig klar, hvad begrebet en *iagttager* iagttager dækker over i den specielle relativitetsteori.

<sup>1</sup> Et instrument som landmålere benytter til bestemmelse af vinkler.

En iagttager er en person, som er tilordnet et bestemt referencesystem, f.eks. S eller S', hvorfra han/hun registrerer begivenheder. Som anført ovenfor, tænker vi os, at alle begivenheder registreres lokalt på koordinatgitteret. Derfor er iagttagerens placering i det givne referencesystem irrelevant: Positionen, som en iagttager tilordner en begivenhed, er stedet, hvor denne fandt sted. Tiden, som en iagttager tilordner en begivenhed, er tiden, der ville være vist på det lokale ur i koordinatgitteret, idet begivenheden fandt sted. En iagttager kunne tænkes at se en eksplosion af en fjern stjerne på himlen. Da ville iagttageren rapportere tiden langt tilbage, da eksplosionen fandt sted, og ikke tiden, da lyset fra eksplosionen nåede frem til iagttagerens position.

## 2.6 Udedelse af Lorentz-transformationen

Hvor Galilei-transformationen forekommer intuitiv, indså Einstein, at der i dens udedelse forekommer antagelser om beskaffenheden af rum og tid, som potentielt ikke er korrekte. Vi skal her med udgangspunkt i det specielle relativitetsprincip udlede Lorentz-transformationen.

Ligesom Galilei-transformationen skal Lorentz-transformationen sammenknytte en begivenheds koordinater  $(t, x, y, z)$  i et inertialsystem S med dens koordinater  $(t', x', y', z')$  i et vilkårligt andet inertialsystem S'. Også i relativitetsteorien kan vi uden indskrænkning antage, at de to inertialsystemer S og S' er således indrettede, at de er i standardkonfigurationen (Figur 1.1). Vor opgave er altså med udgangspunkt i det specielle relativitetsprincip at bestemme sammenhængen mellem de to koordinatsæt, som formelt kan skrives på formen

$$\begin{aligned}t' &= f_t(t, x, y, z; v), \\x' &= f_x(t, x, y, z; v), \\y' &= f_y(t, x, y, z; v), \\z' &= f_z(t, x, y, z; v),\end{aligned}\tag{2.2}$$

hvor de fire funktioner  $f_t$  og  $f_x, f_y$ , og  $f_z$  udover afhængigheden af det oprindelige koordinatsæt kan afhænge af den relative hastighed  $v$  af S og S'.

### De transversale koordinater

Ved diskussionen i Afsnit 2.2 indså vi, at dimensioner vinkelret på bevægelsesretningen vil være uforandrede. Vi kan derfor uden videre slutte, at for enhver begivenhed er

$$y' = y, \quad \text{og} \quad z' = z.\tag{2.3}$$

Hermed har vi bestemt to af transformationsligningerne (2.2), som i deres trivielle form ikke adskiller sig fra de tilsvarende i Galilei-transformationen. Vi indser yderligere, at de to funktioner  $f_t$  og  $f_x$  i (2.2) ikke kan afhænge af  $y$  og  $z$ , idet en sådan afhængighed ville bryde med rummets homogenitet. Specifikt kan vi betragte to begivenheder, der

har samme  $x$ -værdi og er samtidige i  $S$ . De kan f.eks. have koordinaterne  $(t, x, y, z)$  og  $(t, x, 0, 0)$ . Da de finder sted i samme plan vinkelret på den relative bevægelsesretning og er samtidige i  $S$ , må de også være samtidige i  $S'$ , hvorfor altså  $f_t(t, x, y, z) = f_t(t, x, 0, 0)$ . Tilsvarende argumenter anvendes på funktionen  $f_x$ .

### Transformationen er lineær

De to resterende transformationsligninger tager nu formen

$$\begin{aligned} t' &= f_t(x, t; v), \\ x' &= f_x(x, t; v). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Galilei-transformationen tager sig til sammenligning således ud

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x - vt, \end{aligned} \quad (2.5)$$

og er øjensynlig af typen (2.4). Transformationen (2.5) er *lineær*, hvorved blot forstås, at  $t'$  og  $x'$  er polynomier af første grad i  $t$  og  $x$ . Ydermere er transformationen *homogen*, hvorved menes, at  $(t, x) = (0, 0)$  medfører  $(t', x') = (0, 0)$ . En homogen transformation indeholder således ikke konstante led. I den nærværende sammenhæng er homogeniteten ikke af større betydning, idet den blot skyldes vores antagelse om sammenfaldet af de to inertialsystemer til tiden  $t = t' = 0$ . Hvis vi ikke lader  $S$  og  $S'$  falde sammen på denne måde, bliver transformationen ikke homogen, men stadig lineær.

Det er klart, at også Lorentz-transformationen (2.4) med vore antagelser må blive homogen. Vi vil i det følgende gå ud fra, at den også er lineær og derfor kan skrives på formen

$$\begin{aligned} t' &= \kappa x + \sigma t, \\ x' &= \gamma x + \rho t, \end{aligned} \quad (2.6)$$

hvor  $\kappa$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma$ , og  $\rho$  kan afhænge af hastigheden  $v$ , men er uafhængige af  $t$  og  $x$ . Denne sætning kan bevises helt stringent, men vi skal her nøjes med ved et enkelt eksempel at belyse de ubehagelige konsekvenser, der ville følge af en ikke-lineær transformation.

#### Eksempel 2.1 En ikke-lineær transformation

Lad os betragte en ikke-lineær transformation af formen

$$\begin{aligned} t' &= cx + dt, \\ x' &= ax^2 + bt^2. \end{aligned}$$

Antag, at en partikel bevæger sig jævnt på  $x$ -aksen efter formelen

$$x = ut,$$

hvor  $u$  er en konstant. Vi får da for  $x'$  og  $t'$

$$\begin{aligned}t' &= cut + dt = (cu + d)t, \\x' &= au^2t^2 + bt^2 = (au^2 + b)t^2,\end{aligned}$$

og ved at eliminere  $t$  får vi derfor

$$x' = \frac{au^2 + b}{(cu + d)^2} t'^2,$$

hvilket viser, at bevægelsen, der var jævn i forhold til  $S$ , vil være jævnt accelereret i forhold til  $S'$ . Dette strider naturligvis imod, at de to systemer begge er forudsat at være inertialsystemer.

**Øvelse 2.1** Vis, at med den lineære transformation (2.6) vil en vilkårlig bevægelse, der er jævn i forhold til  $S$  også være jævn i forhold til  $S'$ .

### Benyttelse af den relative hastighed af $S$ og $S'$

Vi vil nu udnytte, at vi kender den relative hastighed af de to systemer  $S$  og  $S'$ . Idet  $S'$  bevæger sig med hastigheden  $v$  i forhold til  $S$ , følger det af symmetriårsager at  $S$  bevæger sig med hastigheden  $-v$  i forhold til  $S'$ . I modsat fald ville de to systemer ikke være ligeberettigede. Vi kræver nu, at begyndelsespunktet  $O'$  ( $x' = 0$ ) har hastigheden  $v$  set fra  $S$ . Ved derfor at sætte  $x' = 0$  i første linje af (2.6) og kræve, at den resulterende ligning tager formen  $x = vt$ , finder vi sammenhængen

$$v = -\rho/\gamma.$$

Tilsvarende må  $O$  ( $x = 0$ ) have hastigheden  $-v$  i forhold til  $S'$ . Ved at sætte  $x = 0$  i (2.6) og benytte de to resulterende udtryk for  $x'$  og  $t'$  i sammenhængen  $x' = -vt'$ , finder vi

$$\sigma = \gamma.$$

Lorentz-transformationen er da reduceret til formen

$$\begin{aligned}t' &= \gamma(t - \alpha vx), \\x' &= \gamma(x - vt),\end{aligned}\tag{2.7}$$

hvor vi har skrevet funktionen  $\kappa$  på formen  $-\gamma\alpha v$ , hvilket vil vise sig bekvemt i det følgende. Størrelserne  $\gamma$  og  $\alpha$  er nu de ukendte funktioner af  $v$ .

### Sfærisk udbredelse af et lysglimt i $S$ og $S'$

For at bestemme de to størrelser  $\gamma$  og  $\alpha$  og dermed fastlægge Lorentz-transformationen betragter vi en lyskilde, som til tiden  $t = t' = 0$  udsender et lysglimt fra det fælles begyndelsespunkt i de to systemer  $S$  og  $S'$ . Som følge af antagelsen om lyshastighedens

invarians, vil lysglimtets udbrede sig sfærisk med hastigheden  $c$  i såvel  $S$  som  $S'$ , altså samtidigt tilfredsstillende de to relationer  $r = ct$  og  $r' = ct'$ , hvor  $r$  og  $r'$  er sfærens radius i henholdsvis  $S$  og  $S'$ . Der vil altså gælde

$$\text{i } S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (2.8)$$

$$\text{i } S': \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (2.9)$$

Vi må nu kræve, at Lorentz-transformationen er således beskaffen, at lysglimtets udbredelse tilfredsstillende begge disse udtryk.

Som et eksempel, kan vi forsøge at benytte Galilei-transformationen (1.4). Ved indsættelse i (2.9) finder vi da

$$x^2 - 2xvt + v^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2,$$

som er i åbenbar modstrid med (2.8). Galilei-transformationen er derfor ikke overraskende i modstrid med forudsætningen om lyshastighedens invarians.

Ved benyttelse af transformationen (2.7) i (2.9) finder vi udtrykket

$$\gamma^2 x^2 - 2\gamma^2 xvt + \gamma^2 v^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 \gamma^2 (t^2 - 2\alpha xvt + \alpha^2 v^2 x^2), \quad (2.10)$$

og søger nu at bestemme  $\alpha$  og  $\gamma$ , således at dette er i overensstemmelse med (2.8). Vi bemærker først, at de to led indeholdende produktet  $xvt$  må gå ud mod hinanden. Heraf følger umiddelbart, at

$$\alpha = 1/c^2. \quad (2.11)$$

Vi kan dernæst samle de to led, der indeholder  $x^2$ , på venstresiden og, i overensstemmelse med (2.8), kræve at koefficienten er 1, altså

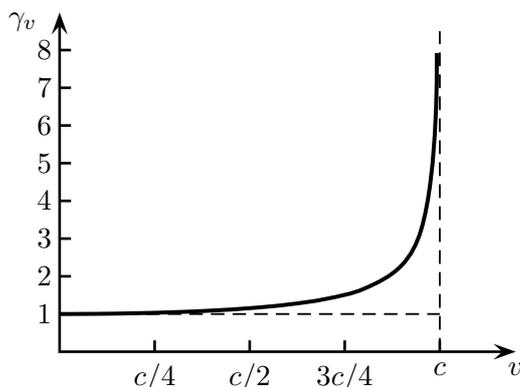
$$\gamma^2 - \gamma^2 v^2 / c^2 = 1,$$

hvor vi har benyttet udtrykket for  $\alpha$ . Vi har således

$$\boxed{\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}, \quad (2.12)$$

hvor vi har valgt den positive rod, idet vi må kræve, at  $x'$  går kontinuert med  $x$  for  $v \rightarrow 0$ . Funktionen  $\gamma(v)$  er den berømte *Lorentz-faktor*, som spiller en vigtig rolle i relativitetsteorien. For  $v > 0$  er  $\gamma(v)$  altid større end 1, skønt ikke meget for små hastigheder  $v \ll c$ . Funktionen er afbildet på Figur 2.3, hvor den langsomme tilvækst for små hastigheder og den lodrette asymptote for  $v = c$  bør bemærkes.

$\gamma$ -faktoren er som anført en funktion af en hastighed; her den relative hastighed,  $v$ , af de to inertialsystemer. Man burde derfor strengt taget anføre dette eksplicit, ved f.eks. at skrive  $\gamma(v)$ . Da denne notation imidlertid kan virke ret tung, har vi i denne fremstilling valgt i stedet at anvende notationen  $\gamma_v$ , hvor sub-scriptet anfører, hvilken hastighed, der indgår.



**Figur 2.3:** Lorentz'  $\gamma$ -faktor  $\gamma_v \equiv \gamma(v) = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ . Værdien er tæt på 1 for hastigheder meget mindre end lyshastigheden, men vokser hurtigt når  $v$  nærmer sig  $c$ . Bemærk, at  $\gamma > 1$  for alle værdier af  $v$ .

### Lorentz-transformationens endelige form

Med resultaterne (2.11) og (2.12) har vi udledt Lorentz-transformationen:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma_v (t - vx/c^2), \\ x' &= \gamma_v (x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Dette ligningssæt kan uden videre løses med hensyn til variablerne  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ , hvorved vi finder den omvendte transformation:

$$\begin{aligned} t &= \gamma_v (t' + vx'/c^2), \\ x &= \gamma_v (x' + vt'), \\ y &= y', \\ z &= z'. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Disse transformationsligninger svarer til, at  $S$  i forhold til  $S'$  bevæger sig med hastigheden  $-v$  efter  $x'$ -aksen.<sup>2</sup>

Lad os her kommentere på følgende tre egenskaber ved Lorentz-transformationen:

- i) *Relativiteten af samtidighed:* Det mest slående nye træk ved Lorentz-transformationen er reglen for tidstransformation, som udtrykker at samtidighed er et relativt begreb: begivenheder med samme  $t$  tilsvare i almindelighed ikke begivenheder med samme  $t'$ .

<sup>2</sup> Da  $\gamma$ -funktionen er en funktion af kvadratet på hastigheden, og dermed udelukkende afhænger af hastighedens størrelse, er jo  $\gamma_{-v} = \gamma_v$ .

- ii) *Symmetri i x og ct*: Ligningerne (2.13) og (2.14) er symmetriske ikke alene i y og z, men også i x og ct. Dette verificeres let ved at gange den første ligning igennem med c.
- iii) *Den Newtonske grænse*: Ved rækkeudvikling<sup>3</sup> af  $\gamma$ -funktionen i størrelsen  $v^2/c^2$  fås

$$\gamma(v) = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \quad (2.15)$$

For små hastigheder,  $v/c \ll 1$ , er altså  $\gamma \simeq 1$ , hvorfor Lorentz-transformationen reducerer til Galilei-transformationen (1.4), som vi må kræve. Samme konklusion nås selvfølgelig, hvis vi formelt lader  $c \rightarrow \infty$ .

## 2.7 Lorentz-transformationen på differens- og differential-form

Lad os betragte to begivenheder  $\mathcal{P}_1$  og  $\mathcal{P}_2$ , som i inertialsystemet S har de respektive koordinater  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  og  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ . Svarende hertil har vi de fire koordinatdifferencer

$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad \Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta z = z_2 - z_1.$$

Vi søger nu at finde de tilsvarende størrelser i inertialsystemet  $S'$ , som bevæger sig i forhold til S på vanlig måde. Vi begynder med x-koordinaten og finder ved anvendelse af Lorentz-transformationen (2.13)

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma_v(x_2 - vt_2) - \gamma_v(x_1 - vt_1) = \gamma_v[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] = \gamma_v(\Delta x - v\Delta t).$$

Ved at behandle de øvrige koordinater på tilsvarende vis fås transformationsligningerne

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma_v (\Delta t - v\Delta x/c^2), \\ \Delta x' &= \gamma_v (\Delta x - v\Delta t), \\ \Delta y' &= \Delta y, \\ \Delta z' &= \Delta z. \end{aligned}} \quad (2.16)$$

Lad os dernæst betragte en bevægelse, hvor en partikel (eller et geometrisk punkt) i det infinitesimale tidsrum  $dt$  tilbagelægger den infinitesimale vejlængde  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ . Vi har da

$$dt = t_2 - t_1, \quad dx = x_2 - x_1, \quad dy = y_2 - y_1, \quad dz = z_2 - z_1,$$

---

<sup>3</sup> Se Appendix B

hvor de to begivenheder  $\mathcal{P}_1$  og  $\mathcal{P}_2$  nu altså tilsvarede nabo-punkter i såvel tid som rum. På samme måde som ovenfor finder vi da transformationsligningerne

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma_v (dt - vdx/c^2), \\ dx' &= \gamma_v (dx - vdt), \\ dy' &= dy, \\ dz' &= dz. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Vi ser altså, at både koordinatdifferencerne og differentialerne tilfredsstiller de samme transformationsligninger som koordinaterne selv. Dette vil selvfølgelig altid være tilfældet for homogene, lineære transformationer.

Hvert af sætterne af transformationligninger har sit eget brug. De oprindelige ligninger (2.13) tjener hovedsagelig til at transformere enkeltbegivenheder. Differensformen har stor anvendelighed; man skal imidlertid være meget varsom med at gøre sig klar præcis hvilke to begivenheder man betragter. Den differentielle form er anvendelig for problemer, der omhandler bevægelse.

## 2.8 Kvadrerede former

Ved anvendelse af Lorentz-transformationen (2.13) kan man enkelt eftervise sammenhængen

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{2.18}$$

Beregningerne følger dem vi foretog i forbindelse med udledningen af Lorentz-transformationen, da vi gennem ligningerne (2.8) og (2.9) krævede, at et lysglimt skulle udbrede sig sfærisk i såvel S som S'.

Tilsvarende kan vi ved anvendelse af henholdsvis (2.16) og (2.17) eftervise de fundamentale identiteter<sup>4</sup>

$$c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \tag{2.19}$$

og

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{2.20}$$

Hvor gyldigheden af (2.18), som tidligere anført, er betinget af, at de to systemer S og S' er sammenfaldende til tiden  $t = t' = 0$ , gælder der ingen sådan begrænsning på (2.19) og (2.20), da disse jo involverer koordinatdifferenser.

Idet afstanden mellem to nabo-punkter i det Euklidiske rum er

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{2.21}$$

tager (2.20) også formen

$$c^2 dt'^2 - dr'^2 = c^2 dt^2 - dr^2. \tag{2.22}$$

---

<sup>4</sup> For notation, se det vigtige Indskud 2.3 nedenfor.

Lad os betragte en effekt, der i S udbreder sig med lyshastigheden, hvorved altså  $dr^2 = c^2 dt^2$ . Hermed forsvinder højresiden, og venstresiden må da gøre det samme. Der må altså i ethvert inertialsystem  $S'$  gælde, at  $dr'^2 = c^2 dt'^2$ . Også i dette system udbreder effekten sig da med lyshastigheden. Vi bekræftes altså i, at vi på korrekt måde har fået indbygget lyshastighedens invarians i teorien.

Den fælles værdi af de to kvadratiske former i (2.19) kaldes kvadratet af forskydningen mellem de to aktuelle begivenheder:

$$\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \quad (2.23)$$

Den kan åbenbart være positiv, negativ eller nul og må derfor ikke opfattes som kvadratet af et almindeligt tal. Kvadratroden af absolutværdien, altså  $\Delta s = \sqrt{|\Delta s^2|}$ , kaldes intervallet mellem de to begivenheder.

interval

### Indskud 2.3 Vedrørende relativistisk notation

Der har i relativitetsteorien udviklet sig en notation omkring  $\Delta$ 'er og differentialer, som ikke er matematisk stringent. Vi har her valgt at følge denne notation, skønt den måske i begyndelsen kan forekomme forvirrende. Som et eksempel lyder den matematiske stringente form af (2.19)

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2,$$

og tilsvarende for (2.20)

$$c^2(dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2.$$

Tager vi f.eks. ledet  $(\Delta x)^2$ , angiver dette kvadratet på forskellen mellem to begivenheders  $x$ -koordinater. Af bekvemlighedsårsager er det blevet en konvention i relativitetsteorien at skrive dette på formen  $\Delta x^2$ , skønt denne notation strengt taget antyder en ændring (eller forskel) i kvadratet på  $x$  og ikke, som ønsket, kvadratet på ændringen (eller forskellen) i  $x$ .

## 2.9 Den relativistiske hastighedsgrænse

For  $v = c$  bliver  $\gamma$ -faktoren (2.12) uendelig, og  $v > c$  fører til imaginære værdier for  $\gamma$ . Af dette kan vi slutte, at den indbyrdes hastighed af to vilkårlige inertialsystemer må være mindre end lyshastigheden, idet endelige, reelle koordinater i ét system må tilsvare endelige, reelle koordinater i ethvert andet system. Dette er det første tegn på, at ingen partikel kan bevæge sig med en hastighed større end lysets i forhold til et inertialsystem. Thi et sæt af sådanne partikler i parallel bevægelse ville udgøre et inertialsystem, som bevægede sig med overlyshastighed i forhold til det første. Men der er andre tegn på, at hastigheden af partikler, og mere alment, af alle fysiske *signaler*, er begrænset af  $c$ . Vi skal nu se, hvordan en antagelse om signalhastigheder større end lyshastigheden fører til

modstrid med det fundamentale princip om, at årsag kommer før virkning, og derfor må forkastes.

Til dette, tænker vi os to begivenheder  $\mathcal{P}$  og  $\mathcal{Q}$ , hvor  $\mathcal{P}$  fremkalder  $\mathcal{Q}$  gennem udveksling af et eller andet signal. Da  $\mathcal{P}$  således er årsag til  $\mathcal{Q}$ , må  $\mathcal{P}$  komme før  $\mathcal{Q}$  i ethvert inertialsystem. Lad os nu antage at signalet mellem de to begivenheder bevæger sig med overlyshastigheden  $U > c$  i et inertialsystem S. Vi arrangerer S således, at begge begivenheder finder sted på  $x$ -aksen, og at deres rumlige og tidslige afstande er  $\Delta x > 0$  og  $\Delta t > 0$ . Der må da gælde sammenhængen  $\Delta x = U\Delta t$ . I et andet inertialsystem  $S'$ , som bevæger sig på sædvanlig vis i forhold til S, har vi nu ifølge differensformen (2.16) af Lorentz-transformationen

$$\Delta t' = \gamma_v \left( \Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2} \right) = \gamma_v \Delta t \left( 1 - \frac{vU}{c^2} \right). \quad (2.24)$$

For hastigheder  $v$ , der tilfredsstill

$$c^2/U < v < c, \quad (2.25)$$

bliver  $\Delta t'$  hermed negativ. Der vil med andre ord gives inertialsystemer, i hvilke  $\mathcal{Q}$  kommer før  $\mathcal{P}$ . Dette strider mod princippet om, at årsagen kommer før virkningen, hvorfor forudsætningen om en signalthastighed større end lyshastigheden må være forkert:  $c$  udgør altså den øvre grænse for hastigheden af informationsbærende signaler. I særdeleshed må denne hastighedsgrænse da gælde for partikler, idet disse åbenbart kan benyttes til overbringelse af information.

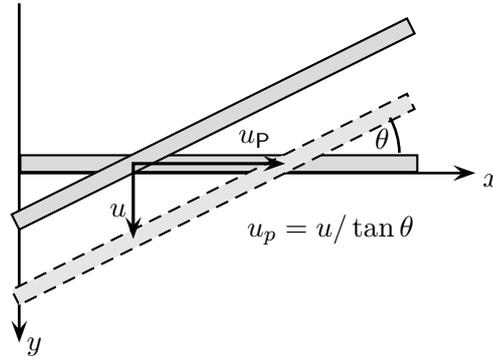
Lad os benytte lejligheden til at kontrollere at hastighedsgrænsen  $c$  virkelig sikrer *kausaliteten*, altså at to begivenheder, hvor den ene kan være årsag til den anden, kommer i samme rækkefølge i ethvert inertialsystem. Hertil betragter vi to begivenheder, der sker på en linje, som danner vinklen  $\theta$  med  $x$ -aksen i S, og som kan forbindes med et signal med hastigheden  $u \leq c$  i S. Ved at erstatte  $U$  med  $u \cos \theta$  i (2.24) ser vi, at  $\Delta t$  og  $\Delta t'$  under disse omstændigheder har samme fortegn for enhver hastighed  $v$  mellem  $\pm c$ .

På trods af de ovennævnte betragtninger er der ikke noget i vejen for, at man kan realisere en "bevægelse" af et punkt med en hastighed større end lysets. Punktet kan blot ikke være bærer af information. Et eksempel kunne være det oplyste punkt, hvis man fra Jorden lader en laserstråle feje hen over Månens overflade. Et andet eksempel er skæringspunktet mellem to stænger, der krydser hinanden med en vilkårlig lille vinkel  $\theta$ . Som det fremgår af Figur 2.4 er skæringspunktets hastighed proportional med  $1/\tan \theta$ , og kan derfor gøres vilkårlig stor.

Vi vil nu vise det vigtige resultat, at Lorentz-transformationen altid transformerer overlyshastigheder over i overlyshastigheder, og underlyshastigheder over i underlyshastigheder. Hvis vi nemlig lader  $u = dr/dt$  og  $u' = dr'/dt'$  betegne hastighederne af et punkt (eller et signal eller en partikel) i henholdsvis S og  $S'$ , kan vi omskrive (2.22) på formen

$$dt'^2(c^2 - u'^2) = dt^2(c^2 - u^2), \quad (2.26)$$

hvoraf det angivne resultat følger direkte.



**Figur 2.4:** Skæringspunktet mellem to stænger kan bevæge sig med en vilkårlig stor hastighed, idet hastigheden er proportional med  $1/\tan \theta$ , og vinklen  $\theta$  kan gøres vilkårlig lille.

Lad os gøre en sidste interessant iagttagelse baseret på ligning (2.24), som vi nu tolker som bevægelsesligningen for et punkt, der bevæger sig med overlyshastighed. I systemet  $S'$  med hastigheden  $v = c^2/U$ , er  $\Delta t' = 0$ , og bevægelsens hastighed må derfor være uendelig! I den specielle relativitetsteori er “uendelig” altså ikke en invariant hastighed, som den er det i den klassiske mekanik. Til ethvert punkt, der bevæger sig med overlyshastighed, gives der et inertialsystem, hvor hastigheden er uendelig, på samme måde som der til ethvert punkt, der bevæger sig med underlyshastighed, gives et inertialsystem, hvor hastigheden er nul.

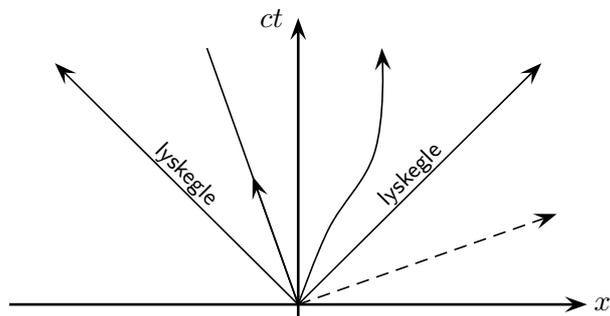
Det kan til slut bemærkes, at en konsekvens af den relativistiske hastighedsgrænse er, at stive legemer ikke længere kan eksistere, ikke engang som idealiserede objekter. Thi for at holde et legeme stift, skal man jo per definition overføre signaler instantant.

stive legemer kan ikke eksistere

## 2.10 Rumtidsdiagrammer

En begivenhed er, som tidligere anført, karakteriseret ved et tidspunkt  $t$  og et sæt af rumlige koordinater  $(x, y, z)$ . Den kan dermed opfattes som et punkt  $(ct, x, y, z)$  i et 4-dimensional kontinuum – den såkaldte *rumtid*. Vi har her, som det er vanligt, valgt at benytte  $ct$  i stedet for  $t$  for den tidslige koordinat, således at alle fire koordinater har samme enheder nemlig længde. Lad os i første omgang begrænse os til at betragte begivenheder, der sker langs den rumlige  $x$ -akse. Vi kan da afbilde rumtiden ved et diagram som i Figur 2.5, hvor den lodrette akse viser  $ct$ , og den vandrette akse viser  $x$ . Diagrammer af denne type kaldes *rumtidsdiagrammer* eller *Minkowski-diagrammer* og kan ofte være nyttige til at illustrere problemer i relativitetsteorien.

For iagttagelse af en partikel i bevægelse kan vi forestille os, at partiklen er udstyret med en pære, der udsender periodiske lysglimt. Lysglimtene repræsenterer dermed en følge af begivenheder. Hvis disse plottes i rumtidsdiagrammet, får vi da en serie af punkter, som i den kontinuerte grænse danner en kurve. En sådan kurve, som jo giver



**Figur 2.5:** Verdenslinjer i et rumtidsdiagram. De to  $45^\circ$ -linjer udgør lyskeglen fra et lysglimt i begyndelsespunktet. De to linjer inden for lyskeglen repræsenterer mulige verdenslinjer for fysiske partikler, mens den stiplede linje repræsenterer en jævn bevægelse med overlyshastighed.

verdenslinje  
verdenspunkt

en komplet beskrivelse af partiklens historie, kaldes partiklens *verdenslinje*. Tilsvarende er begivenheder i rumtidsdiagrammet også kendt under betegnelsen *verdenspunkter*. Verdenslinjen tilsvarende en fri partikel er en ret linje, mens verdenslinjen tilsvarende en accelereret partikel krummer. Dette er skitseret på Figur 2.5. Diskussionen kan udvides til også at gælde geometriske punkter, hvorved enhver funktion  $x = f(t)$  i  $x, t$ -planet definerer en verdenslinje. Hældningen af verdenslinjen i forhold til  $ct$ -aksen,  $dx/d(ct)$ , er et mål for punktets hastighed,  $u/c$ . Ikke alle verdenslinjer repræsenterer mulige historier for en materiel partikel, idet dennes hastighed på intet tidspunkt kan overstige lyshastigheden. Hældningen af en partikels verdenslinje i forhold til  $ct$ -aksen kan således ikke på noget sted overstige  $45^\circ$ .

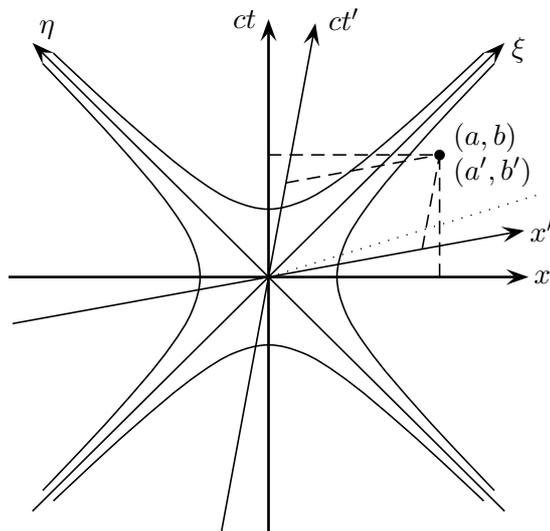
lyskegle

Et lysglimt forårsager en lysfront, som bevæger sig med lyshastigheden. Hvis denne afbildes i rumtidsdiagrammet fås en såkaldt *lyskegle*. I Figur 2.5 findes afbildet lyskeglen for et lysglimt i begyndelsespunktet.

## 2.11 Grafisk repræsentation af Lorentz-transformationen

Det der væsentligt adskiller Lorentz-transformationen fra Galilei-transformationen er, at både rum- og tids-kordinaterne transformerer, og at de sammenblandes på en måde, der kan minde om sammenblandingen af  $x$ - og  $y$ -kordinaterne under en rotation i det sædvanlige retvinklede  $x, y$ -plan. Vi vil i dette afsnit udforske denne lighed nøjere, idet vi begrænser os til kordinaterne  $t$  og  $x$ , som indgår på ikke-triviell måde i Lorentz-transformationen.

Som ved enhver anden transformation er der to måder, hvorpå man kan betragte koordinattransformationen  $(t, x) \mapsto (t', x')$ . *Enten* tænker man sig, at punktet  $(t, x)$  flytter sig til en ny position  $(t', x')$  i forhold til det samme sæt af koordinataksler. Transformationen opfattes altså som en bevægelse i  $t, x$ -rummet. Dette kaldes en *aktiv transformation*. *Ellers* betragter man blot  $(t', x')$  som en ny betegnelse for det gamle punkt  $(t, x)$ . Dette



**Figur 2.6:** Et 2-dimensionalt rumtidsdiagram. Ved en passiv Lorentz-transformation ligger begivenheder i en fast position i diagrammet, mens diagrammets akser ændrer retning, som antydnet. Dette illustreres ved begivenheden, som i systemet S har koordinaterne  $(a, b)$ , mens den i  $S'$  har koordinaterne  $(a', b')$ .

tilsvarende en bevægelse af koordinataksene, og kaldes en *passiv transformation*.

#### Indskud 2.4 Aktive versus passive transformationer

Ved en aktiv transformation sker der en virkelig forflytning af det fysiske system. Transformationen har altså eksistens uafhængigt af, om man har indlagt et referencesystem eller ikke. Ved en passiv transformation derimod, forbliver det fysiske system, hvor det hele tiden har været, mens vi skifter referencesystem og dermed koordinatbeskrivelse. Man kan sige det således, at den aktive transformation tilsvarende en forflytning af objektet, mens den passive transformation tilsvarende en forflytning af iagttageren.

#### 2.11.1 Passive Lorentz-transformationer

På Figur 2.6 findes afbildet et rumtidsdiagram, hvor  $x$ - og  $ct$ -akserne tilsvarende inertialsystemet S. Lad os nu betragte det samme fysiske system fra inertialsystemet  $S'$ , som bevæger sig i forhold til S på sædvanlig måde. Idet  $S'$  dermed deler  $x$ -akse med S, kan vi åbenbart benytte det samme diagram til at beskrive, hvad der sker set fra  $S'$ . Transformationen fra S til  $S'$  vil da blot give sig udtryk i, at  $x'$ - og  $ct'$ -akserne ligger anderledes i det afbildede plan end  $x$ - og  $ct$ -akserne. Vi vil nu undersøge dette forhold.

Tidspunkter i S tilfredsstiller ligningen  $t = \text{konst.}$  og tilsvarende vandrette linjer, mens verdenslinjerne for faste punkter i S tilsvarende lodrette linjer,  $x = \text{konst.}$  På tilsvarende vis tilfredsstiller tidspunkter i  $S'$  ligningen  $t' = \text{konst.}$  og dermed ifølge (2.13)  $ct - (v/c)x =$

konst., således at de i diagrammet tilsvarende rette linjer med hældningen  $v/c$  relativ til  $x$ -aksen. I særdeleshed er  $x'$ -aksen ( $t' = 0$ ) givet ved  $ct = (v/c)x$ . Videre tilfredsstillende verdenslinjer for faste punkter i  $S'$  ligningen  $x' = \text{konst.}$ , og dermed ifølge (2.13)  $x - (v/c)ct = \text{konst.}$ , hvorfor de i diagrammet tilsvarende rette linjer med hældningen  $v/c$  relativ til  $ct$ -aksen. I særdeleshed er  $t'$ -aksen ( $x' = 0$ ) givet ved  $x = (v/c)ct$ . Vi ser således, at akserne i  $S'$  danner vinkler af samme størrelse med hensyn til de tilsvarende akser i  $S$ . Men hvor disse vinkler under en rotation ville have haft samme retning, er de under Lorentz-transformationen modsatrettede.  $S'$  kan have enhver hastighed mellem  $-c$  og  $c$  i forhold til  $S$ , og de tilsvarende  $x'$ - og  $ct'$ -akser vil i diagrammet opføre sig som bladene på en saks, som lukker sig omkring  $45^\circ$ -linjen betegnet  $\xi$  i diagrammet: Saksen er fuldstændig åben for  $v \rightarrow -c$  og fuldstændig lukket for  $v \rightarrow c$ .

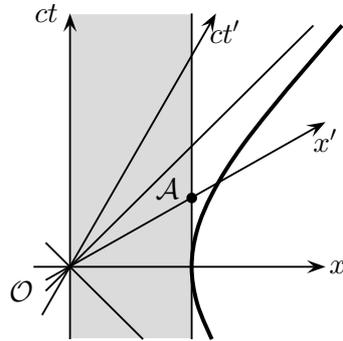
Før vi fortsætter, er det værd at stoppe op og gøre et par punkter klart: I det oprindelige diagram set fra  $S$  valgte vi at afbilde  $x$ - og  $ct$ -akserne ortogonale. Vi bemærker nu, at denne ortogonalitet er uden fysisk indhold, og at vi kunne have tegnet akserne med enhver anden endelig indbyrdes vinkel. Dette illustreres af diagrammet, hvoraf det fremgår, at  $S$  åbenbart er det eneste system, hvor de to akser er ortogonale. Lad os også understrege at  $x$ -aksens retning i diagrammet selvfølgelig intet har at gøre med dens rumlige retning: Skønt diagrammets  $x$ - og  $x'$ -akser indbyrdes danner en endelig vinkel, er de to akser selvsagt stadig sammenfaldende i rummet.

For kalibreringen af de mærkede koordinatakser bemærker vi, at (2.18) reducerer til  $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$ , da vi jo har antaget, at  $y = y'$  og  $z = z'$ . Indtegner vi derfor "kalibrerings-hyperblerne"  $c^2t'^2 - x'^2 = \pm 1$ , vil disse skære alle fire koordinatakser i enhedsafstanden fra begyndelsepunktet. Ved udnyttelse af lineariteten er aksernes inddeling hermed fastlagt. Bemærk altså, at i rumtiden er "afstanden" fra begyndelsepunktet til enhver af de på hyperblerne afbildede begivenheder den samme (nemlig 1). At det selvfølgelig forekommer anderledes ved betragtning af diagrammet skyldes, at repræsentationen af rumtidens geometri på det 2-dimensionale diagram ikke er tro over for afstande. Situationen er her til en vis grad analog til afbildingen af Jordens overflade på et verdenskort. Heller ikke denne repræsentation er tro over for afstande.

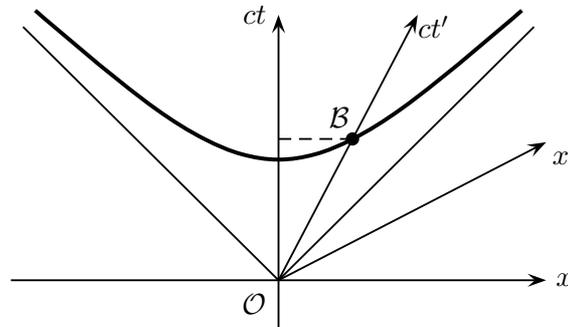
## Anvendelser

Som et første eksempel på anvendelsen af denne grafiske repræsentation af Lorentz-transformationen kan vi betragte den punkterede linje på Figur 2.6, som repræsenterer en jævn bevægelse med overlyshastighed af et punkt i  $S$ . Hvis vi nu forestiller os, at hastigheden af  $S'$  gradvist øges, vil  $x'$ - og  $t'$ -akserne lukke sig mere mod hinanden indtil  $x'$ -aksen først er sammenfaldende med og senere passerer linjen. I det første tilfælde tilsvarende punktets bevægelse en uendelig hastighed i  $S'$ ; i det sidste tilfælde bevæger den sig i den modsatte rumlige retning nemlig fra større imod mindre  $x'$ -værdier.

Også længdeforkortningen og tidsforlængelsen kan aflæses af et rumtidsdiagram. Det skraverede område i Figur 2.7 repræsenterer en stang med enhedslængden i hvile på den rumlige  $x$ -akse i  $S$ . I  $S'$  bevæger stangen sig med hastigheden  $-v$  og optager til tiden  $t' = 0$  stykket  $\mathcal{OA}$  langs  $x'$ -aksen. Dette stykke er kortere end afstanden (langs  $x'$ -aksen)



**Figur 2.7:** En stang med enhedslængden ligger i ro langs  $x$ -aksen i  $S$ . I  $S'$  har stangen længden  $|OA|$ , som er kortere end enhedslængden.



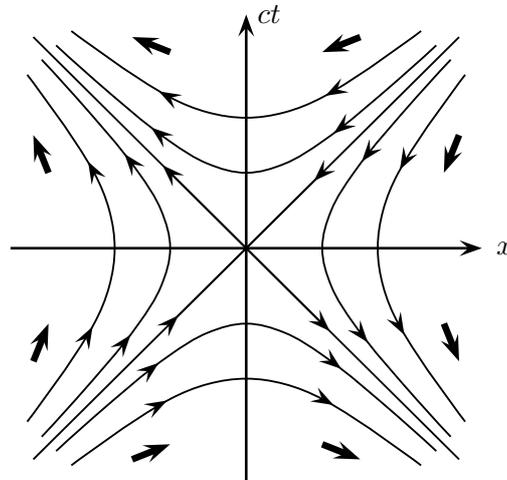
**Figur 2.8:** Et standard-ur er i hvile i punktet  $x' = 0$  og følger dermed  $ct'$ -aksen. Ved  $B$  er der passeret én tidsenhed i  $S'$ . I  $S$  tilsvarende dette en længere tid, hvorfor uret går langsom set fra  $S$ .

til “kalibreringshyperblen” og stangen er dermed kortere end i  $S$ .

På Figur 2.8 er  $ct'$ -aksen verdenslinje for et standard-ur, som er anbragt i et punkt med  $x' = 0$ , og som derfor bevæger sig gennem  $S$  med hastigheden  $v$ . Ved  $B$ , hvor uret krydser kalibreringshyperblen, viser uret  $ct' = 1$ . Imidlertid er den tilsvarende tid  $ct$  i  $S$  åbenbart større end 1. Det bevægede ur går altså langsomt.

### 2.11.2 Aktive Lorentz-transformationer

Under den aktive synsvinkel, bevirker Lorentz-transformationen en flytning af ethvert (verdens-)punkt  $(ct, x)$  til en ny beliggenhed  $(ct', x')$  i det samme diagram med uændrede koordinataksler. Det samme diagram kan dermed benyttes til at repræsentere  $S$  og et vilkårligt andet system,  $S'$ . Havde vi haft at gøre med en rotation i det sædvanlige 3-dimensionale rum omkring f.eks.  $z$ -aksen, ville punkterne have udført en bevægelse



**Figur 2.9:** Under en aktiv Lorentz-transformation ligger rumtidsdiagrammets akser fast, mens ethvert verdenspunkt forflyttes til en ny beliggenhed. Forflytningen sker langs sættet af hyperbler  $(ct)^2 - x^2 = \text{konst.}$

langs et sæt af cirkler defineret ved  $x^2 + y^2 = \text{konst.}$  Under Lorentz-transformation foregår bevægelsen imidlertid langs et sæt af hyperbler  $(ct)^2 - x^2 = \text{konst.}$ , som vist på Figur 2.9. Ethvert punkt må blive på sin hyperbel for at tilfredsstille (2.18), der med  $y = y'$  og  $z = z'$  reducerer til  $(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2$ . De fire kvadranter, som defineres ved de  $\pm 45^\circ$  fælles asymptoter for hyperblerne, transformerer dermed hver for sig over i sig selv. Ligeledes transformerer de to asymptoter hver for sig over i sig selv. Pilene på figuren viser bevægelsesretningen for positive hastigheder  $v$  af  $S'$  i forhold til  $S$ ; des større hastighed des større forflytning.

### 2.11.3 Eksempel: Hyperbolsk bevægelse

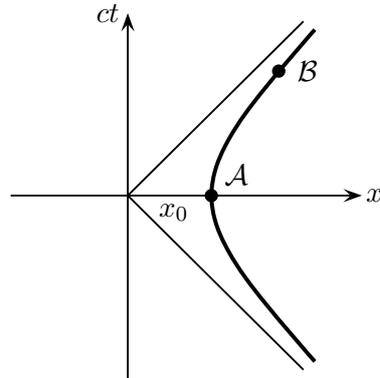
Som et simpelt men vigtigt eksempel betragter vi en partikel, hvis verdenslinje i systemet  $S$  er hyperblen

$$x^2 - c^2t^2 = x_0^2; \quad x > 0, \quad (2.27)$$

som findes afbildet i Figur 2.10. Som funktion af tiden, kommer partiklen altså fra det positive uendelig ind langs  $x$ -aksen, hvor den ligger i øjeblikkelig hvile i  $x = x_0$  til tiden  $t = 0$ , hvorefter den igen forsvinder ud til det positive uendelig. Det interessante ved partiklens bevægelse er, at den har konstant *egen-acceleration*, hvor egenaccelerationen er defineret som accelerationen i det inertialsystem, hvor partiklen er i øjeblikkelig hvile. Idet partiklen jo netop er accelereret, vil et system, der til stadighed følger partiklens bevægelse, ikke være noget inertialsystem. Men til ethvert punkt på partiklens bane kan vi tænke os et inertialsystem, som netop til det givne tidspunkt følger partiklen. Dette system betegnes *det øjeblikkeligt medfølgende inertialsystem*. Systemet afbildet i

Egenacceleration: acceleration i det inertialsystem, hvor partiklen er i øjeblikkelig hvile.

Øjeblikkeligt medfølgende inertialsystem



**Figur 2.10:** En partikel med konstant egenacceleration udfører en hyperbolsk bevægelse.

Figur 2.10 er åbenbart partiklens hvilesystem til tidspunktet  $t = 0$ .

Idet partiklen har konstant egenacceleration, er dens acceleration altså den samme i hele sekvensen af øjeblikkeligt medfølgende inertialsystemer. For at indse dette betragter vi en vilkårlig begivenhed  $\mathcal{B}$  på verdenslinjen og foretager en aktiv Lorentz-transformation, således at  $\mathcal{B}$  bringes til at ligge på den vandrette akse. Ved denne transformation forflyttes alle begivenheder på hyperblen, men selve hyperblen ændres ikke, idet den jo netop transformerer over i sig selv. Begivenheden  $\mathcal{B}$  ligger altså efter transformationen, hvor begivenheden  $\mathcal{A}$  lå før. Og på samme måde som vi før var i hvilesystemet tilsvarende  $\mathcal{A}$ , er vi nu i hvilesystemet tilsvarende  $\mathcal{B}$ . Hvad end partiklens egenacceleration var i  $\mathcal{A}$ , har den derfor samme egenacceleration i  $\mathcal{B}$ . Hermed er det ønskede resultat vist. Lad os yderligere gøre den interessante iagttagelse, at en lyssignal, som afsendes langs den positive  $x$ -akse fra begyndelsepunktet  $x = 0$  til tiden  $t = 0$  aldrig vil nå partiklen. Tværtimod vil lyssignalet til stadighed befinde sig i afstanden  $x_0$  fra partiklen set fra sekvensen af øjeblikkeligt medfølgende inertialsystemer.

## Opsummering af Kapitel 2

- i) Som følge af det specielle relativitetsprincip er samtidigheden af to begivenheder ikke et absolut men et relativt begreb, der afhænger af iagttagerens bevægelse. På samme måde er længden af et legeme i bevægelse en relativ størrelse.
- ii) Det ovennævnte følger af kvantitative overvejelser, men også direkte af Lorentz-transformationen, som erstatter Galilei-transformationen som forbindelsen mellem to inertialsystemer i relativ bevægelse. Lorentz-transformationen har formen

$$\begin{aligned}t' &= \gamma_v (t - vx/c^2), \\x' &= \gamma_v (x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z,\end{aligned}\tag{2.13}$$

hvor Lorentz- $\gamma$ -funktionen er

$$\gamma_v \equiv \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\tag{2.12}$$

- iii) Lorentz-transformationen tager samme form også for koordinatdifferencer og differentialer. Dette leder til de fundamentale identiteter

$$c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2,\tag{2.19}$$

og

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.\tag{2.20}$$

Disse kombinationer af koordinater har altså samme værdi i ethvert inertialsystem, og siges dermed at være invariante.

- iv) Intet inertialsystem og dermed ingen partikel kan bevæge sig med lyshastigheden eller med en hastighed, der overstiger denne. Informationsbærende signaler, der bevæger sig hurtigere end lyshastigheden, ville bryde med kausaliteten, og er dermed en logisk umulighed. Kun abstrakte punkter kan antage overlyshastigheder.

## Gennemregnede eksempler til Kapitel 2

**2.1** To inertialsystemer,  $S$  og  $S'$  bevæger sig i forhold til hinanden på sædvanlig vis. Et ur, der i  $S$  er fast knyttet til punktet  $x = x_0$ , møder et ur, der er stationært i  $S'$ . De to ure viser samme tid, idet de mødes. Find  $x'$ -koordinaten til det sidste ur.

Lad begivenheden tilsvarende de to ures møde have koordinaterne  $(t, x_0)$  i  $S$  og  $(t', x')$  i  $S'$ . Vi ved da, at  $t = t'$ , og vi søger  $x'$ . Ved benyttelse af Lorentztransformationen og dens inverse

$$\begin{aligned}t' &= \gamma_v(t - vx_0/c^2) \\t &= \gamma_v(t' + vx'/c^2)\end{aligned}$$

fås da umiddelbart ved at sætte  $t = t'$  sammenhængen

$$vx'/c^2 = -vx_0/c^2,$$

og dermed resultatet

$$x' = -x_0.$$

**2.2** To inertialsystemer  $S$  og  $S'$  bevæger sig på sædvanlig vis med hastigheden  $v$  i forhold til hinanden. I  $S$  finder to begivenheder,  $A$  og  $B$ , sted samtidigt:  $A$  i  $(0, 0, 0)$  og  $B$  i  $(x, 0, 0)$ . I  $S'$  sker  $B$  tiden  $T$  senere end  $A$ . i) Find den rumlige afstand mellem begivenhederne i  $S'$ ; ii) Bestem hastigheden  $v$  udtrykt ved  $x$  og  $T$ .

i) I  $S$  er alle koordinatdifferencer nul undtagen  $\Delta x = x_B - x_A = x$ . Vi kan nu benytte identiteten (2.19)

$$c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2,$$

som med de opgivne størrelser reducerer til

$$c^2T^2 - \Delta x'^2 = -x^2,$$

hvoraf resultatet følger

$$\Delta x' = x\sqrt{(cT/x)^2 + 1}.$$

Bemærk, at vi har valgt den positive rod, således at  $\Delta x'$  har samme fortegn som  $x$ . Korrektheden af dette følger af (2.16), som med  $\Delta t = 0$  reducerer til  $\Delta x' = \gamma_v\Delta x$ .

ii) Vi anvender Lorentz-transformationen

$$\Delta t = \gamma_v(\Delta t' - v\Delta x'/c^2),$$

som med  $\Delta t = 0$  reducerer til

$$\Delta t' = v\Delta x'/c^2.$$

Ved indsættelse for  $\Delta x'$  og  $\Delta t' = T$  fås da efter omskrivning

$$\frac{v}{c} = \frac{cT}{x} \frac{1}{\sqrt{(cT/x)^2 + 1}}.$$

Bemærk, hvordan fortegnet af  $v$  afhænger af det relative fortegn på  $x$  og  $T$ .

- 2.3** Vis, at en partikel, hvis verdenslinje er givet ved (2.27), har egen-accelerationen  $c^2/x_0$ .

Bemærk først, at partiklen ifølge diskussionen i Afsnit 2.11.3 har konstant egen-acceleration. Vi kan derfor bestemme egenaccelerationen fra bevægelsesligningen (2.27) ved at bestemme accelerationen i et punkt, hvor partiklen ligger i hvile. Dette gør den åbenbart til tiden  $t = 0$ , og vi søger derfor partiklens acceleration til dette tidspunkt.

Differentiation af (2.27) giver

$$2x dx - 2c^2 t dt = 0$$

hvoraf

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 t}{x}.$$

Heraf fås accelerationen ved at differentiere med hensyn til tiden

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = c^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2} \frac{dx}{dt} \right).$$

Egen-accelerationen – altså accelerationen til tiden  $t = 0$  – er da

$$g = c^2/x_0,$$

idet jo  $x_0 = x(t = 0)$ .

## Opgaver til Kapitel 2

- 2.1** *Den inverse Lorentz-transformation.* Invertér Lorentz-transformationen (2.13) og find derved den inverse transformation (2.14).
- 2.2** *Samtidigthed.* Vis ved anvendelse af Lorentz-transformationen, at to begivenheder, der er samtidige i S ( $t_1 = t_2$ ), men foregår i forskellige punkter ( $x_1 \neq x_2$ ), ikke er samtidige i et andet inertialsystem S'.
- 2.3** Findes der nogen iagttager, for hvem Cæsars død og Kristi fødsel er samtidige? Cæsar blev myrdet år 44 f.Kr., og afstanden fra Rom til Betlehem kan sættes til 2300 km.
- 2.4** To begivenheder har i inertialsystemet S koordinaterne  $(ct_1, x_1, y_1, z_1) = (L, L, 0, 0)$  og  $(ct_2, x_2, y_2, z_2) = (L/2, 2L, 0, 0)$ .

a) Der findes et inertialsystem,  $S'$ , i hvilket disse begivenheder er samtidige. Find hastigheden af  $S'$  i forhold til  $S$ .

b) Hvad er den fælles tidskoordinat,  $t'$ , for disse begivenheder i  $S'$ ?

Bemærk: I denne opgave opgives ikke begivenhedernes tidskoordinater,  $t$ , direkte. Derimod opgives  $ct$ , som jo er en længde, nemlig afstanden lyset tilbagelægger i tiden  $t$ . Da imidlertid  $c$  er en konstant, er det selvfølgelig ækvivalent at opgive enten  $t$  eller  $ct$ . Med de i opgaven opgivne størrelser følger, at  $t_1 = L/c$  og  $t_2 = L/2c$ . Dette kan med fordel anvendes, hvis den oprindelige notation volder problemer.

**2.5** To inertialsystemer,  $S$  og  $S'$ , bevæger sig i forhold til hinanden på sædvanlig vis.  $S'$  har hastigheden  $0.6c$  i forhold til  $S$ .

a) En begivenhed sker i  $S$  til tiden  $t_1 = 2 \times 10^{-7}$  s i et punkt med  $x_1 = 50$  m. Til hvilket tidspunkt sker begivenheden i  $S'$ ?

b) En anden begivenhed sker til tiden  $t_2 = 3 \times 10^{-7}$  s i et punkt med  $x_2 = 10$  m. Bestem tidsforskellen mellem de to begivenheder i  $S'$ .

**2.6** For en begivenheds to ikke-trivielle koordinater kan vi vælge  $ct$  og  $x$ . Hermed regner vi både tiden og positionen i længdeenheder, altså f.eks. meter. Vi kan da opfatte  $ct$  og  $x$  som komponenterne af en to-dimensional søjlevektor. Vis, at de tilsvarende koordinater i  $S'$  da er givet ved en matriceligning, hvor transformationsmatricen tager formen

$$\gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix},$$

hvor  $\beta = v/c$ .

**2.7** To inertialsystemer  $S$  og  $S'$  bevæger sig på sædvanlig vis med hastigheden  $v$  i forhold til hinanden. Lad i  $S'$  alle ure i koordinat-gitteret udsende et glimt til samme tidspunkt. Vis, at man fra  $S$  vil observere at glimtene udbreder sig langs den positive  $x$ -akse med hastigheden  $c^2/v$ .

**2.8** Vi betragter to begivenheder  $(ct, x, y, z)$ , der i et inertialsystem  $S$  er givet ved  $(0, 0, 0, 0)$  og  $(1, 2, 0, 0)$ , hvor enhederne overalt er meter. Find hastigheden af inertialsystemer i standardkonfigurationen således at *i*) begivenhederne er samtidige; *ii*) den anden kommer før den første med én længde-enhed ( $ct$ -enhed). Findes der et system, hvor de to begivenheder foregår i samme punkt?

[Se bemærkningen efter Opgave 2.4.]

**2.9** Vis, at hyperblerne  $c^2t^2 - x^2 = a^2$  og  $c^2t^2 - x^2 = -b^2$  begge har asymptoterne  $x = \pm ct$  uafhængigt af værdierne af  $a$  og  $b$ .

**2.10** Systemet  $S'$  bevæger sig på sædvanlig måde med hastigheden  $v = 0.577c$  med hensyn til systemet  $S$ .

- a) Tegn et rumtidsdiagram (som i Figur 2.6) der viser de to systemers indbyrdes bevægelse. Benyt for både  $x$ - og  $ct$ -aksen en skala der går fra 0 til 4 meter (hvad er da skalaen for  $t$ -aksen?). Afmærk skalaen på  $x'$ - og  $ct'$ -akserne.
- b) Afsæt begivenheden med koordinater ( $x = 3$  m,  $ct = 2$  m) på diagrammet. Aflæs så præcis som muligt dette punkts koordinater ( $x'$ ,  $ct'$ ) i  $S'$ . Kontroller resultatet ved direkte anvendelse af Lorentz-transformationen.

## 3 Relativistisk kinematik

Vi har i forrige kapitel set, hvordan Einsteins postulat om lyshastighedens invarians synes at stride mod den sunde fornuft og er i modstrid med den Newtonske kinematik. I dette kapitel skal vi udforske den nye relativistiske kinematik, som imødekommer begge Einsteins postulater. Dens hovedingredienser er længdeforkortningen, tidsforlængelsen og den relativistiske lov for sammensætning af hastigheder. Den sidste har den bemærkelsesværdige egenskab, at man kan "addere" enhver hastighed til lyshastigheden og stadig få lyshastigheden, og at man kan addere et vilkårligt antal underlyshastigheder og stadig altid få en underlyshastighed. I Afsnit 2.2 så vi ved hjælp af kvalitative betragtninger, hvorledes relativitetsprincippet og princippet om lyshastighedens invarians måtte føre til en revideret opfattelse af grundlæggende fysiske begreber som samtidighed, længde og varighed. Vi skal her gennemføre disse betragtninger på en kvantitativ måde, idet vi ved hjælp af Lorentz-transformationen udleder udtryk for, hvordan længder og tidsrum transformerer mellem inertialsystemer. En detaljeret diskussion af samtidighedsbegrebet udsætter vi til Kapitel 5.

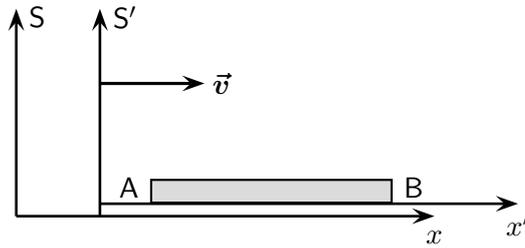
### 3.1 Længdeforkortningen

Til studiet af længders transformationsegenskaber betragter vi en stang AB, der er anbragt i hvile langs  $x'$ -aksen i inertialsystemet  $S'$ , der bevæger sig på sædvanlig måde med hastigheden  $v$  i forhold til et andet inertialsystem  $S$  (Figur 3.1). I  $S'$  vil stangens endepunkter have konstante koordinater  $x'_A$  og  $x'_B$ , hvis differens  $\Delta x' = x'_B - x'_A$  definerer stangens *hvilelængde*  $L_0$ . I systemet  $S$  bevæger stangen sig med hastigheden  $v$  efter  $x$ -aksen. I dette system må dens længde  $L$  – undertiden kaldet *vandrelængden* – derfor bestemmes i overensstemmelse med den tidligere vedtagne definition, idet der til ét og samme tidspunkt afsættes mærker ud for stangens endepunkter. Har et sådant mærkepar koordinaterne  $x_A(t)$  og  $x_B(t)$ , er stangens vandrelængde altså  $\Delta x = x_B(t) - x_A(t)$ , hvor det er væsentligt, at det er den samme tid  $t$ , der indgår i begge led. Ved at sætte  $\Delta t = 0$  i Lorentz-transformationens differens-form (2.16) finder vi nu sammenhængen mellem  $L$  og  $L_0$

hvilelængde

$$\boxed{L = L_0/\gamma_v = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}.} \quad (3.1)$$

Heraf følger generelt, at et legeme i jævn retlinjet bevægelse med hastigheden  $v$  i et inertialsystem  $S$  er forkortet i dets bevægelsesretning med faktoren  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Dette er den tidligere omtalte *længdeforkortning*. Den største længde forekommer således i systemet, i hvilket stangen er i hvile, mens længden i et system, hvor stangens hastighed nærmer sig lysets, vil gå mod nul.



**Figur 3.1:** En stang med hvilelængden  $L_0$  ligger i hvile på  $x'$ -aksen. Stangen observeres fra S, hvor den har den forkortede længde  $L = L_0/\gamma_v < L_0$ .

Vi ser, at (3.1) er i formel overensstemmelse med den forkortning, som Lorentz og Fitzgerald oprindeligt indførte for at forklare den udeblevne effekt ved Michelson-Morley-forsøget. Imidlertid har de to effekter en meget forskellig logisk status. Den oprindelige Lorentz-Fitzgerald-effekt byggede på en hypotese om, at en stang i bevægelse i forhold til æteren forkortedes gå grund af en fysisk vekselvirkning mellem stangens materie og æteren. Derimod forudsætter (3.1) ingen sådan hypotese og ingen æterteori, idet den følger af Lorentz-transformationen og dermed er en direkte konsekvens af relativitetsprincippet postulat om lyshastighedens invarians.

### Eksempel 3.1 Volumenændring

Længdeforkortningen medfører, at også et legemes volumen vil ændres. Har vi et legeme, der er i hvile i  $S'$  og heri har et konstant volumen, vil en iagttagere i S finde dets dimensioner i  $x$ -aksens retning forkortede ifølge (3.1), mens dimensionerne i  $y$ - og  $z$ -aksens retninger er uforandrede. Hvis rumfanget af legemet i  $S'$  er  $V_0$ , vil der altså for rumfanget i S gælde

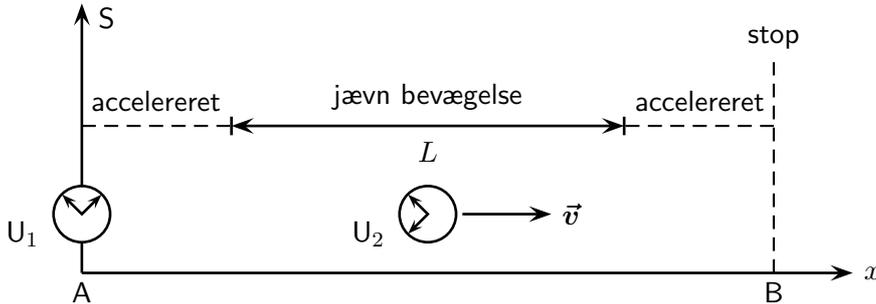
$$V = V_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

## 3.2 Tidsforlængelsen

Vi betragter igen to inertialsystemer S og  $S'$  i standardkonfigurationen. Antag at to begivenheder finder sted ved et standard-ur, som er i hvile i  $S'$ , og at tidsforskellen ifølge dette ur er  $\Delta t'$ . Vi søger nu at finde tidsforskellen, vi skal tilskrive de to begivenheder i S. Ved at benytte den inverse af (2.16) finder vi umiddelbart, idet  $\Delta x' = 0$ , at  $\Delta t = \gamma_v \Delta t'$ , eller ved at erstatte  $\Delta t$  og  $\Delta t'$  med symbolerne  $T$  og  $T_0$ ,

$$T = \gamma_v T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.2)$$

Heraf følger generelt, at et ur i jævn retlinjet bevægelse med hastigheden  $v$  i et inertialsystem S går langsomt med faktoren  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  i forhold til de synkroniserede standard-ure i hvile i S. Dette er den tidligere omtalte *tidsforlængelse*. Den hurtigste rate forekommer altså i et urs hvilesystem, mens raten af et ur, hvis hastighed nærmer sig lysets,



**Figur 3.2:** Hvis et ur bevæges fra A til B og tilbage igen til A, vil det ved tilbagekomsten vise mindre end et tilsvarende ur, som under hele processen har været i hvile ved A.

vil gå mod nul. En fysisk proces har således den korteste varighed i det inertialsystem i hvilket den sker i et fast punkt. Denne tid kaldes processens *egentid*.

egentid

Lad os understrege, at tidsforlængelsen, ligesom længdeforkortningen, er en virkelig fysisk effekt og ikke blot et tilfældigt udfald af vore konventioner. Ure i bevægelse går virkelig langsommere end ure i hvile.

Hvis et standard-ur således bevæges med jævn hastighed gennem et inertialsystem S langs en ret linje fra et punkt A til et punkt B og tilbage igen, vil den forløbne tid  $T_0$ , målt på det bevægede ur, være relateret til den forløbne tid  $T$ , målt på et ur i hvile ved A, gennem (3.2), bortset fra fejl, som måtte være introduceret ved urets acceleration ved bevægelsens begyndelse, retningsændring og afslutning. Men uanset størrelsen af disse fejl kan deres bidrag reduceres simpelthen ved at gøre strækningen med den jævne bevægelse længere. Tidsforlængelsen kan dermed, i det mindste i teorien, verificeres gennem et direkte eksperiment, hvor der kun benyttes ure. Et sådant eksperiment er skitseret på Figur 3.2

### Eksempel 3.2 Et rumfartseksperiment

Som et eksempel tænker vi os at udføre et eksperiment hvor en raket bevæger sig fra Jorden til Månen og tilbage igen, således at den på så godt som hele turen bevæger sig med den jævne hastighed  $u=12$  km/s. Sættes afstanden til 360.000 km, bliver tiden for frem- og tilbage-rejsen målt på et stationært ur på Jorden  $T = 60.000$  s. Af (3.2) finder vi at afvigelsen mellem de to ure er

$$T - T_0 = \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right] T_0 \simeq \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} T_0, \quad (3.3)$$

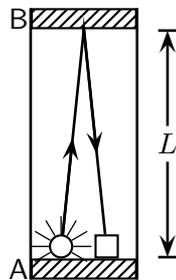
hvor vi har rækkeudviklet  $\gamma$ -faktoren i den lille størrelse  $u^2/c^2$  som i (2.15). I det ovennævnte tilfælde bliver afvigelsen mellem de to ure således  $T - T_0 = 8 \times 10^{-10} T_0 = 5 \times 10^{-5}$  s, og altså yderst beskednen.

For ethvert ur i jævn bevægelse må den specielle relativitetsteoris love for mekanikken (eller elektromagnetismen, eller hvad der nu end driver det aktuelle ur) i princippet være ansvarlige for, at uret går langsommere med præcis Lorentz-faktoren,  $\gamma$ . Generelt hverken kan eller behøver vi at forstå detaljerne bag dette; vi ved blot a priori, at sådan forholder det sig. Som et eksempel vil vi i næste afsnit beskrive et ur, hvis gang er baseret på en lysstråles udbredelse, og hvor vi derfor alene på baggrund af lyshastighedens invarians kan forstå urets langsommere gang.

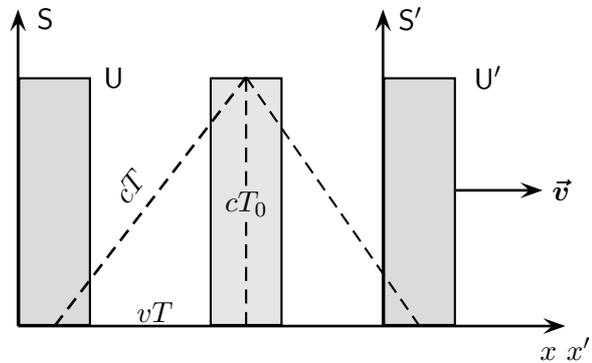
### 3.2.1 Feynman-uret

Tidsforlængelsen kan udledes uden kendskab til hverken Lorentz-transformationen, eller længdeforkortningen, ved følgende tankeeksperiment opkaldt efter Richard Feynman (1918–1988).

På Figur 3.3 er afbildet et instrument forsynet med et spejl ved A og et andet ved B. Begge spejle er vinkelrette på instrumentets længderetning, og deres indbyrdes afstand er  $L$ . Ved A er anbragt en blitz-lampe og en fotocelle. Ved hjælp af lampen udsendes et lysglimt, der udbreder sig i alle retninger. Den del af lyset, der når B, kastes tilbage til A, hvor det registreres af fotocellen, samtidigt med at lysbølgen reflekteres fra A og dermed starter en ny tur frem og tilbage. Dette vedbliver at gentage sig, således at fotocellen med jævne tidsmellemlum vil registrere et lysglimt. Fotocellen tænkes forbundet med en tæller, der vil registrere antallet af lysglimt. Et sådant instrument kan åbenbart benyttes som et ur – et såkaldt Feynman-ur.



Figur 3.3: Et Feynman-ur



Figur 3.4: Et Feynman-ur i bevægelse.

Vi anbringer nu et Feynman-ur  $U$  parallelt med  $y$ -aksen i inertialsystemet  $S$ , og et identisk ur  $U'$  parallelt med  $y'$ -aksen i systemet  $S'$ . Iagttageren i  $S$  og iagttageren i  $S'$  vil da være enige om afstanden mellem spejlene, idet instrumentet bevæges vinkelret på sin længderetning. Lad os antage, at de to ure passerer hinanden lige i det øjeblik, da der udsendes et glimt fra spejlet A. Når fotocellen derefter registrerer glimtets tilbagekomst til A vil situationen være som vist på Figur 3.4. I mellemtiden har iagttageren i  $S$  haft et lyssignal løbende frem og tilbage i sit ur  $U$ . Da lyshastigheden er uafhængig af retningen, varer op- og nedturen lige lang tid  $T_0$ , således at der gælder  $2L = 2cT_0$ . Ganske på samme

måde vil iagttageren i  $S'$  beskrive det, der er sket i hans ur  $U'$ . Når derimod iagttageren i  $S$  skal beskrive det, der sker i  $U'$ , må han tage hensyn til dette urs bevægelse, hvorfor lysvejen er givet ved den punkterede linje på figuren. Han får da umiddelbart relationen

$$c^2 T^2 = v^2 T^2 + c^2 T_0^2,$$

der fører direkte til udtrykket (3.2) for tidsforlængelsen.

### 3.2.2 Sammenhængen mellem længdeforkortning og tidsforlængelse

Mens en målestok i bevægelse vil forkortes, vil varigheden af en proces forlænges. Dette reciproke forhold mellem længder og tidsrum kan også begrundes direkte, idet vi kan slutte os til tidsforlængelsen alene ud fra længdeforkortningen. For at indse dette betragter vi en stang med hvilelængden  $L_0$  anbragt i hvile på  $x$ -aksen i systemet  $S$ . I forhold til  $S'$  bevæger den sig med hastigheden  $-v$  efter  $x'$ -aksen, og vi vil nu betragte stangens passage forbi begyndelsespunktet  $O'$  af  $S'$ . Set fra  $S'$  foregår de to begivenheder tilsvarende endepunkternes passage af  $O'$  i samme punkt, hvorfor tiden  $T_0$  mellem dem tilsvarende egentiden for processen. Denne tid må være lig med forholdet mellem stangens længde  $L$  og dens fart  $v$ , altså

$$T_0 = \frac{L}{v} = \frac{L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{v},$$

hvor vi har benyttet udtrykket (3.1) for længdeforkortningen.

Vi betragter nu situationen fra systemet  $S$  og spørger om, hvor lang tid det tager for  $O'$  at passere forbi stangen fra den ene ende til den anden. Da hastigheden af  $O'$  er  $v$  og stangens længde  $L_0$ , er dette tidsrum bestemt ved

$$T = \frac{L_0}{v}.$$

Af disse to udtryk fremkommer udtrykket (3.2) for tidsforlængelsen direkte.

### 3.2.3 Accelererede ure

For *accelererede* ure er situationen mere kompliceret end for ure i jævn bevægelse. De fleste makroskopiske ure virker dårligt under accelererede bevægelser (tænk blot på bornholmerur i et S-tog). Det er imidlertid en eksperimentel kendsgerning, at ure, hvis funktion er direkte knyttet til mikro-fysiske processer så som atomare overgange eller henfald af elementar-partikler, er upåvirkede af acceleration. I forlængelse heraf defineres et *ideelt* ur som et ur, hvis gang ikke afhænger af accelerationen, men kun af dets øjeblikkelige hastighed i overensstemmelse med (3.2). Lad os forestille os et gitter af synkroniserede standard-ure i et inertialsystem  $S$  og et *ideelt* ur, som foretager en vilkårlig bevægelse gennem dette gitter og derved støt taber tid i forhold til de faste ure. Aflæst på det

accelereret ur

ideelt ur

bevægede ur er den totale tid for bevægelsen, som i S starter til tiden  $t_1$  og slutter til tiden  $t_2$ , dermed

$$\Delta\tau \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt, \quad (3.4)$$

hvor  $t$  er tiden og  $v$  er hastigheden i S, og hvor vi har introduceret størrelsen  $\tau$ , som er *egentiden* for bevægelsen, altså tiden på det ideelle ur, som følger med bevægelsen. Undervejs har vi benyttet sammenhængen  $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$ , som er udtrykket (3.2) for tidsforlængelsen på differentiell form.

### 3.3 Eksperimentel påvisning af tidsforlængelsen

Vi skal i dette afsnit se eksempler på, hvordan man eksperimentelt har kunnet påvise den relativistiske tidsforlængelse.

#### 3.3.1 Eksempel: Direkte påvisning af tidsforlængelsen

Ved hjælp af meget præcise cæsium-ure har man forsøgt eksperimentelt at efterprøve tidsforlængelsen. I ét sådant eksperiment anbragtes et cæsium-ur i et fly, mens et identisk ur blev efterladt i laboratoriet. Man lod nu flyet cirkulere i 15 timer med en hastighed af omkring 140 m/s. Ved eksperimentets afslutning havde det luftbårne ur tabt  $5.6 \times 10^{-9}$  s i forhold til det stationære. Dette var i god overensstemmelse med det forventede tab på  $5.7 \times 10^{-9}$  s. Det skal understreges, at for sådanne jordbaserede eksperimenter er den generelle relativitetsteoris gravitationelle bidrag til tidsforlængelsen lige så stor rolle som den specielle relativitetsteoris bidrag. Eksperimentet giver dermed ikke en bekræftelse af den specielle relativitetsteori isoleret set, men af den kombinerede teori.

#### 3.3.2 Påvisning af tidsforlængelsen ved hjælp af partikelhenfald

Mens en direkte påvisning af tidsforlængelsen ved hjælp af ure er vanskelig, får man i elementarpartikel-fysikken løbende bekræftelse af denne effekt gennem betragtning af ustabile partikler. Enhver type af ustabile partikler har en karakteristisk middellevetid og udgør dermed et naturligt ur.

Henfaldsloven for radioaktivitet siger, at hvis der til tiden  $t = 0$  findes et stort antal,  $N_0$ , ustabile partikler af en given type, så vil det tilbageværende antal til tiden  $t$  være

$$N(t) = N_0 \exp(-t/\tau), \quad (3.5)$$

hvor  $\tau$  er middellevetiden for den givne partikeltype. Specielt ser vi, at til tiden  $t = \tau$  er antallet af partikler formindsket til  $N_0/e$ , hvor  $e \simeq 2.72$  er basis for den naturlige logaritme. Disse udsagn er selvfølgelig af statistisk natur, idet man ikke kan forudsige levetiden til den enkelte partikel. Ydermere er  $N(t)$  heltallig, og kan dermed ikke eksakt følge den jævne eksponentielt aftagende opførsel. Henfaldsloven gælder således strengt taget kun i grænsen, hvor antallet af partikler er uendelig.

Henfaldsloven gælder i partiklernes hvilesystem. Vi vil nu undersøge forholdene, når partiklerne er i bevægelse i forhold til iagttageren. Til dette brug betragter vi et stort antal partikler af en given type, der bevæger sig i samme retning med farten  $v$  i laboratoriet. I tiden  $t$  bevæger partiklerne sig vejlængden  $l = vt$ . Antallet af tilbageværende partikler efter vejlængden  $l$  er derfor

$$N(l) = N_0 \exp(-l/\lambda), \quad (3.6)$$

hvor  $\lambda$  angiver middelvejlængden partiklerne tilbagelægger før de henfalder. Set fra laboratoriesystemet vil partiklernes middellevetid ifølge (3.2) være forlænget med  $\gamma$ -faktoren. Middelvejlængden bliver dermed

$$\lambda = \gamma v \tau = \gamma \beta c \tau, \quad (3.7)$$

hvor  $v = \beta c$ .

### Eksempel 3.3 Intensiteten af en pion-stråle

Som et eksempel betragter vi ladede pioner, som er elementarpartikler med en masse på 276 elektronmasser. De dannes f.eks. når man bombarderer atomkernerne i et stof med meget energirige protoner fra en accelerator. Pionerne er ustabile med middellevetiden  $\tau = 2.6 \times 10^{-8}$  s. I laboratoriet produceres pionerne med meget store hastigheder, der f.eks. kunne være 99% af lyshastigheden. Middellevetiden i laboratoriesystemet vil derfor være forlænget med faktoren  $\gamma = 1/\sqrt{1 - 0.99^2} \simeq 7.1$  til  $\gamma\tau = 1.87 \times 10^{-7}$  s. At dette faktisk er tilfældet, konstaterer man ved at iagttage pionernes middelvejlængde, som i det aktuelle tilfælde bliver  $\lambda = \gamma\beta c\tau = 56$  m. Pionstrålen intensitet formindskes således til  $1/e$  af den oprindelige værdi på en strækning af 56 m.

Vi tænker os nu, at der ingen relativistisk tidsforlængelse fandtes, og spørger da om pionstrålens intensitet 56 m fra kilden. De 56 m ville nu tilbagelægges på 7.1 middellevetider, hvorfor intensiteten ville være formindsket til  $e^{-7.1}$  gange den oprindelige værdi, eller omkring  $1/1200$  af denne. Dette er i modstrid med erfaringen, der viser at intensiteten kun er formindsket til  $1/e$ . Vi har altså hermed en verifikation af tidsforlængelsen.

### Eksempel 3.4 Kosmisk stråling ved jordoverfladen

En lignende effekt kan iagttages ved de muoner, som dannes i de øvre lag af Jordens atmosfære som et resultat af den kosmiske stråling. Den kosmiske stråling, som stammer fra kilder udenfor solsystemet, består hovedsagligt af højenergetiske protoner. Når disse kolliderer med atomkernerne i den øvre atmosfære dannes adskillige pioner. Ved disses forholdsvis hurtige henfald dannes bl.a. muoner, som har en levetid på  $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$  s. Deres levetid er altså omkring 100 gange længere end pionens. Fandtes der ingen tidsforlængelse, ville disse muoner derfor med lyshastighed kun nå at bevæge sig vejlængden  $c\tau \simeq 660$  m ned gennem atmosfæren, og deres intensitet ved jordoverfladen ville have været yderst ringe. Når de alligevel påvises ved jordoverfladen med en forholdsvis høj intensitet,  $I \simeq 1 \text{ cm}^{-2} \text{ min}^{-1}$ , er dette igen en virkning af den relativistiske tidsforlængelse.

### 3.4 Tvillingeparadokset

Ingen fremstilling af relativitetsteorien ville være komplet uden at nævne det notoriske ur- eller tvillingeparadoks. "Paradokset", som tager sigte på at tilbagevise tidsforlængelsen som et ægte fysisk fænomen, udspringer af situationen, vi diskuterede ovenfor, hvor et ur, der transporteres fra A til B og tilbage igen, viser en mindre tid ved tilbagekomsten end et ur i konstant hvile ved A. Ofte prydes historien ved, at urene erstattes med to tvillinger, hvoraf den rejsende er yngre end den tilbageblevne ved genforeningen. Paradokset fremkommer ved at hævde, at al bevægelse er relativ, og at den rejsende dermed med lige så stor ret kan hævde, at det var den tilbageblevne, der blev accelereret, bevægede sig væk og kom tilbage igen, og at derfor denne, og ikke ham selv, skulle være den yngste ved genforeningen. Modstriden tyder på en fejl i ræsonnementet, og det er da heller ikke vanskeligt at se, hvor tankegangen er forkert. Sagen er, at hvor hastighed virkelig er et relativt begreb, så er acceleration det ikke. Acceleration kan måles absolut. De to tvillinger er altså ikke ligeberettigede: Tvillingen i hvile ved A befinder sig stedse i et inertialsystem; tvillingen, der rejser fra A til B og tilbage, befinder sig kun i et inertialsystem i den jævne del af bevægelsen.

#### **Eksempel 3.5 Tvillingeparadokset: En returrejse til Alpha Centauri**

Jordens nærmeste nabo-stjerne, Alpha Centauri, ligger 4 lysår fra Jorden. Hermed menes, at dens afstand fra Jorden tilsvarende den vejlængde, som lyset tilbagelægger på 4 år, altså  $4 \times 365.25 \times 24 \times 60 \times 60 \times 300,000 \text{ km} \simeq 3.8 \times 10^{13} \text{ km}$ . Lad os forestille os, at den nyfødte pige Stella sendes på en returrejse til Alpha Centauri med hastigheden  $v = 0.8 c$ , mens hendes tvillingsøster Terra forbliver tilbage på Jorden. Rejsens varighed set fra Jorden er da 10 år. Ved genforeningen er således Terra 10 år, mens Stella ifølge (3.2) kun er 6 år.

Ovennævnte argumentation følger umiddelbart ved at betragte rejsen fra Jordens inertialsystem. Lad os nu se, hvorledes Stella opfatter rejsen. Set fra rumskibet bevæger Jorden og Alpha Centauri sig med hastigheden  $0.8 c$ . Stella ser da afstanden mellem de to himmellegemer forkortet fra  $s_0 = 4$  lysår til  $s = s_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 2.4$  lysår, hvorfor rejsen derud varer  $\Delta t = 3$  år. Tænker vi os nu, at Stella kigger tilbage på Terra under rejsen, vil hun se, at Terra har alderen  $\Delta t_{\text{Terra}} = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1.8$  år, til det tidspunkt hun selv ankommer til Alpha Centauri. Tidsrum i Jordens system forekommer jo tidsforlængede set fra rumskibet. Idet vi imidlertid ved, at Stella returnerer til Jorden til tiden  $t = 10$  år, kunne vi argumentere på præcis samme vis og finde, at Stella vil se, at Terra har alderen  $(10 - 1.8) = 8.2$  år, på det tidspunkt hun selv forlader Alpha Centauri. Men er dette ikke umuligt? Hvordan kan det gå til, at Stella vil se, at Terra har alderen 1.8 år, når hun selv ankommer til Alpha Centauri og alderen 8.2 år, når hun igen forlader Alpha Centauri? Hemmeligheden ligger i den accelererede del af rejsen, hvor Stellas rumskib ændrer retning. Et resultat fra den generelle relativitetsteori siger, at man, hvis man selv befinder sig i et accelereret referencesystem, vil opfatte, at tiden i ikke-accelererede systemer går hurtigere.<sup>1</sup> I tidsrummet, hvor rumskibet ændrer retning,

<sup>1</sup> Dette kan forøvrigt indses udelukkende ved brug af den specielle relativitetsteori. Som et eksempel

vil Stella da se, at Terra ældes med  $10 - 2 \cdot 1.8 = 6.4$  år. Og dette uanset, hvor kortvarig den accelererede del af bevægelsen måtte være.

Forklaringen, som Stella vil give på, at Terra er ældre end hende selv ved genforingen, er, at Terra ældedes utrolig hurtigt i det korte tidsrum, hvor hun selv følte accelerationen, som fik hende til at returnere mod Jorden.

### 3.5 Transformation af hastigheder

Lad os endnu engang betragte to inertialsystemer S og S' i standardkonfigurationen, og lad  $\vec{u}$  betegne den øjeblikkelige hastighed i S af en partikel eller et geometrisk punkt (for ikke at udelukke muligheden af  $u \geq c$ ). Vi ønsker at finde hastigheden  $\vec{u}'$  af dette punkt i S'. Som i den klassiske mekanik definerer vi

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad (3.8)$$

og

$$\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) = \left( \frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right). \quad (3.9)$$

Vi begynder med  $x$ -koordinaten og finder ved anvendelse af den differentielle form af Lorentz-transformationen (2.17)

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - vdx/c^2} = \frac{dx/dt - v}{1 - (dx/dt)(v/c^2)} = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2},$$

hvor sidste skridt følger af definitionen (3.8). Ved at behandle de øvrige koordinater på tilsvarende vis finder vi transformationsligningerne

$$\boxed{u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma_v(1 - u_x v/c^2)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma_v(1 - u_x v/c^2)}}. \quad (3.10)$$

Undervejs har vi ikke gjort antagelser om at hastigheden  $\vec{u}$  var jævn, og udtrykkene vil derfor gælde generelt, altså for den øjeblikkelige hastighed i en vilkårlig bevægelse. Bemærk ligeledes hvordan de fundne udtryk reducerer til de klassiske udtryk (1.5) for små hastigheder  $v \ll c$ , eller hvis vi formelt lader  $c \rightarrow \infty$ .

Vi opnår nu de modsatte transformationer ved, som når vi går fra (2.13) til (2.14), at erstatte  $v$  med  $-v$  i (3.10), altså

$$\boxed{u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma_v(1 + u'_x v/c^2)}, \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma_v(1 + u'_x v/c^2)}}. \quad (3.11)$$

Disse sidste udtryk kan alternativt tolkes således, at de giver den resulterende hastighed,  $\vec{u}$ , hvis man først tildeler en partikel hastigheden  $\vec{v} = (v, 0, 0)$  og dernæst, i dets nye hvilesystem, en ny hastighed  $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ . De betegnes derfor ofte som formlerne for *sammensætning af hastigheder*.

---

ville man åbenbart, hvis man fulgte muonen i Opgave 5.9, se laboratorieuret gå hurtigere end sit medfølgende ur.

### 3.5.1 Parallele hastigheder

Vi behandler her det vigtige specialtilfælde, hvor en bevægelse i S er parallel med  $x$ -aksen, og dermed i  $S'$  parallel med  $x'$ -aksen. Dens hastighed i de to systemer er dermed henholdsvis  $u = u_x$  og  $u' = u'_x$ . Transformationen (3.10) reducerer da til

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}, \quad (3.12)$$

mens den omvendte transformation bliver

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}. \quad (3.13)$$

Lad os en sidste gang kontrollere at vore transformationer tilfredsstiller Einsteins forudsætning om at lyshastigheden er den samme i alle inertialsystemer. Til dette, betragter vi en lysstråle der bevæger sig med hastigheden  $u' = c$  efter  $x'$ -aksen i  $S'$ . Ved benyttelse af (3.13) finder vi umiddelbart at lysstrålens hastighed i S er  $u = c$  i overensstemmelse med forudsætningen.

### 3.5.2 Størrelsen af sammensatte hastigheder

Idet hastighedernes størrelser i S og  $S'$  er henholdsvis  $u = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$  og  $u' = (u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2)^{1/2}$ , er der muligt ved at indsætte fra transformationsformlerne (3.10) eller (3.11) at finde sammenhængen mellem  $u$  og  $u'$ . Vi vil imidlertid her gå en anden vej, som er aritmetisk enklere. Lad os starte med at gentage sammenhængen (2.26)

$$dt'^2(c^2 - u'^2) = dt^2(c^2 - u^2), \quad (3.14)$$

som betyder, at  $u < c$  medfører  $u' < c$ , og omvendt; at  $u = c$  medfører  $u' = c$ , og omvendt; og at  $u > c$  medfører  $u' > c$ , og omvendt. Altså resulterer enhver sammensætning af to hastigheder, der er mindre end  $c$ , i en ny hastighed, der ligeledes er mindre end  $c$ . Så lige meget hvor mange hastighedsforøgelser en partikel tildeles i dens successive hvilesystemer (altså rækken af inertialsystemer i hvilken partiklen er i øjeblikkelig hvile), så vil den aldrig opnå lyshastigheden.

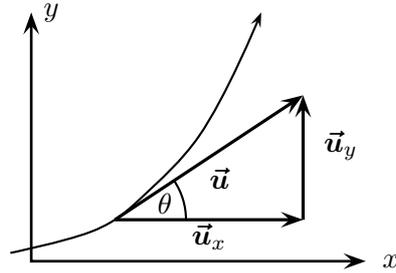
Ved at benytte den inverse af Lorentz-transformationen (2.17) til at substituere for  $dt$  og undervejs benytte, at  $dx' = u'_x dt'$ , tager (3.14) formen

$$dt'^2(c^2 - u'^2) = dt'^2 \gamma_v^2 (1 + u'_x v/c^2)^2 (c^2 - u^2). \quad (3.15)$$

Ved at forkorte igennem med  $dt'^2$  fås efter omskrivning følgende transformationsligning for  $u^2$ , kvadratet på hastigheden:

$$c^2 - u^2 = \frac{(c^2 - u'^2)(c^2 - v^2)}{c^2 (1 + u'_x v/c^2)^2}. \quad (3.16)$$

Bemærk, at  $u'_x v = \vec{u}' \cdot \vec{v}$ , og at højresiden således er symmetrisk i  $\vec{u}'$  og  $\vec{v}$ . Dette betyder, at størrelsen af den resulterende hastighed,  $\vec{u}$ , er den samme uanset i hvilken rækkefølge vi sammensætter to vilkårlige hastigheder,  $\vec{v}$  og  $\vec{u}'$ .



**Figur 3.5:** En partikels bevægelse danner i S vinklen  $\theta$  med  $x$ -aksen. Den tilsvarende vinkel i  $S'$  findes ved anvendelse af transformationsligningerne for hastigheder.

### 3.5.3 Transformation af $\gamma$ -funktionen

Ved benyttelse af sammenhængen  $c^2 - u^2 = c^2/\gamma_u^2$ , som følger direkte af udtrykket (2.12) for  $\gamma$ -funktionen, og tilsvarende for  $u'$  og  $v$ , kan de tre  $\gamma$ -funktioner introduceres i (3.16). Ved derefter at uddrage kvadratroden findes følgende sammenhæng, som angiver hvordan  $\gamma$ -funktionen for en partikel i bevægelse transformerer fra et inertialsystem til et andet

$$\gamma_u = \gamma_v \gamma_{u'} \left( 1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right). \quad (3.17)$$

I det specielle tilfælde, hvor  $u'_x = 0$ , og altså  $\vec{u}'$  står vinkelret på  $\vec{v}$ , reducerer dette til  $\gamma_u = \gamma_v \gamma_{u'}$ .

Som ved tidligere lejligheder finder vi den omvendte transformation ved at bytte om på mærkede og umærkede koordinater og erstatte  $v$  med  $-v$ , altså

$$\gamma_{u'} = \gamma_v \gamma_u \left( 1 - \frac{u_x v}{c^2} \right). \quad (3.18)$$

Bemærk, at vi for ovennævnte sammenhænge implicit har begrænset os til hastigheder mindre end lysets, da  $\gamma$ -funktionen ellers ikke er defineret.

### 3.5.4 Eksempel: Retningen af en bevægelse

Vi vil her finde sammenhængen mellem de vinkler  $\theta$  og  $\theta'$ , som en hastighedsvektor danner med  $x$ - og  $x'$ -aksen, når disse vinkler bedømmes fra to inertialsystemer, S og  $S'$ . Lad, som på Figur 3.5, bevægelsen foregå i  $xy$ -planet, og derfor også i  $x'y'$ -planet. Vi benytter da (3.10), hvor vi sætter  $u'_z = u_z = 0$ . Vinklerne  $\theta$  og  $\theta'$  er da givet ved

$$\cot \theta = \frac{u_x}{u_y}, \quad \text{og} \quad \cot \theta' = \frac{u'_x}{u'_y}.$$

Forholdet  $u'_x/u'_y$  findes ved at dividere den første ligning i (3.10) med den anden, altså

$$\cot \theta' = \gamma_v \cot \theta \left( 1 - \frac{v}{u \cos \theta} \right). \quad (3.19)$$

## Opsummering af Kapitel 3

- i) *Længdeforkortning*: Et legeme i bevægelse forkortes i bevægelsesretningen. Sammenhængen mellem legemets hvilelængde,  $L_0$ , og vandrelængde,  $L$ , er

$$L = L_0/\gamma_v = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (3.1)$$

hvor  $v$  er legemets hastighed.

- ii) *Tidsforlængelse*: Et ur i bevægelse går langsommere end et ur i hvile. Sammenhængen mellem tiden,  $T$ , på det bevægede ur og tiden,  $T_0$ , på et tilsvarende ur i hvile er

$$T = \gamma_v T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3.2)$$

hvor  $v$  er hastigheden af det bevægede ur.

- iii) Lorentz-transformationen leder til følgende sammenhæng mellem hastigheden  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  af en bevægelse målt i S og den tilsvarende hastighed  $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$  målt i S'

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma_v(1 - u_x v/c^2)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma_v(1 - u_x v/c^2)}. \quad (3.10)$$

Disse erstatter de tilsvarende Galileiske udtryk  $u'_x = u_x - v$ ,  $u'_y = u_y$  og  $u'_z = u_z$ .

- iv) Specielt gælder der dermed for parallelle hastigheder

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}. \quad (3.13)$$

Hastigheder lægges altså ikke sammen men *sammensættes*. I forhold til det tilsvarende klassiske udtryk,  $u = u' + v$ , dæmper nævneren udtrykket, således at sammensætningen af to underlyshastigheder altid resulterer i en underlyshastighed.

## Gennemregnede eksempler til Kapitel 3

**3.1** En muon har middellevetiden  $2.2 \times 10^{-6}$  s. Muoner dannes i de højere lag af atmosfæren; de er efterkommere af pioner, der dannes når den primære kosmiske stråling fra verdensrummet støder mod atomkerner i atmosfæren.

Antag at vi betragter muoner med middelvejtlængden 10 km. Find disses hastighed.

Generelt bevæger en partikel med levetiden  $\tau$  sig vejlængden  $d = \gamma v \tau = \gamma \beta c \tau$  i laboratoriet, før den henfalder. Vejlængden er altså proportional med  $\gamma \beta$ . Vi søger her hastigheden, altså  $\beta$ . Lad os være generelle og foretage følgende omskrivning, som let eftervises,

$$\beta \gamma = \frac{1}{\sqrt{\beta^{-2} - 1}}.$$

Hermed er

$$\frac{1}{\sqrt{\beta^{-2} - 1}} = \frac{d}{c\tau},$$

hvoraf

$$\beta = \left[ 1 + \left( \frac{c\tau}{d} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (3.20)$$

Ved indsættelse af de opgivne talværdier fås da det efterspurgte resultat,  $\beta = 0.998$ .

Ofte er man interesseret i partiklens  $\gamma$ -værdi. Her kan vi tilsvarende foretage omskrivningen

$$\beta \gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1},$$

hvoraf nu fås

$$\gamma = \left[ 1 + \left( \frac{d}{c\tau} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.21)$$

Ved indsættelse af talværdier fås da resultatet,  $\gamma = 15.2$ .

De fundne værdier af  $\beta$  og  $\gamma$  skal selvsagt stemme overens, hvilket let kontrolleres.

**3.2** Et rumskib rejser væk fra Jorden med hastigheden  $c/2$ . På et tidspunkt udsender den en redningsbåd i en vinkel på  $60^\circ$  i forhold til sin bevægelsesretning med hastigheden  $c/3$ , begge målt i rumskibets inertialsystem. Find størrelsen og retningen af redningsbådens hastighed målt i Jord-systemet.

Vi lader S og S' betegne henholdsvis Jord-systemet og raketsystemet, og orienterer  $x$ -aksen og dermed  $x'$ -aksen i rumskibets retning. Vi kan da anvende udtrykkene (3.11) for sammensætning af hastigheder direkte, idet  $v$  således angiver rumskibets hastighed, og  $\vec{u}$  og  $\vec{u}'$  angiver redningsbådens hastighed i de to systemer. Dermed er  $v = c/2$ ,  $u'_x = u' \cos \theta' = c/6$ , og  $u'_y = u' \sin \theta' = (\sqrt{3}/6)c$ . Ved indsættelse fås da

$$u_x = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}} c = \frac{8}{13} c \quad \text{og} \quad u_y = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{2}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \right)} c = \frac{3}{13} c$$

hvor vi undervejs har benyttet, at  $\gamma_v = [1 - (\frac{1}{2})^2]^{-1/2} = 2/\sqrt{3}$ . Redningsbådens hastighed i Jord-systemet er dermed

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{\sqrt{73}}{13} c \simeq 0.657 c,$$

i en retning i forhold til rumskibets bevægelsesretning givet ved

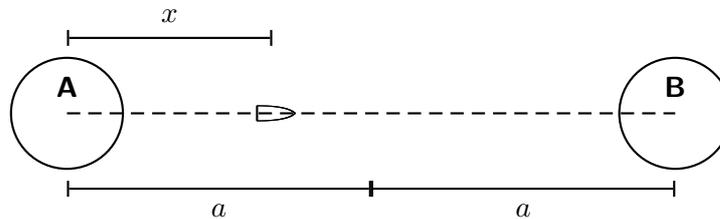
$$\tan \theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{3}{8} \quad \text{og dermed} \quad \theta \simeq 20.6^\circ.$$

Bemærk: Man kan benytte udtrykket (3.16) til at kontrollere, at det fundne resultat for  $u$  er korrekt.

### Opgaver til Kapitel 3

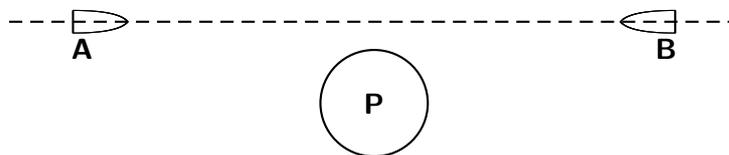
- 3.1** I sit hvilesystem har en retvinklet trekant kanter med længden 1, 1 og  $\sqrt{2}$ . Beregn trekantens vinkler i et system, hvor trekanten bevæger sig med hastigheden  $c/2$  i en retning parallel med den længste kant.
- 3.2** En målestok med hvilelængden  $l_0$  hviler i  $S'$  og danner vinklen  $\phi$  med  $x'$ -aksen. Find målestokkens længde i  $S$ .
- 3.3** En stang med hvilelængden  $l_0$  bevæger sig med jævn hastighed i sin længderetning. Set fra  $S$  tager det tiden  $\tau$  for stangen at passere et fast punkt i  $S$ . Find stangens hastighed.
- 3.4** En ustabil højenergetisk partikel observeres ved hjælp af en detektor. Partiklen efterlader et spor med længden 1.05 mm før den henfalder. Partiklens hastighed i forhold til detektoren var  $0.992c$ . Hvor længe levede partiklen i sit hvilesystem før den henfaldt?
- 3.5** En iagttager står på en perron med længden 65 m på en rumstation. En raket passerer parallelt med perronen med farten  $0.8c$  i forhold til denne. En iagttager på perronen ser, at raketten til et vist tidspunkt har for- og bagende nøjagtigt ud for enderne af perronen.
- Set fra perronen, hvor lang tid tager raketten om at passere et givet punkt på perronen?
  - Hvad er raketens hvilelængde?
  - Hvad er perronens længde set fra raketten?
  - Set fra raketten, hvor lang tid tager det for et punkt på perronen at passere hele raketens længde?

- 3.6** To planeter, A og B, antages at være i hvile i et inertialsystem. En iagttager på A finder, at et lyssignal afsendt fra B til tiden  $t_1$  ankommer til A til tiden  $t_2$ . Begge tidspunkter er målt i planeternes hvilesystem. Et rumskib bevæger sig med jævn hastighed langs den rette linje, der forbinder de to planeter. En iagttager om bord i rumskibet finder, at afstanden mellem A og B er  $L$  målt i rumskibets hvilesystem. Bestem et udtryk for rumskibets hastighed  $v$  i forhold til planeternes hvilesystem.
- 3.7** De to stjerner A og B antages at være i hvile i forhold til hinanden i et inertialsystem. To eksplosioner, den ene på A, den anden på B, finder sted samtidigt bedømt af en iagttager i hvile i forhold til A og B.



Afstanden mellem A og B er  $2a$ . Et rumskib bevæger sig med den konstante hastighed  $v$  mod B på den rette linje, der forbinder A og B. Rumskibet antages at være i afstanden  $x < a$  (målt i A's hvilesystem) fra A, når lyssignalet fra eksplosionen på A modtages. Find tidsdifferencen  $\Delta t'$  for modtagelsen af de to lyssignaler fra eksplosionerne på henholdsvis A og B målt på et ur i hvile i forhold til rumskibet. Resultatet ønskes udtrykt ved  $a$ ,  $x$ ,  $v$  og lyshastigheden  $c$ .

- 3.8** To rumskibe bevæger sig væk fra Jorden i diametralt modsatte retninger begge med hastigheden  $0.7c$ . Dermed vil deres indbyrdes afstand målt i Jord-systemet vokse med hastigheden  $1.4c$ . Hvad er hastigheden af B set fra A? Hvad er hastigheden af Jorden set fra A?
- 3.9** En planet P udfører en inertialbevægelse. En iagttager på P konstaterer, at to rumskibe A og B nærmer sig hinanden på samme rette linje, således at deres indbyrdes afstand formindskes med hastigheden  $(7/5)c$ , hvor  $c$  er lyshastigheden. En iagttager i A konstaterer, at B nærmer sig A med hastigheden  $(35/37)c$ .



Bestem hastighederne af rumskibene A og B, målt i forhold til P.

- 3.10** En stang med hvilelængden  $l_0$  bevæger sig i sin længderetning med hastigheden  $u$  gennem laboratoriet. En partikel bevæger sig langs samme linje i modsat retning med samme fart. Hvor lang tid tager det på laboratorieuret for partiklen at passere stangen.

- 3.11** En stang bevæger sig langs  $x$ -aksen i  $S$  med hastigheden  $u$ . Set fra  $S$  har den længden  $L$ . Hvad er stangens længde  $L'$  i det sædvanlige system  $S'$ ?
- 3.12** I systemet  $S$  ligger partiklen  $A$  i hvile, mens partiklen  $B$  bevæger sig med hastigheden  $u$ . Vi betragter nu et system  $S'$ , som bevæger sig med hastigheden  $v$  i forhold til  $S$ . Find værdien af  $v$  således, at partiklerne i  $S'$  bevæger sig med lige store og modsatte hastigheder i tilfælde af (a) Galilei-transformationen; og (b) Lorentz-transformationen.
- 3.13** En radioaktiv atomkerne bevæger sig med med konstant hastighed  $0.240c$  gennem laboratoriet. Atomkernen henfalder ved udsendelse af en elektron.
- a) Antag først, at elektronen har hastigheden  $0.780c$  målt i kernens hvilesystem. Find elektronens hastighed (størrelse og retning) i laboratoriesystemet i følgende tilfælde:
    - i) Elektronen udsendes i kernens bevægelsesretning;
    - ii) Elektronen udsendes vinkelret på kernens bevægelsesretning set fra kernens hvilesystem;
  - b) Antag dernæst at elektronen i laboratoriesystemet udsendes vinkelret på kernens bevægelsesretning med hastigheden  $0.780c$ . Hvad er i dette tilfælde elektronens hastighed (størrelse og retning) i kernens hvilesystem?
- 3.14** En lyskilde i hvile i  $S'$  udsender et lysglimt med vinklen  $\theta'$  relativ til  $x'$ -aksen. Systemet  $S'$  bevæger sig på sædvanlig vis med hastigheden  $v$  i forhold til laboratoriesystemet  $S$ . Vis, at lysglimtet i  $S$  danner vinklen  $\theta$  med  $x$ -aksen, hvor

$$\cos \theta = \frac{c \cos \theta' + v}{c + v \cos \theta'}.$$

Antag derefter, at kilden kan bringes til at udsende lys isotropt i sit eget referencesystem. Vis, at den halvdel af lyset, som udsendes i den fremadrettede hemsfære, er koncentreret i en kegle med halvvinkel  $\theta = \cos^{-1}(v/c)$  i  $S$ . Vis dernæst, at denne vinkel, for hastigheder tæt på  $c$ , kan approksimeres med  $\gamma_v^{-1}$ .

[Til sidste spørgsmål kan man eventuelt drage nytte af sammenhængen  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , og dernæst approksimationen  $\sin x \simeq x$  for  $x \ll 1$ .]

- 3.15**
- a) To partikler nærmer sig hinanden begge med farten  $u$  langs  $x$ -aksen. Bestem hastigheden,  $w$ , af den ene set fra den andens hvilesystem. For  $u/c \ll 1$  kan man benytte tilnærmelsen  $w \simeq u(a + bu^2/c^2 + \dots)$ . Bestem  $a$  og  $b$ .
  - b) To partikler bevæger sig mod begyndelsepunktet begge med farten  $u$ . Den ene bevæger sig langs  $x$ -aksen, den anden langs  $y$ -aksen. Bestem hastigheden,  $w$ , af den ene set fra den andens hvilesystem. For  $u/c \ll 1$  kan man benytte tilnærmelsen  $w \simeq u(a + bu^2/c^2 + \dots)$ . Bestem  $a$  og  $b$ .

- 3.16** En totrinsraket er således indrettet, at hvert trin forøger rumkapslens fart med den samme størrelse  $u$  i forhold til det system, hvor raketten var i hvile før affyringen. Rumkapslens endelige hastighed i forhold til affyringsrampen er  $c/2$ . Bestem  $u/c$ . (Tyngdeeffekter ignoreres.)
- 3.17** To inertialsystemer,  $S$  og  $S'$ , bevæger sig i forhold til hinanden på sædvanlig vis med hastigheden  $v = 0.6c$ .
- En foton bevæger sig i  $S$  i en retning der danner vinklen  $45^\circ$  med  $x$ -aksen. Hvilken vinkel danner fotonens bane med  $x'$ -aksen i  $S'$ ?
  - Samme spørgsmål for en partikel med massen  $m$  og farten  $u = 0.5c$ .
  - En stang er stationær i  $S$  og danner en vinkel på  $45^\circ$  med  $x$ -aksen. Hvilken vinkel danner stangen set fra  $S'$  med  $x'$ -aksen?



## 4 Relativistisk optik

Optikken er et af de områder, hvor den specielle relativitetsteori medførte betydelige forenklinger. I den forudgående æterteori opførte lyset sig på enkel måde kun i ætersystemet, og man måtte tage hensyn til, hvordan både kilde og iagttager bevægede sig i forhold til æteren. Relativitetsteorien overflødiggjorde æteren og den rolle denne spillede som mellemmand for lysets udbredelse: Vi ved nu, at lyset udbreder sig på samme måde i ethvert inertialsystem, som man oprindeligt troede, det kun gjorde i ætersystemet.

### 4.1 Doppler-effekten

Bølger, som udsendes fra en kilde, der nærmer sig, har en højere frekvens end bølger fra en stationær kilde. Set fra kildens system skyldes dette, at iagttageren bevæger sig ind i bølgetoget. Set fra iagttagerens system skyldes det, at kilden følger efter de udsendte bølger og at disse dermed bliver tættere pakket. Det modsatte sker, når kilden bevæger sig væk fra iagttageren. Dette fænomen, som har fået navn efter den østrigske fysiker C. Doppler (1805–1853), eksisterer for alle former af bølgefænomener så som bølger på vandoverfladen, lydbølger og lysbølger.

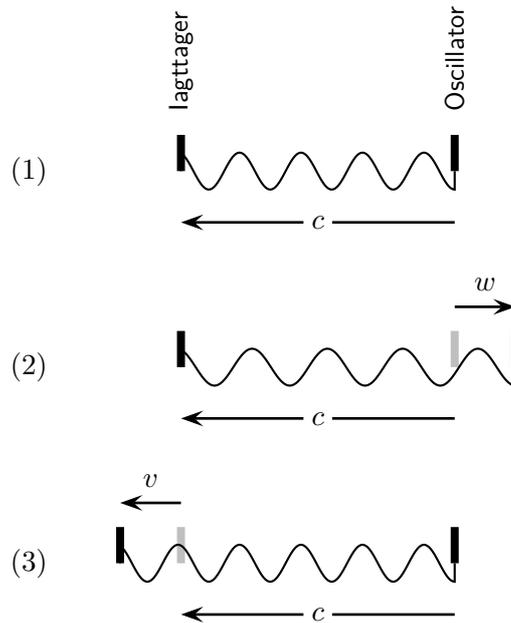
#### 4.1.1 Den klassiske Doppler-effekt

Vi starter med at betragte den klassiske Doppler-effekt, som forudsætter en bølgebevægelse, der udbreder sig med en konstant hastighed i et medium i hvile i et inertialsystem. Vi kan tænke på en lydbølge i luften, eller en lysbølge i det tomme rum. For lysbølgen må vi imidlertid under denne klassiske betragtning falde tilbage på æterteorien, således at vi tænker os at æteren udgør udbredelsesmediet. Bølgen udsendes fra en oscillator (lydgiver eller lyskilde) og registreres af en iagttager. Doppler-effekten viser sig da ved, at bølgen skifter frekvens, når oscillatoren eller iagttageren eller begge bevæger sig i forhold til mediet.

Vi betegner for en plan, monokromatisk bølge

- $c$  bølgens udbredeshastighed i mediet;
- $w$  oscillatorens hastighed i forhold til mediet;
- $v$  iagttagerens hastighed i forhold til mediet;
- $\nu_0$  oscillatorens frekvens;
- $\nu$  den iagttagne frekvens;

hvor vi, som på Figur 4.1, har valgt at definere hastighedernes fortegn således, at både  $v$  og  $w$  regnes positive når oscillator og iagttager bevæger sig væk fra hinanden. Vi betragter nu følgende tilfælde, som illustreret på Figur 4.1.



**Figur 4.1:** En oscillator udsender bølger, som registreres af en iagttager. Det antages, at bølgerne udbreder sig med hastigheden  $c$  i et medium. Tre situationer er vist: (1) Både oscillator og iagttager er i hvile i forhold til mediet; (2) Oscillatoren bevæger sig, iagttageren er i hvile; (3) Iagttageren bevæger sig, oscillatoren er i hvile.

1. Både kilden og iagttageren er i hvile i forhold til mediet ( $v = 0$ ;  $w = 0$ ):  
Den iagttagne frekvens er lig med oscillatorfrekvensen  $\nu_0 = 1/T_0$ , hvor  $T_0$  er tiden mellem udsendelsen af to på hinanden følgende bølgetoppe;
2. Iagttageren er i hvile mens kilden bevæger sig ( $v = 0$ ;  $w \neq 0$ ):  
I tiden  $T_0$  mellem udsendelsen af to bølgetoppe bevæger oscillatoren sig stykket  $wT_0$  bort fra iagttageren. Den anden bølgetop bevæger sig således dette stykke længere end den første, hvorfor tiden mellem ankomsten af de to bølger er

$$T = T_0 + \frac{wT_0}{c} = T_0(1 + w/c).$$

3. Iagttageren bevæger sig mens kilden er i hvile ( $v \neq 0$ ;  $w = 0$ ):  
I tiden  $T$  mellem modtagelsen af to bølgetoppe bevæger iagttageren sig stykket  $vT$  bort fra oscillatoren. Den anden bølgetop bevæger sig derfor dette stykke længere end den første, hvorfor tiden mellem ankomsten af de to bølger er

$$T = T_0 + \frac{vT}{c} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_0}{1 - v/c}.$$

I det tilfælde, hvor både oscillatoren og iagttageren er i bevægelse i forhold til mediet, kombineres argumenterne ovenfor, hvorfor tiden mellem ankomsten af to bølger generelt er

$$T = T_0 \frac{1 + w/c}{1 - v/c}.$$

Da frekvensen er omvendt proportional med perioden er udtrykket for den *klassiske Doppler-effekt* derfor

$$\boxed{\frac{\nu_{kl}}{\nu_0} = \frac{1 - v/c}{1 + w/c}} \quad (4.1)$$

Det kan umiddelbart bemærkes, at dette udtryk må modificeres i den relativistiske teori, altså for beskrivelsen af lysbølger. Den klassiske effekt afhænger jo netop af både oscillatorens ( $w$ ) og iagttagerens ( $v$ ) hastighed i forhold til mediet. I den relativistiske fremstilling må vi derimod kræve, at den iagttagne frekvens alene afhænger af den *relative* hastighed af kilde og iagttager.

### 4.1.2 Den relativistiske Doppler-effekt

Vi anlægger nu en relativistisk betragtning, idet vi ønsker at beskrive udbredelsen af lysbølger. Vi vil imidlertid i første omgang gå frem ved, som i det klassiske tilfælde, at betragte bevægelsen af oscillator og iagttager som separate fysiske fænomener. Dette gør vi vel vidende at de to situationer under den relativistisk betragtning må være ækvivalente. Igen går vi altså frem ved at følge Figur 4.1:

1. Både kilden og iagttageren er i hvile i forhold til mediet ( $v = 0$ ;  $w = 0$ ):

Den iagttagne frekvens er lig med oscillatorfrekvensen  $\nu_0 = 1/T_0$ .

2. Iagttageren er i hvile mens kilden bevæger sig ( $v = 0$ ;  $w \neq 0$ ):

I iagttagerens inertialsystem er det for kilden karakteristiske tidsinterval  $T_0$  grundet den relativistiske tidsforlængelse forlænget med  $\gamma$ -faktoren  $\gamma_w = 1/\sqrt{1 - w^2/c^2}$ . Herefter er argumentationen den samme som i det ikke-relativistiske tilfælde, hvorfor tiden mellem ankomsten af to bølgetoppe er

$$T = T_0 \frac{1 + w/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \quad (4.2)$$

3. Iagttageren bevæger sig mens kilden er i hvile ( $v \neq 0$ ;  $w = 0$ ):

I laboratoriesystemet er tiden mellem modtagelsen af to bølgetoppe, som i det ikke-relativistiske tilfælde,  $T_0/(1 - v/c)$ . Modtagelsen af de to bølgetoppe sker i laboratorie-systemet i to forskellige rum-punkter, hvorfor laboratorietiden er forlænget med  $\gamma$ -faktoren  $\gamma_v = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  i forhold til tiden i iagttagerens system, som tilsvarende egentiden. Tiden i iagttagerens system er dermed

$$T = T_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c}. \quad (4.3)$$

Betragter vi nu situationen, hvor kilden og iagttageren bevæger sig væk fra hinanden med den *relative* hastighed  $u$ , kan dette f.eks. opnås ved enten i (4.2) at sætte  $w = u$  eller ved i (4.3) at sætte  $v = u$ . Ved en simpel aritmetisk omskrivning finder vi, at

$$\frac{1 + u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u/c},$$

hvorfor de to udtryk (4.2) og (4.3) er identiske, som vi jo netop må kræve af en relativistisk invariant teori. Ved f.eks. at vælge formen (4.2) for  $T$  finder vi nu følgende udtryk for den *relativistiske Doppler-effekt*

$$\frac{\nu_{\text{rel}}}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + u/c}, \quad (4.4)$$

som også kan skrives på formen

$$\boxed{\frac{\nu_{\text{rel}}}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}}. \quad (4.5)$$

Man har ofte brug for at udtrykke Doppler-effekten ved bølgelængder snarere end som ovenfor ved frekvenser. Dette opnås enkelt via den geometriske sammenhæng,

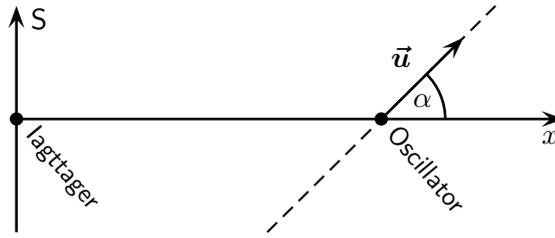
$$\boxed{c = \lambda\nu}, \quad (4.6)$$

mellem en bølges udbredelseshastighed,  $c$ , bølgelængde,  $\lambda$ , og frekvens,  $\nu$ . Der er altså et reciprok forhold mellem bølgelængden og frekvensen, hvorfor udtrykket (4.5) for Doppler-effekten umiddelbart tager formen

$$\boxed{\frac{\lambda_{\text{rel}}}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}}. \quad (4.7)$$

### Ikke-parallele hastigheder

Ved ovenstående betragtninger er vi stiltiende gået ud fra, at de tre hastigheder  $c$ ,  $v$  og  $w$  var parallelle. Vi vil nu undersøge effekten, når dette ikke er tilfældet, idet vi her indskrænker os til alene at betragte virkningen af, at kildens hastighed ikke er parallel med bølgens. Til dette brug tænker vi os en situation, som illustreret på Figur 4.2, hvor iagttageren er i hvile i begyndelsepunktet af et inertialsystem S, mens kilden befinder sig på den positive  $x$ -akse. Kilden bevæger sig med hastigheden  $u$ , som danner vinklen  $\alpha$  med  $x$ -aksen. Afstanden mellem kilde og iagttager tænkes at være meget stor, således at kildens bevægelse i det betragtede tidsrum er forsvindende i sammenligning. Idet tidsforlængelsen mellem kildens og iagttagerens inertialsystemer ikke afhænger af retningen af  $u$ , vil iagttageren ligesom i det parallelle tilfælde opleve tiden mellem udsendelsen af to bølgerflader forlænget med faktoren  $\gamma_u = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$  til  $\gamma_u T_0$ . I dette tidsrum



**Figur 4.2:** Oscillatoren bevæger sig i en retning, som danner vinklen  $\alpha$  med forbindelseslinjen mellem iagttageren og oscillatoren.

bevæger kilden sig stykket  $\gamma_u T_0 u \cos \alpha$  væk fra iagttageren. Tiden mellem modtagelsen af to bølger er derfor

$$T = T_0 \frac{1 + (u/c) \cos \alpha}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.8)$$

og det generelle udtryk for den relativistiske Doppler-effekt er dermed

$$\boxed{\frac{\nu_{\text{rel}}}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + (u/c) \cos \alpha} = \frac{1}{\gamma_u [1 + (u/c) \cos \alpha]}.} \quad (4.9)$$

Specielt kan det bemærkes, at vi for  $\alpha = \pi/2$  har en *transversal Doppler-effekt*, som er bestemt ved

transversal  
Doppler-effekt

$$\boxed{\frac{\nu_{\text{trans}}}{\nu_0} = \sqrt{1 - u^2/c^2} = \frac{1}{\gamma_u}.} \quad (4.10)$$

Det indses let, at den transversale Doppler-effekt udelukkende skyldes den relativistiske tidsforlængelse, og at en tilsvarende effekt ikke er til stede i den klassiske beskrivelse.

### 4.1.3 Relativistisk versus klassisk Dopplereffekt

Vi vender nu tilbage til det en-dimensionale tilfælde for at undersøge nøjere hvordan den relativistiske Doppler-effekt adskiller sig fra den klassiske. I det klassiske tilfælde afhænger effekten af hvorvidt det er kilden eller iagttageren der bevæger sig i forhold til mediet. I det tilfælde, hvor iagttageren er i hvile mens kilden bevæger sig bort med hastigheden  $\beta = u/c$ , er forholdet mellem den iagttagne og den udsendte frekvens ifølge (4.1) givet ved

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1}{1 + \beta} = 1 - \beta + \beta^2 + \dots \quad (4.11)$$

I det modsatte tilfælde, hvor kilden er i hvile mens iagttageren bevæger sig bort, fås

$$\frac{\nu}{\nu_0} = 1 - \beta. \quad (4.12)$$

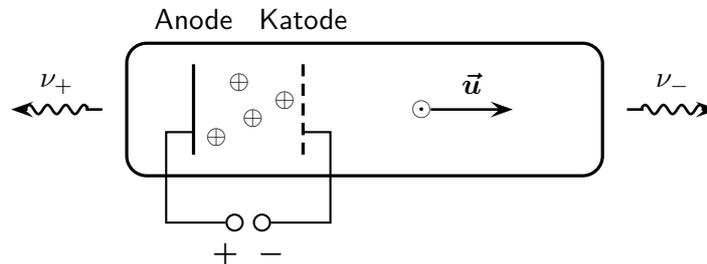
De to udtryk er identiske til første orden i  $\beta$ , men adskiller sig til anden orden. For den relativistiske Doppler-effekt skelnes ikke mellem bevægelse af kilden og bevægelse af iagttageren, idet man i begge tilfælde ifølge (4.5) finder

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = 1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2 - \dots \quad (4.13)$$

Det kan bemærkes, at dette udtryk er givet ved gennemsnittet af de to klassiske udtryk, og at den relativistiske effekt udelukkende adskiller sig fra den klassiske ved led af anden orden i  $\beta$ . Da Doppler-effekten i sig selv er af første orden i  $\beta$ , vil den relativistiske korrektion altså for almindeligt forekommende hastigheder være langt mindre end den klassiske effekt.

#### 4.1.4 Eksempel: Ives-Stilwell forsøget

Skønt sin lille størrelse lykkedes det i 1938 for første gang de to amerikanske fysikere H. E. Ives og G. R. Stilwell at påvise den relativistiske korrektion til Doppler-effekten ved at udføre spektroskopiske målinger på stråler af eksiterede brint-atomer. Atomerne accelereredes ved at man først dannede kortlivede atomare brint-ioner,  $\text{H}_2^+$  og  $\text{H}_3^+$ , som udsattes for et kraftigt elektrisk felt mellem anode og katode i et såkaldt kanalstrålerør. Efter accelerationen gendannedes atomar brint ved ionernes henfald. Spændingsforskellen reguleredes så atomernes hastighed var  $u/c = 4.5 \times 10^{-3}$ .



**Figur 4.3:** Kanalstrålerør anvendt af Ives og Stilwell til påvisning af den relativistiske Doppler-effekt.

Ved eksperimentet målttes frekvensen af en bestemt linje i brint-spektret. Lad denne frekvens være  $\nu_0$  i et system i hvilket brint-atomerne er i hvile. Værdien  $\nu_0$  er da i forvejen kendt fra spektroskopien. Spektret observeres nu fra både anode-ende ( $\nu_+$ ) og katode-ende ( $\nu_-$ ) af røret, og ifølge (4.5) finder man frekvenserne

$$\nu_+ = \nu_0 \sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}}, \quad \text{og} \quad \nu_- = \nu_0 \sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}.$$

For middeltallet af de to frekvenser giver den relativistiske beskrivelse altså

$$\bar{\nu}_{\text{rel}} = \frac{1}{2}(\nu_+ + \nu_-) = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \quad (4.14)$$

Af (4.1) finder man på tilsvarende vis, at den klassiske beskrivelse af eksperimentet ville føre til et middeltal bestemt ved

$$\bar{\nu}_{\text{kl}} = \frac{\nu_0}{1 - u^2/c^2}. \quad (4.15)$$

I det foreliggende tilfælde er  $\nu_0$  omtrent 0.02 promille mindre end  $\bar{\nu}_{\text{rel}}$ , der igen er 0.02 promille mindre end  $\bar{\nu}_{\text{kl}}$ .

Forsøget udførtes nu på den måde, at lysstrålerne fra de to ender af udladningsrøret, sammen med lys fra hvilende brint-ioner ved hjælp af en spejlanordning sendtes ind i et interferensspektroskop. Ives og Stilwell kunne da konstatere, at der mellem  $\nu_0$  og middeltallet  $\bar{\nu}$  var en forskel, som helt udelukkede den klassiske formel (4.15), men var i overensstemmelse med den relativistiske formel (4.14).

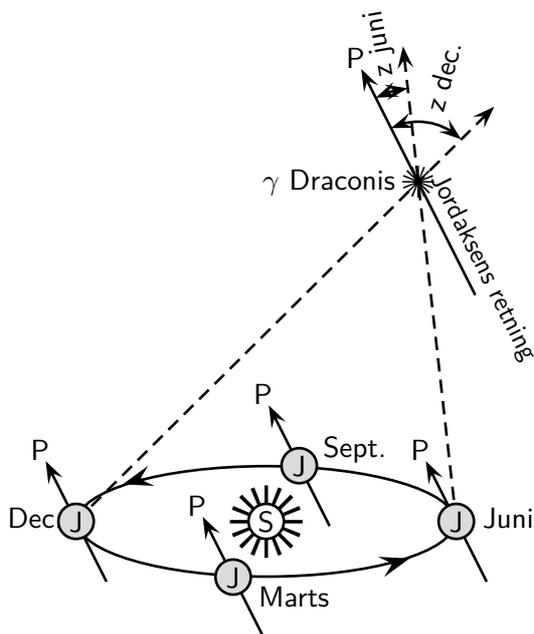
## 4.2 Lysets aberration

Enhver der har prøvet at køre gennem lodret faldende regn eller sne ved, at denne synes at ramme en skråt forfra, med en vinkel der afhænger af hastigheden, hvormed man kører. En lignende effekt gør sig gældende for lys, og er kendt under betegnelsen *lysets aberration*.

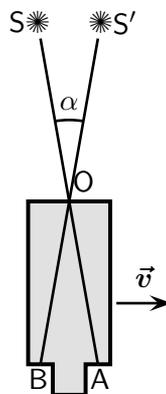
Lysets aberration opdagedes i 1727 af den engelske astronom J. Bradley (1692–1762) under sine bestræbelser på at konstatere en årlig parallakse af fiksstjernerne og dermed bevise Jordens bevægelse omkring Solen. For at undgå virkningerne af den atmosfæriske refraction observerede Bradley hovedsageligt i nærheden af zenit. Det lykkedes Bradley at påvise en årlig variation i positionen af stjernen  $\gamma$  Draconis, men en nærmere analyse viste, at fænomenet ikke kunne tolkes som en parallakse, idet det ikke havde maksimum og minimum til de rigtige tidspunkter.

På Figur 4.4 ses Jorden J i fire forskellige stillinger af sin årlige bane omkring Solen S. Jordens akse har en konstant retning i rummet og peger derfor i alle stillinger mod himmelpolen P. Parallaxen skulle da give sig til kende ved, at synslinjen fra Jorden til stjernen varierer, således at zenitdistancen  $z$  blev størst i december og mindst i juni. Ved jævndøgn i marts og september skulle  $z$  have en middelværdi. Observationerne viste imidlertid, at variationen af  $z$  var nul i juni og december, mens  $z$  var  $40''$  større i september end i marts. Andre stjerner viste tilsvarende forskydninger, idet de alle omkring en middelposition udførte små årlige bevægelser i elliptiske baner. Alle disse ellipser havde samme storakse  $40''$ , men forskellige lilleakser.

Idet Bradley indså, at de omtalte forskydninger i alle tilfælde var parallelle med Jordens øjeblikkelige hastighed, erkendte han dem som en følge af, at denne hastighed  $v$  ikke er forsvindende i forhold til lyshastigheden. Dette fænomen kaldes lysets *aberration* og forstås ud fra Figur 4.5, der viser en stjerne S, som sender lys ind gennem et kikkertobjektiv ved O. Er kikkerten i hvile vil der da dannes et billede af stjernen i objektivets brændplan ved A. Men er kikkerten i bevægelse med hastigheden  $v$  vinkelret på sin længderetning, vil billedet af S dannes i brændplanet ved B, idet kikkerten har bevæget sig stykket  $|AB|$  i den tid, lyset er på vej igennem den fra O til brændplanet. Stjernen



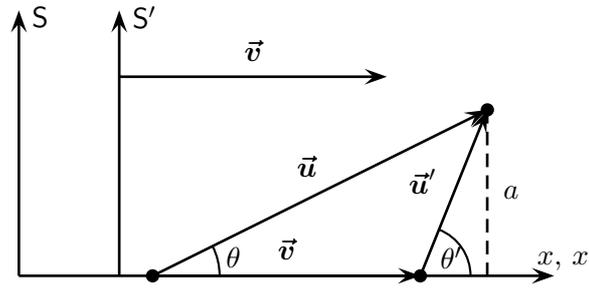
**Figur 4.4:** Ved en præcis observation af fiksstjernes position gennem året kan man eftervise lysets aberration, som er et resultat af Jordens hastighed i sin bane omkring Solen.



**Figur 4.5:** Grundet lysets aberration forekommer stjernen at være i positionen  $S'$  og ikke i den sande position S.

ses da ikke i retningen AOS, men i retningen BOS', således at synslinjen er forskudt vinklen  $SOS' = \alpha$  i retning af kikkertens bevægelsesretning. Denne vinkel  $\alpha$  bestemmes let ud fra sammenhængen

$$|AB| = \frac{v}{c} |OA|$$



Figur 4.6

hvoraf følger

$$\tan \alpha = \frac{v}{c}.$$

Da Jordens banehastighed er  $v \simeq 30$  km/s og  $c = 300\,000$  km/s, bliver  $\alpha \simeq \tan \alpha \simeq 10^{-4} \simeq 20''$ , svarende til at storaksen i alle aberrationsellipser bliver det dobbelte, hvilket stemmer godt med den observerede værdi.

Det er interessant at bemærke, at Bradley vendte de ovenfor beskrevne argumenter omkring og derigennem var i stand til at foretage en tidlig måling af lysets hastighed.

#### 4.2.1 Klassisk aberration

Mere alment fås den *klassiske aberrationsformel* ud fra Figur 4.6, der viser to inertialsystemer S og S' med den relative hastighed  $\vec{v}$ . En bevægelse foregår i S' med hastigheden  $\vec{u}'$  under vinklen  $\theta'$  med  $x'$ -aksen. I S har den hastigheden  $\vec{u}$ , der danner vinklen  $\theta$  med  $x$ -aksen. Galilei-transformationen fører da til relationen  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}'$ , mens vi af trekkanterne på figuren får

$$\cot \theta = \frac{v + u' \cos \theta'}{a} \quad \text{og} \quad \cot \theta' = \frac{u' \cos \theta'}{a},$$

hvoraf

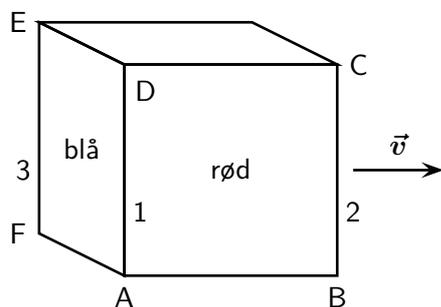
$$\frac{\cot \theta}{\cot \theta'} = \frac{v + u' \cos \theta'}{u' \cos \theta'}$$

eller

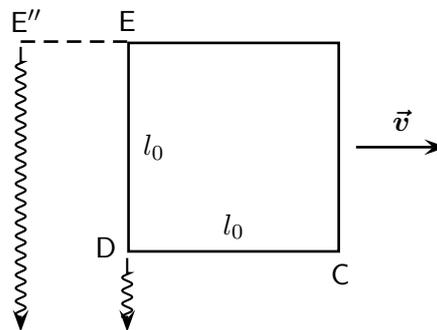
$$\cot \theta = \cot \theta' \left( 1 + \frac{v}{u' \cos \theta'} \right). \quad (4.16)$$

Er der specielt tale om bevægelsen af en lysstråle, får vi heraf ved at sætte  $u' = c$

$$\cot \theta = \cot \theta' \left( 1 + \frac{v}{c \cos \theta'} \right). \quad (4.17)$$



Figur 4.7



Figur 4.8

### 4.2.2 Relativistisk aberration

Den *relativistiske aberrationsformel* fås direkte fra formel (3.19) for retningen af en bevægelse, der med  $u = c$  giver

$$\cot \theta = \gamma_v \cot \theta' \left( 1 + \frac{v}{c \cos \theta'} \right). \quad (4.18)$$

## 4.3 Den tilsyneladende form af bevægede objekter

Vi skal i dette afsnit behandle spørgsmålet om, hvilken indflydelse længdeforkortningen har på den tilsyneladende form af bevægede objekter. Som vi har set, følger længdeforkortningen direkte af den vedtagne metode til længdemåling: længden af en stang defineres som afstanden mellem mærker, der samtidigt afsættes ud for dens endepunkter, idet samtidighed defineres ved hjælp af lyssignaler som omtalt i Afsnit 2.2.1.

Vi kan nu først indse, at man ikke foretager nogen længdemåling af et objekt i bevægelse hverken ved at *betragte* det med øjet, eller ved at *fotografere* det med et kamera. I begge tilfælde afbildes objektet (på nethinden eller på filmen) ved hjælp af lysstråler, der afgår fra de forskellige punkter A, B, C, ... af objektet, og ankommer til de tilsvarende billedpunkter A', B', C', ... på nethinden eller på filmen på samme tid. I almindelighed vil de stråler, der samtidigt ankommer til billedpunkterne, ikke være afgået samtidigt fra genstandspunkterne. For et objekt i bevægelse kan man derfor ikke betragte afstande på billedet som proportionale med de tilsvarende afstande på genstanden, der altså på grund af sin bevægelse vil afbildes med en vis forvrængning.

Hvorledes denne forvrængning vil ytre sig kan vi indse ved, som på Figur 4.7, at betragte en terning ABCDEF, hvis kanter har hvilelængden  $l_0$ . Det antages at terningen bevæger sig med hastigheden  $v$  parallelt med kanten AB, og at iagttageren befinder sig langt borte i retning af fladen ABCD's normal.

Vi betragter først situationen ikke-relativistisk. Der er da ingen længdeforkortning, hvorfor iagttageren vil opfatte forfladen som kvadratisk med kantlængden  $l_0$ . Imidlertid

vil han se sidefladen i en vis forkortning. Dette skyldes, at han samtidigt med lyset fra D også vil modtage lys fra hjørnet E, der afgik lidt tidligere på et tidspunkt, da E befandt sig i punktet E''. På Figur 4.8 er situationen vist set fra oven. Det fremgår heraf, at lyset fra E må afgå tiden  $l_0/c$  tidligere end lyset fra D for at ankomme samtidigt til iagttageren. Men i dette tidsrum har terningen bevæget sig stykket

$$E''E = l_0 \frac{v}{c}.$$

Billedet af terningen vil derfor blive som vist på Figur 4.9 og altså bestå af et kvadrat A'B'C'D' med kanten  $l_0$ , og et rektangel med bredden  $l_0 v/c$  og højden  $l_0$ . Eftersom iagttageren altså både ser forfladen og sidefladen af terningen vil han opfatte den som *drejet* en vinkel  $\phi$ , der af Figur 4.10 ses at være bestemt ved

$$\sin \phi = \frac{v}{c}.$$

Men tillige vil han slutte, at kanten DC er længere end  $l_0$ . For efter en drejning på vinklen  $\phi$  skulle DC vise sig med længden

$$DD'' = l_0 \cos \phi = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Da kanten DC viser sig med længden  $l_0$ , vil iagttageren altså slutte, at den i virkeligheden har længden

$$l_1 = \frac{l_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

der altså takket være drejningen viser sig som

$$l_1 \cos \phi = l_0$$

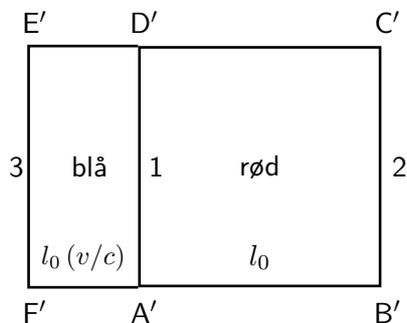
Ved anlæggelsen af en ikke-relativistisk betragtning, vil iagttageren med andre ord ikke opfatte en forbipasserende terning som en terning, men som et parallelepipedum med kantlængden  $l_0$  og  $l_1$  som vist fra oven på Figur 4.10. På lignende måde kan man vise, at en kugle tilsyneladende vil trækkes ud i bevægelsesretningen og afbildes med et elliptisk omrids.

Vi betragter derefter fænomenet relativistisk. Vi ved da, at kanterne AB og DC på grund af længdeforkortningen reduceres til

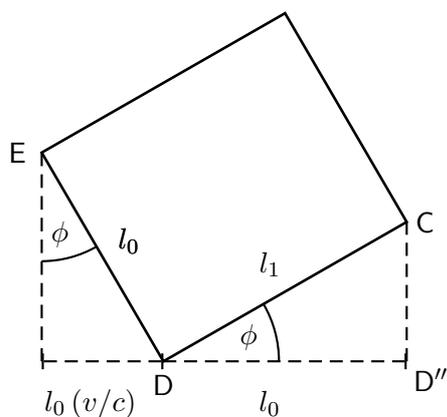
$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

mens kanterne vinkelret derpå er uændrede. Men ved igen at betragte Figur 4.10 ser vi, at  $l$  netop er den længde, hvormed terningkanten  $DC = l_0$  vil vise sig efter en drejning på vinklen  $\phi$ . Takket være længdeforkortningen vil en iagttager altså stadig se en forbipasserende terning som en terning, der blot er drejet en vis vinkel.

Man kan vise, at dette resultat gælder ikke blot for terninger, men for legemer af en vilkårlig form. Alle legemer vil derfor beholde deres tilsyneladende form uafhængigt



Figur 4.9



Figur 4.10

af deres bevægelse. Dette må naturligvis ikke tolkes sådan at længdeforkortningen ikke eksisterer. Tværtimod – det er netop dens eksistens der bevirker en kompensation af den forlængelse af billedet, der skyldes lysets endelige hastighed.

Vi har ovenfor stiltiende forudsat, at lysstrålerne fra forskellige punkter af objektet til iagttageren var parallelle, dvs. at objektet kun spænder over en lille rumvinkel set fra iagttagerens plads. Er dette ikke tilfældet, vil der fremkomme forvrængninger som følge af, at de tilsyneladende drejning  $\phi$  ikke bliver af samme størrelse for alle legemets punkter. Det kan dog vises, at et kugleformet legeme altid vil ses med et cirkulært omrids.

## Opsummering af Kapitel 4

- i) Relativitetsteorien ledte til en forenkling af beskrivelsen af mange optiske fænomener i særdeleshed af Doppler-effekten.
- ii) *Den relativistiske Doppler-effekt*: For parallelle hastigheder, er forholdet mellem frekvenserne af den modtagne og den udsendte lysstråle givet ved udtrykket

$$\frac{\nu_{\text{rel}}}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}, \quad (4.5)$$

hvor  $u$  er den relative hastighed, hvormed lyskilde og modtager fjerner sig fra hinanden.

- iii) Grundet det reciprokke forhold mellem frekvens og bølgelængde,  $c = \lambda\nu$ , fås tilsvarende for bølgelængderne

$$\frac{\lambda_{\text{rel}}}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}. \quad (4.7)$$

- iv) For ikke-parallelle hastigheder fås udtrykket (jvf. Figur 4.2)

$$\frac{\nu_{\text{rel}}}{\nu_0} = \frac{1}{\gamma_u [1 + (u/c) \cos \alpha]}. \quad (4.9)$$

## Gennemregnede eksempler til Kapitel 4

- 4.1 En bilist anklages for at have kørt over for rødt lys. Til sit forsvar fremfører hun, at lyset syntes grønt for hende p.g.a. Doppler-effekten. Hvis dette er sandt, hvor hurtigt skal hun da have kørt? [Forholdet mellem frekvensen af grønt og rødt lys kan antages at være  $\nu(\text{grønt})/\nu(\text{rødt}) = 1.2$ ].

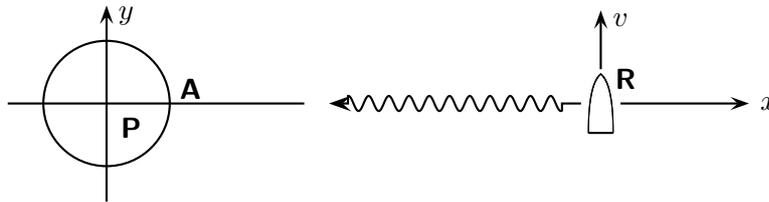
Ved anvendelse udtrykket (4.5) for den relativistiske Doppler-effekt fås

$$u/c = \frac{1 - (\nu_1/\nu_0)^2}{1 + (\nu_1/\nu_0)^2} \quad (4.19)$$

hvor  $\nu_0$  og  $\nu_1$  er henholdsvis den udsendte (rød) og den iagttagne (grøn) frekvens. Ved indsættelse fås  $u/c \simeq -0.180$ . Det negative fortegn angiver, at bilisten *nærmer sig* trafiklyset i overensstemmelse med fortegnskonventionen på Figur 4.1. Bilisten skulle altså have kørt hen mod trafiklyset med næsten 200 millioner kilometer i timen.

## Opgaver til Kapitel 4

- 4.1 I denne opgave medvirker tre personer, A, B og C. A står på Jorden, B befinder sig på en rumstation, der er stationær i forhold til Jorden, og C er om bord i en rumraket på vej fra Jorden til rumstationen med farten  $0.60c$  relativ til A og B. A udsender et radiosignal med retning B og C hver 6. minut.
- Med hvilken tidsinterval modtager B signaler fra A?
  - Med hvilken tidsinterval modtager C signaler fra A?
  - C udsender et radiosignal med retning mod B, hver gang han selv har modtaget et signal fra A. Med hvilken tidsinterval modtager B signaler fra C?
- 4.2 En af de mest markante spektrallinjer i brintspektret er den røde  $H_\alpha$ -linje med bølgelængden 656.1 nm.
- Ved hvilken bølgelængde vil en iagttager på Jorden se denne linje, hvis den udsendes fra en stjerne, som fjerner sig med hastigheden 3000 km/s?
  - Find den observerede bølgelængde for  $H_\alpha$ -linjen fra et rumskib, der fjerner sig fra Solen med en hastighed på a)  $0.01c$ , b)  $0.1c$ , og c)  $0.9c$ . Gennemfør beregningerne såvel ikke-relativistisk som relativistisk, og sammenlign resultaterne.
  - Idet  $H_\alpha$ -linjen observeres separat fra de to modsatte sider af Solens ækvator, ønskes forskellen mellem de to observerede bølgelængder estimeret. Det oplyses, at Solens radius er  $7.0 \times 10^5$  km, og at dens omløbstid er 25 dage.
- 4.3 En iagttager er i hvile i punktet A på en planet P. Planeten er i hvile i et inertialsystem, som er bestemt ved det på figuren antydede koordinatsystem.



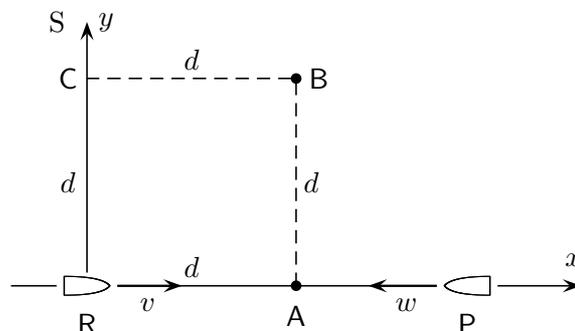
Et rumskib R bevæger sig med den konstante hastighed  $v$  i  $xy$ -planet i en retning der er parallel med  $y$ -aksen. I det øjeblik R passerer koordinatsystemets  $x$ -akse, udsendes der fra rumskibet et lasersignal, parallelt med  $x$ -aksen, rettet mod A. En iagttager i R noterer sig bølgelængden af det udsendte lys. Iagttageren i A modtager lyssignalet og noterer sig ligeledes bølgelængden. Den ene iagttager finder bølgelængden  $6000 \text{ \AA}$ , den anden finder bølgelængden  $5400 \text{ \AA}$ .

Angiv hvilken bølgelængde iagttageren i A finder, og bestem størrelsen af rumskibets hastighed  $v$  i forhold til P. Udtryk  $v$  i enheder af lyshastigheden  $c$ .

**4.4** I året 2050 opererer en række rumskibe som regelmæssig transport mellem to rumstationer, som er adskilt med afstanden 10 lysminutter i rumstationernes hvilesystem. Rumskibene er udstyret med identiske, monokromatiske for- og baglygter. Rumskibenes hastighed  $v$  er således, at for en iagttager på en af rumstationerne forekommer forlygterne på et ankomende rumskib blå ( $480 \text{ nm}$ ), mens baglygterne på et afrejsende rumskib forekommer røde ( $640 \text{ nm}$ ).

- Bestem bølgelængden  $\lambda$  af rumskibenes lygter;
- Bestem rumskibenes hastighed  $v$ ;
- Hvilken bølgelængde vil piloten opfatte på et modsatflyvende rumskibs forlygter?
- Hvor lang tid tager en enkeltrejse set fra en af rumstationerne;
- Hvor lang tid tager en enkeltrejse set fra et af rumskibene.

**4.5** Et rumskib, R, bevæger sig med hastigheden  $v = 0.60 c$  langs den positive  $x$ -akse i et inertialsystem S. I det rumskibet passerer origo, udsender det et blåt lysglimt med bølgelængden  $\lambda_0 = 475 \text{ nm}$ . Lysglimtet observeres af to iagttagere, A og B, som er i hvile i forhold til S i positioner, der, som angivet på figuren, sammen med R og punktet C udgør et kvadrat.



- a) Bestem den observerede bølgelængde,  $\lambda_A$ , for iagttageren A.
- b) Bestem den observerede bølgelængde,  $\lambda_B$ , for iagttageren B.

Lysglimt observeres ligeledes fra et rumskib, P, som bevæger sig med hastigheden  $w = 0.7c$  langs den negative  $x$ -akse og nærmer sig R.

- c) Bestem den observerede bølgelængde,  $\lambda_P$ , for iagttageren i P.

## 5 Rumtiden og fire-vektorer

Vi har i de foregående kapitler set, hvorledes opfattelsen af tiden i den specielle relativitetsteori er nøje påvirket af den relative bevægelse af iagttageren og det iagttagne fænomen. Hvor tidspunktet for en begivenhed ifølge Galilei-transformationen er en absolut størrelse, sker der ved Lorentz-transformationen en sammenblanding af tidspunktet for begivenheden og begivenhedens rumlige koordinater. Denne sammenhæng mellem rum og tid leder naturligt til opfattelsen af tiden som en fjerde dimension. Ifølge denne beskrivelse, som introduceredes af matematikeren Minkowski allerede i 1907, udfolder historien sig i et 4-dimensionalt (statisk) kontinuum, som er kendt under betegnelsen *rumtiden* eller *Minkowski-rummet*. Vi har allerede indført rumtiden som begreb i Kapitel 2 og skal nu fuldføre diskussionen.

### 5.1 Rumtiden

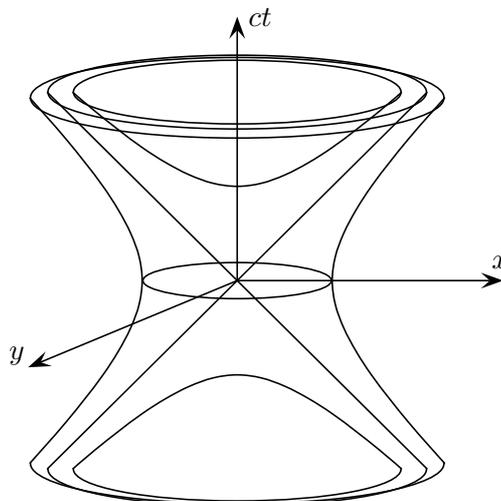
Et punkt i rumtiden er karakteriseret ved et sæt af fire tal  $(t, x, y, z)$ , af hvilke det første definerer et tidspunkt  $t$ , mens de øvrige tre definerer et punkt  $(x, y, z)$  i det sædvanlige 3-dimensionale rum. Talsættet  $(t, x, y, z)$  henleder således vor opmærksomhed på, hvad der sker til tiden  $t$  i punktet  $(x, y, z)$ , og definerer, hvad vi allerede tidligere har kaldt en begivenhed. En sådan beskrivelse kunne man lige så vel have indført i den klassiske mekanik, men den ville her ikke lede til nogen ny fysisk indsigt. Det nye i den specielle relativitetsteori er eksistensen af den invariante 4-dimensionale differentialform

$$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (5.1)$$

At  $ds^2$  virkelig er invariant, og altså har samme værdi i ethvert inertialsystem, har vi vist i (2.20). Bortset fra den særprægede sammenblanding af plus- og minustegn minder  $ds^2$  om størrelsen

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (5.2)$$

som fuldstændigt karakteriserer geometrien af det sædvanlige 3-dimensionale rum som værende Euklidisk. På samme måde som  $dr^2$  er invariant under enhver rotation i det 3-dimensionale rum, er  $ds^2$  altså invariant under enhver Lorentz-transformation. Og på samme måde, som invariansen af  $dr^2$  bestemmer geometrien af det 3-dimensionale rum, bestemmer invariansen af  $ds^2$  geometrien af rumtiden.



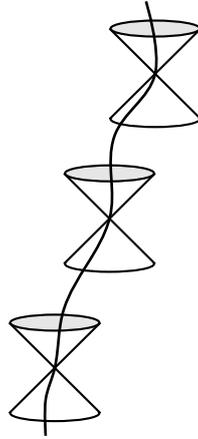
**Figur 5.1:** Et eksempel på et 3-dimensionalt rumtidsdiagram, som afbilder lyskeglen omkring begyndelsespunktet,  $c^2t^2 - x^2 - y^2 = 0$ , og de to hyperboloider  $c^2t^2 - x^2 - y^2 = 1$  (indre to-delt) og  $c^2t^2 - x^2 - y^2 = -1$  (ydre).

## 5.2 Tre-dimensionale rumtidsdiagrammer

Vi har allerede stiftet bekendtskab med rumtidsdiagrammer i Afsnit 2.10, hvor et eksempel på et 2-dimensionalt diagram er vist på Figur 2.5. Vi vil nu udvide formalismen til at omfatte også 3-dimensionale diagrammer. Gennem anvendelse af perspektiv har vi vænnet os til afbildinger af det sædvanlige 3-dimensionale rum på et fladt stykke papir. Rumtiden er 4-dimensional, og lader sig derfor på ingen måde afbilde på papiret i sin helhed. Lader vi imidlertid én dimension ude, f.eks. den rumlige  $z$ -retning, kan vi igen benytte den perspektivistiske metode og danne en meningsfuld afbildning. Imidlertid må vi ved betragtning af et sådant diagram forsøge at kompensere for fraværet af den sidste rumlige dimension ved at aflæse cirkler som sfærer, planer som Euklidiske rum etc. Som et eksempel viser Figur 5.1 hyperboloiderne

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 = \pm 1, \quad (5.3)$$

som fremkommer ved en drejning af de i Figur 2.6 viste hyperbler  $c^2t^2 - x^2 = \pm 1$  omkring  $ct$ -aksen. Den indre (to-delte) hyperboloide repræsenterer alle begivenheder, der tilfredsstillers  $c^2t^2 - x^2 - y^2 = 1$ , mens den ydre hyperboloide repræsenterer begivenhederne, der tilfredsstillers  $c^2t^2 - x^2 - y^2 = -1$ . Idet hældningen af en fysisk partikels verdenslinje i forhold til lodret er et mål for partiklens hastighed,  $u/c$ , kan denne som tidligere anført ikke på noget sted overstige  $45^\circ$ . Fotoner repræsenteres ved rette linjer som danner en vinkel på  $45^\circ$  med  $ct$ -aksen.



**Figur 5.2:** Til enhver begivenhed på en partikels verdenslinje hører en lyskegle. Partiklens verdenslinje ligger inden for enhver af disse lyskegler.

### 5.3 Lyskegler og intervaller

Den mest grundlæggende invariante struktur i rumtiden er sættet af såkaldte lyskegler, hvoraf der findes én for hvert af rumtidens punkter (begivenheder)  $\mathcal{P}$ . En lyskegle består af mængden af verdenslinjer for samtlige fotoner der passerer igennem  $\mathcal{P}$ , eller, med andre ord, beliggenheden af alle begivenheder  $\mathcal{Q}$ , der kan sende lys til eller modtage lys fra  $\mathcal{P}$ . Begivenhederne  $\mathcal{Q}$  tilfredsstiller dermed ligningen

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0, \quad (5.4)$$

hvor  $\Delta$ 'erne angiver differensen mellem koordinaterne af  $\mathcal{P}$  og  $\mathcal{Q}$ . Med  $\mathcal{P}$  liggende i origo, reducerer ligningen til  $c^2t^2 - x^2 - y^2 = 0$ , hvis vi lader  $z$ -koordinaten ude. Denne lyskegle genkendes på Figur 5.1, hvor den som en  $45^\circ$  kegle udgør asymptoten mellem de to hyperboloider. Opfattet sekventielt i tiden  $t$  i systemet  $S$ , repræsenterer denne lyskegle en cirkulær lys-front, der først samler sig omkring begyndelsespunktet og dernæst bevæger sig væk fra dette igen. På grund af invariansen af det definerende udtryk (5.4) under en Lorentz-transformation repræsenterer lyskeglen det samme fænomen i ethvert inertialsystem. Dette burde ikke overraske os, idet dette præcis var, hvad vi krævede igennem (2.8) og (2.9) under udledningen af Lorentz-transformationen. I den rigtige verden, hvor rummet er 3-dimensionalt, er det selvfølgelig ikke en cirkulær men en sfærisk lysfront der samler sig om begivenheden og bevæger sig væk igen. Alligevel er fænomenet kendt under betegnelsen *lyskeglen*.

Figur 5.2 antyder, hvorledes der til hvert punkt på en partikels verdenslinje hører en lyskegle. Idet enhver fysisk partikel bevæger sig langsommere end  $c$ , vil dens verdenslinje ligge indenfor enhver lyskegle, der har sit begyndelsespunkt på den samme verdenslinje.

Vi vil nu undersøge den fysiske betydning af den fundamentale invariante form (5.1)

i rumtiden, eller snarere af den tilsvarende endelige version

$$\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta t^2 \left( c^2 - \frac{\Delta r^2}{\Delta t^2} \right), \quad (5.5)$$

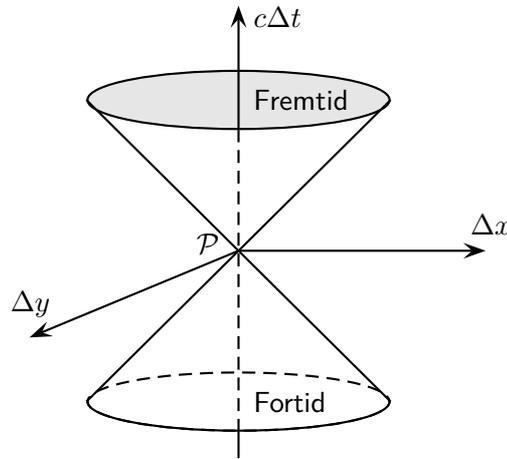
hvor  $\Delta$ -ledene henviser til to begivenheder  $\mathcal{P}$  og  $\mathcal{Q}$ , som ikke nødvendigvis er naboer. Betydningen af  $\Delta s^2$  afhænger af dets fortegn, hvorfor vi har følgende tre tilfælde:

- i) Det simpleste tilfælde er  $\Delta s^2 = 0$ , hvor  $\mathcal{P}$  og  $\mathcal{Q}$  jo netop kan forbindes med et lyssignal;
- ii) I det tilfælde, hvor  $\Delta s^2 > 0$ , er  $\Delta r^2/\Delta t^2 < c^2$  i ethvert inertialsystem. En fysisk partikel, og således også et ur, kan dermed bevæges med jævn hastighed fra  $\mathcal{P}$  til  $\mathcal{Q}$ , eller omvendt. I urets *hvilesystem*  $S'$  forekommer  $\mathcal{P}$  og  $\mathcal{Q}$  i samme punkt, således at  $\Delta s^2 = c^2 \Delta t'^2$ . Altså er *intervallet*  $\Delta s = \sqrt{|\Delta s^2|}$  mellem  $\mathcal{P}$  og  $\mathcal{Q}$  i dette tilfælde  $c$  gange den forløbne tid (*egentiden*) på uret, som bevæger sig jævnt og retlinjet mellem de to begivenheder.
- iii) I det sidste tilfælde, hvor  $\Delta s^2 < 0$ , er  $\Delta r^2/\Delta t^2 > c^2$  i ethvert inertialsystem. Dette er situationen, der karakteriserer overlyshastigheder. Som det fremgår af diskussionen, der følger (2.24) og (2.26), vil der derfor gives et inertialsystem  $S'$ , hvor de to begivenheder sker til samme tidspunkt. I dette system er  $\Delta s^2 = -\Delta r'^2$ . Intervallet  $\Delta s$  er således den rumlige afstand mellem de to begivenheder i det system, hvori de er samtidige. Af (5.5) ser vi, at dette også er den korteste rumlige afstand, der kan tilskrives de to begivenheder i noget inertialsystem.

Af den ovenstående diskussion ser vi, at lyskeglen tilhørende enhver begivenhed  $\mathcal{P}$  bevirker en meget vigtig, *kausal* opdeling af samtlige begivenheder i rumtiden i forhold til  $\mathcal{P}$  (Figur 5.3). Alle begivenheder på eller inden for den fremtidige lyskegle (dvs. lyskeglens øvre halvdel) kan påvirkes af  $\mathcal{P}$ , idet de nemlig kan nås med hastigheder  $u \leq c$ , og derfor kan modtage signaler fra  $\mathcal{P}$ . Endvidere vil begivenhederne i dette område, som vi har set i Afsnit 2.9, foregå senere end  $\mathcal{P}$  for enhver iagttagere. Disse begivenheder siges dermed at udgøre  $\mathcal{P}$ 's *absolutte* (eller *kausale*) *fremtid*. Tilsvarende argumenter kan benyttes for begivenhederne på eller inden for  $\mathcal{P}$ 's fortidige lyskegle: de foregår tidligere end  $\mathcal{P}$  for enhver iagttagere og kan påvirke  $\mathcal{P}$  gennem signaler. De udgør dermed  $\mathcal{P}$ 's *absolutte* (eller *kausale*) *fortid*. For begge disse to klasser af begivenheder, der er kausalt forbundne med  $\mathcal{P}$ , gælder  $\Delta s^2 \geq 0$ . Ingen begivenhed i området uden for lyskeglen, hvor altså  $\Delta s^2 < 0$ , kan påvirke  $\mathcal{P}$  eller blive påvirket af  $\mathcal{P}$ , da dette ville kræve udveksling af signaler med overlyshastighed. Som vi har set, findes der for enhver begivenhed i dette område et inertialsystem, således at begivenheden heri er samtidigt med  $\mathcal{P}$ . Området omtales derfor tiltider som den *kausale nutid*.

## 5.4 Tre-vektorer

På samme måde som sædvanlige 3-dimensionale vektorer er defineret i rummet, kan 4-dimensionale vektorer defineres i rumtiden. De to typer af vektorer betegnes da hen-



**Figur 5.3:** Lyskeglen omkring enhver begivenhed  $\mathcal{P}$  opdeler rumtiden i tre adskilte områder: (i) Begivenheder i den kausale fortid kan påvirke  $\mathcal{P}$ ; (ii) Begivenheder i den kausale fremtid kan påvirkes af  $\mathcal{P}$ ; (iii) Begivenheder i området udenfor lyskeglen kan ikke have nogen kausal sammenhæng med  $\mathcal{P}$ .

holdsvis 3-vektorer og 4-vektorer. Før vi i næste afsnit introducerer 4-vektorer, vil vi her genopfriske nogle af de fremtrædende træk ved den sædvanlige vektor-regning i det 3-dimensionale rum.

En 3-vektor  $\vec{a}$  kan defineres som et talsæt  $(a_1, a_2, a_3)$ , der afhænger af valget af referencesystem  $\{x, y, z\}$ . De forskellige vektor-operationer kan dernæst defineres via disse komponenter; f.eks.  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$  og  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ . Vektorerne og vektor-operationerne kan imidlertid også tolkes absolut, altså uden reference til noget koordinatsystem. Vektoren  $\vec{a}$  har således en vis længde og retning, vektorsummen  $\vec{a} + \vec{b}$  kan bestemmes via parallelogramreglen, etc. Kun operationer, som har en sådan absolut betydning, er tilladte i vektorregningen. For at kontrollere en vektorligning, så som  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , vil en iagttager normalt være nødsaget til at definere et referencesystem og dernæst kontrollere de tre komponentligninger  $c_i = a_i + b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) hver for sig. Forskellige iagttagere vil benytte forskellige referencesystemer, og de tilsvarende komponentligninger vil derfor være forskellige. Men enten er alle ligningssæt sande, eller også er de alle falske. Et sæt af komponentligninger, som er sand i ét koordinatsystem, er altså sand i alle systemer. Dette er den mest basale egenskab ved vektor-regningen. Vi siger, at vektorligninger er *forminvariante* over for valget af referencesystem.

Vektorligninger er *forminvariante* over for valg af referencesystem.

Prototypen på en 3-vektor er forskydnings-vektoren  $\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , som forbinder to punkter i rummet. Under en translation forbliver dens komponenter uforandrede. Under en rotation omkring begyndelsespunktet ændres komponenterne ifølge en lineær,

homogen transformation af formen

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \alpha_{11}\Delta x + \alpha_{12}\Delta y + \alpha_{13}\Delta z \\ \Delta y' &= \alpha_{21}\Delta x + \alpha_{22}\Delta y + \alpha_{23}\Delta z \\ \Delta z' &= \alpha_{31}\Delta x + \alpha_{32}\Delta y + \alpha_{33}\Delta z,\end{aligned}\tag{5.6}$$

hvor  $\alpha$ 'erne er funktioner af vinklerne, der bestemmer rotationen. Vi kan nu definere en 3-vektor ved følgende sætning: *Enhver størrelse med tre komponenter  $(a_1, a_2, a_3)$ , som transformerer på samme måde som forskydningsvektoren  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  mellem to punkter i rummet, siges at udgøre en 3-vektor.*

Definition af  
3-vektor

Såfremt  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  og  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  begge transformerer som  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , vil summen  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$  som følge af lineariteten af (5.6) gøre det samme. Summen af to vektorer er derfor en vektor. Tilsvarende følger det umiddelbart af (5.6), at hvis  $k$  er en *skalar invariant* (ofte blot kaldet en "skalar" eller en "invariant") – altså et tal, som er uafhængig af koordinatsystemet – så er også  $k\vec{a} \equiv (ka_1, ka_2, ka_3)$  en vektor.

Såfremt  $\vec{r} = (x, y, z)$  er et punkt på en kurve i rummet, og hver af koordinaterne udtrykkes som funktion af kurvelængden  $l$ , så er "enheds-tangenten"

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dl} = \left( \frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl}, \frac{dz}{dl} \right)\tag{5.7}$$

en vektor. For hver af komponenterne har vi nemlig

$$\frac{dr_i}{dl} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta r_i}{\Delta l},$$

hvor  $\Delta r_i$  er komponenterne af en vektor og  $\Delta l$  er en skalar invariant. Kvotienten mellem disse to giver dermed ifølge ovennævnte argumentation komponenterne af en ny vektor, og grænseovergangen ændrer intet ved dette forhold. Betragter vi nu en partikelbevægelse, hvor koordinaterne er funktioner af tiden  $t$ , ser vi ved lignende argumenter, at hastigheden

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)\tag{5.8}$$

er en vektor. Generelt indser vi, at enhver differentiation af en vektor med hensyn til en skalar invariant giver en ny vektor. Således er også accelerationen  $\vec{a} = d\vec{u}/dt = (du_x/dt, du_y/dt, du_z/dt)$  en vektor. Multiplicerer vi dernæst henholdsvis  $\vec{u}$  og  $\vec{a}$  med massen  $m$ , som jo er en skalar, får vi to nye vektorer, nemlig impulsen,  $\vec{p} = m\vec{u}$ , og kraften,  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

Til enhver vektor  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  hører en vigtig skalar, nemlig dens længde, som vi betegner  $|\vec{a}|$  eller simpelthen  $a$ :

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad a \geq 0.\tag{5.9}$$

At dette er en invariant følger umiddelbart af, at  $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$  per definition er invariant i det Euklidiske rum, og at  $(a_1, a_2, a_3)$  transformerer som  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ . Hvis

$\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er to vektorer, så er også  $\vec{a} + \vec{b}$  en vektor, og dens længde må derfor være invariant. Vi finder

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), \end{aligned}$$

og idet  $a^2$  og  $b^2$  er invariante, følger hermed også invariansen af skalarproduktet

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (5.10)$$

## 5.5 Fire-vektorer

4-vektorer er defineret i den 4-dimensionale rumtid. I dette afsnit udvikler vi regne-reglerne for 4-vektorer i tæt analogi med diskussionen i forrige afsnit af 3-vektorer.

Definition af  
4-vektor

Prototypen på en 4-vektor  $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$  er forskydningsvektoren  $\Delta\mathbf{X} = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , som forbinder to begivenheder i rumtiden. En 4-vektor defineres da ved, at den transformeres på samme måde som  $\Delta\mathbf{X}$ . Bemærk, at vi har valgt  $ct$  frem for  $t$  for nulte-komponenten, og at alle komponenter derved har enheden længde. Af åbenlyse årsager refererer man ofte til en 4-vektors nulte-komponent som den *tidslige* og de tre øvrige komponenter som de *rumlige*.

Enhver 4-vektor kan altså repræsenteres ved et retningsbestemt linje-segment i rumtiden. De tilladte koordinatsystemer udgøres af samtlige inertialsystemer, og de relevante transformationer udgøres dermed af alle transformationer, der sammenknytter ét inertialsystem med et andet. Dette er de *generaliserede Lorentz-transformationer*, som er sammensat af (i) tidslige og rumlige translationer, (ii) rotationer omkring begyndelses-punktet og (iii) standard-Lorentz-transformationer, altså Lorentz-transformationer af typen (2.13), hvor de to systemer er i standardkonfigurationen. Disse transformationer giver anledning til en 4-dimensional analog til (5.6) for ethvert par af inertialsystemer, med 16 konstante  $\alpha$ 'er i stedet for ni. Under både rumlige og tidslige translationer er komponenterne af  $\Delta\mathbf{X}$  (og dermed af enhver 4-vektor) uforandrede. Under rumlige rotationer omkring begyndelsespunktet transformeres de tre rumlige komponenter af  $\Delta\mathbf{X}$  (og dermed af enhver 4-vektor) som en 3-vektor, mens den tidslige komponent er uforandret. Under standard-Lorentz-transformationer transformeres komponenterne af enhver 4-vektor,  $\mathbf{A}$ , på samme måde som prototypen  $(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , og ved anvendelse af (2.16) fås dermed

$$\begin{aligned} A'_0 &= \gamma_v (A_0 - \beta A_1), \\ A'_1 &= \gamma_v (A_1 - \beta A_0), \\ A'_2 &= A_2, \\ A'_3 &= A_3, \end{aligned} \quad (5.11)$$

hvor vi har indført betegnelsen  $\beta = v/c$ . Idet vi som tidligere begrænser os til udelukkende at betragte homogene transformationer, altså transformationer, der lader begivenheden  $(0, 0, 0, 0)$  uforandret, udgør også  $\mathbf{X} = (ct, x, y, z)$  en 4-vektor, som vi kan kalde begivenhedens stedvektor. Ofte ser man  $\mathbf{X}$  anført som prototypen på en 4-vektor, hvilket strengt taget kun er korrekt, hvis man husker at anføre, at man kun betragter homogene transformationer.

Regneregler for  
4-vektorer

Idet transformationsligningerne (5.11) for 4-vektorer er af samme type som transformationsligningerne (5.6) for 3-vektorer, og altså er lineære og homogene, kan vi benytte præcis de samme argumenter som for 3-vektorer til at vise, at

- i) summen af to 4-vektorer er en 4-vektor;
- ii) produktet af en 4-skalar og en 4-vektor er en 4-vektor; og
- iii) differentialkvotienten mellem en 4-vektor og en 4-skalar er en 4-vektor.

4-skalar

Her er en 4-skalar defineret som en skalar størrelse (et tal), der er invariant over for Lorentz-transformationen og dermed har samme værdi i ethvert inertialsystem. En sådan størrelse betegnes også en Lorentz-invariant. Lad os her benytte lejligheden til at bemærke, at skalare størrelser, der er invariante over for transformationer i 3-rummet, i almindelighed *ikke* er invariante over for Lorentz-transformationen. I særdeleshed er tiden,  $t$ , ikke en 4-skalar, og vi opnår derfor ikke en 4-vektor ved at differentiere en given 4-vektor med hensyn til  $t$ .

kvadrat

Kvadratet på en 4-vektor  $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$  er defineret ved

$$\boxed{\mathbf{A}^2 = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}, \quad (5.12)$$

og dens invarians følger direkte af invariansen af kvadratet på prototypen  $\Delta\mathbf{X} = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ . Den sidste betegnes også  $\Delta\mathbf{s}$ , hvilket retfærdiggør notationen (5.5), som vi har benyttet flere gange. *Størrelsen* eller *længden* af en 4-vektor  $\mathbf{A}$  skrives  $|\mathbf{A}|$  eller  $A$  og er defineret ved

$$A = \sqrt{|\mathbf{A}^2|} \geq 0. \quad (5.13)$$

skalarprodukt

For to givne 4-vektorer  $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$  og  $\mathbf{B} = (B_0, B_1, B_2, B_3)$  er *skalarproduktet* defineret ved

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3. \quad (5.14)$$

Præcis som for (5.10) kan vi benytte invariansen af  $|\mathbf{A}|$ ,  $|\mathbf{B}|$  og  $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$  til at udlede at også skalarproduktet er invariant.

**Øvelse 5.1** Eftersis ved direkte anvendelse af (5.11), at skalarproduktet,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , af to givne 4-vektorer er invariant over for en Lorentz-transformation.

## 5.6 Fire-vektorerens geometri

Vi har i Afsnit 5.3 set, hvorledes lyskeglen i forhold til sit begyndelsespunkt inddeler alle rumtidens begivenheder i tre klasser afhængig af fortegnet på  $\Delta s^2$ . Den samme inddeling

overføres umiddelbart til forskydningsvektoren  $\Delta \mathbf{s} \equiv \Delta \mathbf{X}$ . Og idet der til enhver 4-vektor findes en forskydningsvektor, med hvilken den er ensrettet, kan vi inddele alle 4-vektorer på tilsvarende vis. Vi kalder en 4-vektor  $\mathbf{A}$  *tidsagtig*, hvis  $\mathbf{A}^2 > 0$ , *lysagtig*, hvis  $\mathbf{A}^2 = 0$ , og *rumagtig*, hvis  $\mathbf{A}^2 < 0$ . I det første tilfælde peger  $\mathbf{A}$  ind i lyskeglen, i det andet tilfælde peger den langs lyskeglen og i det tredje tilfælde peger den uden for lyskeglen. En 4-vektor med  $\mathbf{A}^2 = 0$  kaldes også en nul-4-vektor. Da en 4-vektors kvadrat er invariant, kan man ikke ved nogen Lorentz-transformation forvandle en rumagtig 4-vektor til en tidsagtig, eller omvendt. Klassifikationen i de tre nævnte kategorier er altså den samme fra ethvert inertialsystem; den er med andre ord absolut.

En 4-vektor er enten *tidsagtig*, *rumagtig* eller *lysagtig*

Tidsagtige og lysagtige 4-vektorer har en del egenskaber til fælles, og betegnes under ét *kausale* vektorer. I særdeleshed er fortegnet på deres nulte-komponent invariant, idet enhver iagttager vil opleve den samme tidslige rækkefølge langs den tilsvarende forskydningsvektor. Man kan derfor foretage en invariant opdeling af kausale vektorer,  $\mathbf{A}$ , i dem, der peger mod fremtiden ( $A_0 > 0$ ), og dem, der peger mod fortiden ( $A_0 < 0$ ).

For 3-vektorer ved vi, at enhver vektor  $\vec{a}$  kan reduceres til formen  $(a, 0, 0)$  ved at indlægge et koordinatsystem, hvis  $x$ -akse peger i vektorens retning. På tilsvarende vis kan vi for en 4-vektor  $\mathbf{A}$  med komponenter  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  i systemet S eliminere  $A_2$  og  $A_3$  ved at rotere inertialsystemets rumlige akser så  $x$ -aksen peger i retningen  $(A_1, A_2, A_3)$ . Den nye vektor vil da have formen  $(A_0, B, 0, 0)$ , hvor  $B = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}$ . Vi har nu følgende tre tilfælde, som afhænger af den relative størrelse af  $|A_0|$  og  $B$

- i) I det tilfælde, hvor  $B = |A_0|$ , er  $\mathbf{A}$  en nul-4-vektor, og formen  $(A_0, |A_0|, 0, 0)$  kan ikke reduceres yderligere.
- ii) I det tilfælde, hvor  $B < |A_0|$ , er  $\mathbf{A}$  tidsagtig. Der gives da et inertialsystem, hvor den kan skrives på formen  $(\pm A, 0, 0, 0)$ , hvor  $A$  er størrelsen af  $\mathbf{A}$ , og hvor fortegnet afhænger af, om  $\mathbf{A}$  peger mod fremtiden eller mod fortiden.
- iii) I det tilfælde, hvor  $B > |A_0|$ , er  $\mathbf{A}$  rumagtig. Der gives et da inertialsystem, hvor den kan skrives på formen  $(0, A, 0, 0)$ , hvor  $A$  igen er størrelsen af  $\mathbf{A}$ .

## 5.7 Egentiden

Idet, som anført i Afsnit 5.5, tiden  $t$  ikke er nogen 4-skalar, og derfor ikke gennem differentiation kan anvendes til at danne hastighedslignende 4-vektorer, søger vi her et invariant tidsmål. Dette tidsmål er egentiden, som jo åbenbart har samme værdi for enhver iagttager.

Lad os betragte en partikel, som i et inertialsystem S bevæger sig således, at den i det differentielle tidsrum  $dt$  tilbagelægger vejen  $(dx, dy, dz)$ . Bevægelsen er således bestemt ved det differentielle 4-interval

$$ds = (cdt, dx, dy, dz). \quad (5.15)$$

Kvadratet på  $ds$  er den invariante skalar

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (5.16)$$

Idet også  $c^2$  er en invariant, kan vi danne en tredje invariant ved at tage forholdet mellem de to

$$d\tau^2 \equiv \frac{ds^2}{c^2} = dt^2 \left\{ 1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} \right\}. \quad (5.17)$$

I partiklens øjeblikkelige hvilesystem  $S'$  (altså systemet, som i tidsrummet  $dt$  følger med partiklen, således at  $dx' = dy' = dz' = 0$ ) reducerer (5.17) til  $d\tau^2 = dt'^2$ . Størrelsen  $d\tau$  er derfor identisk med den i Afsnit 3.2 definerede *egentid*.

Af (5.17) får vi nu

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2},$$

hvor  $u$  er partiklens øjeblikkelige hastighed i  $S$ . Heraf følger sammenhængen

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_u. \quad (5.18)$$

Vi har hermed direkte eftervist udtrykket for tidsforlængelsen på differentiell form, som vi benyttede allerede i (3.4).

## 5.8 Fire-hastigheden

Vi ønsker nu at konstruere en 4-vektor, der på tilsvarende måde, som vi kender det fra det sædvanlige rum, angiver en hastighed. Lad os endnu engang bemærke, at vi ikke kan danne en 4-vektor blot ved at tilføje en nulte-komponent til den sædvanlige hastighed

$$\vec{u} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (5.19)$$

Her er  $(x, y, z)$  de tre rumlige komponenter af en 4-vektor. Men da  $t$  ikke er nogen 4-skalar, fremkommer der ikke komponenter af nogen 4-vektor, når vi differentierer med hensyn til  $t$ . Dette kan man iøvrigt også se direkte af transformationsligningerne (3.10) for hastighedskomponenterne, idet disse ligninger ikke er identiske med Lorentz-transformationen (5.11).

Imidlertid kan vi danne en 4-vektor, hvis rumlige komponenter minder om den sædvanlige hastighed, ved i (5.19) at erstatte differentiationen med hensyn til  $t$  med differentiation med hensyn til den invariante egentid  $\tau$ . Vi definerer derfor partiklens *4-hastighed*  $\mathbf{U}$  som den afledede af 4-sted-vektoren  $\mathbf{X} = (ct, x, y, z)$  med hensyn til egentiden  $\tau$

$$\mathbf{U} \equiv \frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right). \quad (5.20)$$

Ved at benytte kædereglen for differentiation fås

$$\mathbf{U} = \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right),$$

hvoraf vi ved at indføre (5.18) finder

$$\mathbf{U} = (\gamma_u c, \gamma_u u_x, \gamma_u u_y, \gamma_u u_z). \quad (5.21)$$

Altså kan 4-hastigheden skrives på formen

$$\boxed{\mathbf{U} = \gamma_u (c, \vec{u})}. \quad (5.22)$$

Her, som i mange andre tilfælde, finder vi, at de rumlige komponenter af en 4-vektor er komponenterne af en velkendt 3-vektor eller multipla af disse. Vi anvender da ofte notationen eksemplificeret ved (5.22). Af (5.22) ses det direkte, at 4-hastighedens rumlige komponenter for  $u \rightarrow 0$  går over i den sædvanlige hastighed  $\vec{u}$ . Lad os yderligere bemærke, at  $\mathbf{U}$  er tidsagtig og peger mod fremtiden.

Kvadratet på 4-hastigheden  $\mathbf{U}^2 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$  er som ethvert skalarprodukt en invariant. Hvis vi derfor bestemmer kvadratet i ét inertialsystem, vil resultatet have gyldighed i ethvert andet. Det står os dermed frit at udregne kvadratet i det system, hvori det falder os lettest. Af udtrykket (5.22) for 4-hastigheden finder vi

$$\mathbf{U}^2 = \gamma_u^2 (c^2 - u^2), \quad (5.23)$$

som altså er gyldigt i ethvert system. Vælger vi nu partiklens hvilesystem, hvor  $u = 0$ , følger umiddelbart resultatet

$$\mathbf{U}^2 = c^2. \quad (5.24)$$

Vi ser, at kvadratet ikke refererer til nogen for partiklen karakteristisk størrelse: Alle partikler har samme 4-hastighedskvadrat, uanset hvordan de bevæger sig i rum og tid.

Det er vigtigt at bemærke sig argumentationen, som vi benyttede for at komme frem til (5.24). Her opnåede vi et numerisk resultat på elegant vis ved at betragte problemet fra et hensigtsmæssigt inertialsystem. Lignende metoder benyttes igen og igen ved arbejdet med 4-vektorer.

### 5.8.1 Eksempel: Hastighedstransformationerne fra 4-hastigheden

I Kapitel 4 udledte vi formler for, hvordan hastigheder transformerer mellem to inertialsystemer i indbyrdes bevægelse. Vi vil nu vise, hvordan disse formler kan udledes direkte fra transformationsegenskaberne for 4-hastigheden.

Hertil betragter vi en partikel, som bevæger sig med hastigheden  $\vec{u}$  i systemet S. Vi søger nu partiklens hastighed  $\vec{u}'$  i systemet S', som bevæger sig på sædvanlig måde med hastigheden  $v$  i forhold til S. Partiklens 4-hastighed i de to systemer betegnes henholdsvis  $\mathbf{U}$  og  $\mathbf{U}'$ . Ifølge udtrykket (5.22) for 4-hastigheden har vi

$$\mathbf{U}' = \gamma_{u'} (c, u'_x, u'_y, u'_z) \equiv (U'_0, U'_1, U'_2, U'_3),$$

og dermed

$$u'_x = c \frac{U'_1}{U'_0}, \quad u'_y = c \frac{U'_2}{U'_0}, \quad u'_z = c \frac{U'_3}{U'_0}.$$

Som enhver anden 4-vektor, transformerer 4-hastigheden ifølge Lorentz-transformationen (5.11), således at

$$U'_0 = \gamma_v (U_0 - \beta U_1), \quad U'_1 = \gamma_v (U_1 - \beta U_0), \quad U'_2 = U_2, \quad U'_3 = U_3.$$

Ved at indsætte disse i udtrykkene ovenfor følger nu, at

$$\begin{aligned} u'_x &= c \frac{U_1 - \beta U_0}{U_0 - \beta U_1} = c \frac{u_x - \beta c}{c - \beta u_x} = \frac{u_x - v}{1 - v u_x / c^2}, \\ u'_y &= c \frac{U_2}{\gamma_v (U_0 - \beta U_1)} = \frac{u_y}{\gamma_v (1 - v u_x / c^2)}, \\ u'_z &= c \frac{U_3}{\gamma_v (U_0 - \beta U_1)} = \frac{u_z}{\gamma_v (1 - v u_x / c^2)}. \end{aligned}$$

Vi ser, at de hermed udledte transformationsrelationer er identiske med relationerne (3.10).

## 5.9 Fire-accelerationen

En partikels 4-acceleration  $\mathbf{A}$  defineres ved

$$\mathbf{A} \equiv \frac{d^2 \mathbf{X}}{d\tau^2} = \frac{d\mathbf{U}}{d\tau}, \quad (5.25)$$

hvor vi igen har differentieret med hensyn til den invariante egentid  $\tau$ . Ved at benytte kædereglene for differentiation og resultatet (5.18) finder vi

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \gamma_u \frac{d}{dt} (\gamma_u c, \gamma_u \vec{\mathbf{u}}),$$

og hermed sammenhængen med 3-accelerationen  $\vec{\mathbf{a}} = d\vec{\mathbf{u}}/dt$

$$\mathbf{A} = \gamma_u \left( c \frac{d\gamma_u}{dt}, \frac{d\gamma_u}{dt} \vec{\mathbf{u}} + \gamma_u \vec{\mathbf{a}} \right). \quad (5.26)$$

4-accelerationens rumlige del er altså i almindelighed ikke ensrettet med  $\vec{\mathbf{a}}$ .

I partiklens øjeblikkelige hvilesystem, hvor  $u = 0$ , og dermed  $d\gamma_u/dt = 0$ , reducerer 4-accelerationen til

$$\mathbf{A} = (0, \vec{\mathbf{g}}). \quad (5.27)$$

egenacceleration

Vi har her indført betegnelsen  $\vec{\mathbf{g}}$  for den såkaldte *egen-acceleration*, altså accelerationen i partiklens øjeblikkelige hvilesystem. En partikels 4-acceleration er altså en nul-vektor ( $\mathbf{A}^2 = 0$ ), hvis og kun hvis dens egen-acceleration er nul. I modsat fald er  $\mathbf{A}$  rumagtig.

Idet kvadratet på 4-hastigheden er konstant,  $\mathbf{U}^2 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = c^2$ , fås ved at differentiere med hensyn til egentiden

$$\frac{d\mathbf{U}^2}{d\tau} = 2\mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = 2\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (5.28)$$

Der gælder altså i almindelighed sammenhængen

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (5.29)$$

En partikels 4-hastighed og 4-acceleration er således ortogonale, uafhængigt af hvordan partiklen bevæger sig i rumtiden.

### 5.9.1 Transformation af acceleration

Ligesom vi i Afsnit 5.8.1 udledte transformationsreglerne for hastigheden fra 4-hastigheden, kan vi udlede transformationsregler for accelerationen fra 4-accelerationen. Vi vil her indskrænke os til at bestemme transformationen mellem partiklens øjeblikkelige hvilesystem og laboratoriesystemet.

I partiklens øjeblikkelige hvilesystem  $S'$  er 4-accelerationen ifølge (5.27) givet ved

$$\mathbf{A}' = (0, \vec{g}) = (0, g_x, g_y, g_z), \quad (5.30)$$

hvor  $\vec{g} = (g_x, g_y, g_z)$  er partiklens egen-acceleration. Idet partiklen jo er i hvile i  $S'$ , har den i  $S$  hastigheden  $\vec{u} = (v, 0, 0)$ , og i dette system gælder da sammenhængen

$$a_x = \frac{1}{\gamma_v} \left[ \frac{A_1}{\gamma_v} - v \frac{d\gamma_v}{dt} \right] = \frac{1}{\gamma_v^2} [A_1 - \beta A_0], \quad (5.31)$$

som fås ved benyttelse af første-komponenten af udtrykket (5.26) for 4-accelerationen. Her har vi undervejs benyttet, at  $d\gamma_v/dt = A_0/\gamma_v c$ , som følger umiddelbart af nulte-komponenten af samme udtryk. Vi reducerer nu ovenstående udtryk ved at benytte Lorentz-transformationen ifølge hvilken  $A'_1 = \gamma_v(A_1 - \beta A_0)$  og finder endelig ved sammenligning med (5.30) resultatet

$$a_x = \frac{g_x}{\gamma_v^3}. \quad (5.32)$$

Ved i (5.26) at indsætte  $u_y = u_z = 0$  finder vi tilsvarende

$$a_y = \frac{g_y}{\gamma_v^2}, \quad \text{og} \quad a_z = \frac{g_z}{\gamma_v^2}. \quad (5.33)$$

Vi har hermed bestemt accelerationens transformationsegenskaber mellem det øjeblikkelige hvilesystem og laboratoriesystemet. Vi bemærker, at accelerationen i modsætning til i det klassiske tilfælde ikke er invariant over for en transformation mellem to inertialsystemer. Vi bemærker ligeledes, at partiklens acceleration i laboratoriesystemet går mod nul, når dens hastighed nærmer sig  $c$ . Dette sikrer selvfølgelig at partiklen ikke kan accelereres forbi lyshastigheden.

## Opsummering af Kapitel 5

- i) Lorentz-transformationens sammenblanding af en begivenheds rum- og tidskoordinater leder naturligt til opfattelsen af tiden som en fjerde dimension og dermed til indførelsen af den 4-dimensionale *rumtid*  $(ct, x, y, z)$ .
- ii) Den grundlæggende struktur i rumtiden er sættet af lyskegler, hvoraf der findes én for hver af rumtidens begivenheder  $\mathcal{P}$ . Lyskeglen for  $\mathcal{P}$  består af alle begivenheder  $\mathcal{Q}$ , der kan sende lys til eller modtage lys fra  $\mathcal{P}$ , altså

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0, \quad (5.4)$$

hvor  $\Delta$ 'erne angiver differensen mellem koordinaterne af  $\mathcal{P}$  og  $\mathcal{Q}$ .

- iii) Adskillelsen mellem to begivenheder i rumtiden karakteriseres ved fortegnet på størrelsen  $\Delta s^2$ : *i)* For  $\Delta s^2 = 0$  kan de to begivenheder netop forbindes med et lyssignal; *ii)* for  $\Delta s^2 > 0$  er den tidslige separation større end den rumlige, hvorfor de to begivenheder kan være kausalt forbundne; *iii)* for  $\Delta s^2 < 0$  er den rumlige separation større end den tidslige, hvorfor de to begivenheder ikke kan have nogen kausal forbindelse.
- iv) I rumtiden indføres 4-vektorer, med vektoren  $\Delta \mathbf{X} = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$  som prototype. Samtlige 4-vektorer  $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$  transformeres dermed som prototypen. Under Lorentz-transformationen fås dermed ( $\beta = v/c$ )

$$\begin{aligned} A'_0 &= \gamma_v (A_0 - \beta A_1), \\ A'_1 &= \gamma_v (A_1 - \beta A_0), \\ A'_2 &= A_2, \\ A'_3 &= A_3. \end{aligned} \quad (5.11)$$

- v) Kvadratet på en 4-vektor  $\mathbf{A}$  er defineret ved

$$\mathbf{A}^2 = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2, \quad (5.12)$$

og er en Lorentz-invariant størrelse.

## Gennemregnede eksempler til Kapitel 5

**5.1** Inertialsystemet  $S'$  bevæger sig på sædvanlig vis med hastigheden  $v = \frac{3}{5}c$  i forhold til inertialsystemet  $S$ . I  $S'$  er givet fire 4-vektorer:  $\mathbf{A}' = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{B}' = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{C}' = (1, -1, 0, 0)$  og  $\mathbf{D}' = (1, 0, 1, 0)$ . Udregn de tilsvarende 4-vektorer  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  og  $\mathbf{D}$  i  $S$ .

Vi benytter den inverse Lorentz-transformation, som på matrice-form har formen

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_v & \gamma_v\beta & 0 & 0 \\ \gamma_v\beta & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_0 \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix}.$$

Idet  $\beta = v/c = \frac{3}{5}$  og dermed  $\gamma_v = \frac{5}{4}$  fås da ved indsættelse

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \gamma_v \\ \gamma_v\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \gamma_v(1+\beta) \\ \gamma_v(1+\beta) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \gamma_v(1-\beta) \\ -\gamma_v(1-\beta) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \gamma_v \\ \gamma_v\beta \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## Opgaver til Kapitel 5

**5.1** Tre begivenheder  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  og  $\mathcal{P}_3$  har i et inertialsystem rumtids-kordinater  $(ct, x)$  med værdierne  $(2, 1)$ ,  $(7, 4)$  og  $(5, 6)$ . Fastlæg ved at betragte de relevante rumtids-intervaller hvilke par af begivenheder, der kan have årsagssammenhæng.

**5.2** To begivenheder  $\mathcal{P}_1$  og  $\mathcal{P}_2$  har i et inertialsystem  $S$  rumtids-kordinater  $(ct, x)$  med værdierne  $(0, 0)$  og  $(1, 2)$ . Find hastighederne af systemer, som bevæger sig på sædvanlig vis i forhold til  $S$ , således at: a) de to begivenheder er samtidige; og b)  $\mathcal{P}_2$  forekommer tiden  $1/c$  før  $\mathcal{P}_1$ . [Bemærk: Idet vi her regner rumlige kordinater dimensionsløse, får tiden dimension af hastighed<sup>-1</sup>. Hvis dette volder vanskeligheder, indsæt da selv længdeenheder (f.eks. meter) for kordinaterne.]

**5.3** Fem 4-vektorer er givet ved  $\mathbf{A} = (5, 4, 3, 0)$ ,  $\mathbf{B} = (5, 5, 0, 0)$ ,  $\mathbf{C} = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{D} = (5, 3, 2, 0)$  og  $\mathbf{E} = (1, 3, 2, 0)$ .

a) Beregn kvadratet på 4-vektorene og angiv hvilke 4-vektorer der er henholdsvis tidsagtige, rumagtige, og lysagtige.

Vektorene  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  og  $\mathbf{C}$  kan transformeres over i hinanden.

- b) Hvilken type transformation transformerer  $\mathbf{A}$  over i  $\mathbf{B}$ .
- c) Hvilken type transformation transformerer  $\mathbf{B}$  over i  $\mathbf{C}$ .

**5.4** En 4-vektor har komponenterne  $(V_0, V_1, V_2, V_3)$  i et inertialsystem  $S$ . Find dens komponenter  $i$ ) i et system, der er sammenfaldende med  $S$ , bortset fra, at retningen af  $x$ - og  $y$ -akserne er inverterede, altså  $x \rightarrow -x$  og  $y \rightarrow -y$ ;  $ii$ ) i et system, som er sammenfaldende med  $S$ , undtagen for en  $45^\circ$  drejning (positiv omløbsretning) af  $xy$ -planet omkring  $z$ -aksen;  $iii$ ) i et system, der har de rumlige akser parallelle med dem i  $S$ , men som bevæger sig med hastigheden  $v$  i  $y$ -retningen.

**5.5** Komponenten  $A_\mu$  af en 4-vektor  $\mathbf{A}$  er nul i *ethvert* inertialsystem. (Det er ligegyldigt hvilken komponent man vælger:  $\mu$  kan tage værdierne 0, eller 1, eller 2 eller 3.) Vis, at *alle* komponenter af  $\mathbf{A}$  er nul i ethvert inertialsystem, d.v.s.  $\mathbf{A}$  er nulvektoren:  $\mathbf{A} = \mathbf{0} = (0, \mathbf{0})$ .

**5.6** To 4-vektorer  $\mathbf{A}$  og  $\mathbf{B}$  er ortogonale:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ .

- a) Vis, at de to vektorer ikke begge kan være tidsagtige.
- b) Hvad kan vi sige om vektorene, hvis de begge er lysagtige?
- c) Antag, at  $\mathbf{A}$  er tidsagtig og  $\mathbf{B}$  rumagtig. Hvad kan man sige om  $\mathbf{B} = (B_0, \vec{\mathbf{b}})$  i systemet, hvor  $\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ ? Hvad kan man sige om  $\mathbf{A} = (A_0, \vec{\mathbf{a}})$  i systemet, hvor  $B_0 = 0$ ?
- d) Antag, at begge vektorer er rumagtige. Hvad kan man sige om  $\mathbf{B} = (B_0, \vec{\mathbf{b}})$  i systemet, hvor  $A_0 = 0$ ?

**5.7** Verificer invariansrelationen  $\mathbf{U}^2 = c^2$ , hvor  $\mathbf{U}$  er en partikels 4-hastighed, ved direkte substitution for  $\gamma$ -faktoren i (5.23).

**5.8** En rumraket bevæger sig væk fra jorden med hastigheden  $0.8c$ . Raketten påbegynder en acceleration, der i raketens hvilesystem har størrelsen  $50 \text{ m/s}^2$  i en retning, der danner en vinkel på  $45$  grader med bevægelsesretningen. Bestem størrelsen og retningen af accelerationen set fra jorden.

**5.9** I et såkaldt “ $g$ -minus-2”-eksperiment holder man en stråle af muoner i cirkulær bevægelse ved hjælp af et magnetfelt. Muonerne har en hastighed, der tilsvarende  $\gamma = 29.3$ , og radius i den cirkulære bevægelse er  $7 \text{ m}$ . Bestem muonernes acceleration i laboratoriesystemet og i muonernes øjeblikkelige hvilesystem. Sammenlign med tyngdeaccelerationen.

På trods af den voldsomme acceleration har muonerne under disse betingelser den sædvanlige middellevetid  $\tau = 2.2 \mu\text{sek}$ . Dette udgør en eksperimentel påvisning af, at muonerne udgør et *ideelt* ur, som omtalt i Afsnit 3.2. Idet muonstrålens intensitet ved injektion betegnes  $I_0$  ønskes det bestemt, hvor mange omgange strålen cirkulerer før intensiteten er  $I_0/e$ .

## 6 Relativistisk mekanik

### 6.1 Forudsætninger

Alt hvad vi hidtil har lært, har været baseret på et detaljeret studie af relativitetsprincippetets to postulater uden tilføjelse af yderligere hypoteser. Vi har her set, hvordan den Newtonske opfattelse af rum og tid kunne erstattes af en noget mere kompliceret men ikke desto mindre elegant og harmonisk rumtidsstruktur, som imødekommer relativitetsprincippet. Idet, som tidligere bemærket, den klassiske mekanik udspiller sig på en baggrund af rum og tid, kan man imidlertid ikke ændre modellen for denne baggrund uden at måtte tilpasse den øvrige fysik i overensstemmelse hermed. Og på samme måde, som det er tilfældet for rumtiden, må vi kræve, at den nye fysik tilfredsstiller relativitetsprincippet.

Hovedparten af fysiske lovmæssigheder refererer ikke udelukkende til længde og tid, men også til ikke-kinematiske størrelser så som kræfter, masser, etc. Yderligere aksiomer må derfor specificere, hvordan disse størrelser transformerer fra ét inertialsystem til et andet. For at tilfredsstille relativitetsprincippet må den matematiske udformning af samtlige fysiske love være *forminvariant*: Lovene skal have samme form i alle inertialsystemer.

Sammenfattende drejer den specielle relativitetsteori sig om Lorentz-invariant fysik. Newtons mekanik er Galilei-invariant, men ikke Lorentz-invariant, og den er derfor ikke i overensstemmelse med det specielle relativitetsprincip. Vort program er altså at revidere den klassiske mekanik således, at den går over i en ny form for beskrivelse, som er invariant over for Lorentz-transformationen. På den anden side ved vi fra erfaringen, at den klassiske mekanik ikke kan være fuldstændig forkert. Faktisk er næsten ethvert makroskopisk fænomen på udmærket vis beskrevet ved den klassiske mekanik. Dette inkluderer så følsomme operationer som at sende rumsonder til Månen og til fjerne planeter. Med opfindelsen af partikelacceleratorer har man imidlertid afsløret enorme uoverensstemmelser med den klassiske mekanik, mens den nye mekanik giver en perfekt beskrivelse. For et stort antal anvendelsesområder, som kun implicerer hastigheder, der er små i forhold til lyshastigheden, udgør den nye og den klassiske mekanik parallelle beskrivelser. Man vælger da af bekvemmelighedshensyn den klassiske beskrivelse. For store hastigheder har man imidlertid intet valg: Kun den nye mekanik giver en korrekt beskrivelse. Man kan i store træk anvende afvigelsen af  $\gamma$ -faktoren fra værdien 1 som et mål for graden af fejl, man gør ved at anvende den klassiske beskrivelse. For klassiske anvendelser er dette tal forsvindende, men i laboratorieeksperimenter med elementarpartikler er  $\gamma$ -faktorer af størrelsesordenen  $10^4$  ikke usædvanlige, og i kosmisk stråling har man observeret protoner med  $\gamma$ -faktorer på helt op til  $10^{11}$ . Her vil altså den klassiske

mekanik være fuldstændig forkert.

Sammenfattende må vi altså kræve for den nye mekaniks love, (*i*) at de har samme form i ethvert inertialsystem, og (*ii*) at de for ikke-relativistiske hastigheder er konforme med de Newtonske love.

## 6.2 Den nye mekaniks aksiomer

Vi søger nu en Lorentz-invariant beskrivelse af mekanikken, som i det klassiske tilfælde beskrives ved Newtons love. Idet vi indskrænker os til at betragte punktformede legemer, beskæftiger mekanikken sig primært med partikelkollisioner, partikelsystemer og partikler i eksterne felter. Lad os dog her understrege, at tyngdekraften antages fraværende i den specielle relativitetsteori, idet denne finder sin beskrivelse i den generelle relativitetsteori gennem en krumning af rumtiden.

Før vi påbegynder etableringen af den relativistiske mekanik, bør det understreges, at denne ikke lader sig *udlede* ved logiske argumenter, men at vi må indføre aksiomer og derefter kontrollere de afledede fysiske lovmæssigheder empirisk.

Kraften, som er et centralt begreb i den klassiske mekanik, spiller en mindre fremtrædende rolle i relativitetsteorien, hvor den primært manifesterer sig gennem den elektromagnetiske Lorentz-kraft. Tyngdekraften er som allerede nævnt fraværende. Det er derfor bekvemt at benytte impulsbevarelsen (som jo i den klassiske mekanik er et afledet resultat) som udgangspunkt for den relativistiske mekanik.

### 6.2.1 Fire-impulsen og den relativistiske impuls

Idet vi søger en Lorentz-invariant mekanik, er det hensigtsmæssigt at basere formuleringen på 4-vektorer. Lorentz-invariansen er da automatisk sikret. Kravet om impulsbevarelse må da involvere partiklers *4-impuls*, og vi søger nu en hensigtsmæssig definition af denne.

Lad os starte med at antage, at den til enhver partikel knyttede inertielle masse,  $m$ , som vi kender fra den klassiske mekanik, er en Lorentz-invariant størrelse. Vi kan da definere en partikels 4-impuls i analogi med, hvordan 3-impulsen er defineret, nemlig

$$\mathbf{P} = m\mathbf{U}, \quad (6.1)$$

hvor  $\mathbf{U}$  er 4-hastigheden. Ligesom  $\mathbf{U}$  er  $\mathbf{P}$  hermed tidsagtig og peger mod fremtiden. Idet  $\mathbf{U}^2 = c^2$  ifølge (5.24) får vi umiddelbart for enhver 4-impuls

$$\mathbf{P}^2 = m^2 c^2. \quad (6.2)$$

Ved anvendelse af komponent-formen (5.22) for  $\mathbf{U}$  finder vi

$$\mathbf{P} = m\mathbf{U} = m\gamma_u(c, \vec{\mathbf{u}}) \equiv (\gamma_u mc, \vec{\mathbf{p}}), \quad (6.3)$$

hvor vi ved den sidste ligning har indført notationen

$$\vec{\mathbf{p}} = \gamma_u m \vec{\mathbf{u}}. \quad (6.4)$$

Formalismen leder altså naturligt til størrelsen  $\vec{p}$ , som vi kalder den *relativistiske impuls*.

Bemærk, at den relativistiske impuls for små hastigheder,  $u/c \ll 1$ , går over i den klassiske impuls,  $m\vec{u}$ . Bemærk yderligere, at grundet  $\gamma$ -faktoren kan den relativistiske impuls vokse uden begrænsning, selvom hastigheden  $u$  er begrænset af  $c$ .

relativistisk impuls

### 6.2.2 Fire-impuls-bevarelse

Vi tager nu som grundlæggende aksiom for den relativistiske mekanik, at *4-impulsen er bevaret i ethvert partikelsammenstød*. Summen af 4-impulsen før et sammenstød er altså den samme som summen af 4-impulsen efter et sammenstød, altså

$$\boxed{\sum_{i=1, N^{\text{før}}} \mathbf{P}_i = \sum_{j=1, N^{\text{efter}}} \mathbf{P}_j}, \quad (6.5)$$

hvor  $i$  løber over alle  $N^{\text{før}}$  partikler før sammenstødet, og  $j$  løber over alle  $N^{\text{efter}}$  partikler efter sammenstødet. Bemærk, at  $N^{\text{efter}}$  kan være forskellig fra  $N^{\text{før}}$ , ligesom sammenstødet kan være elastisk såvel som uelastisk. Da (6.5) er en relation mellem 4-vektorer er vores grundlæggende aksiom automatisk Lorentz-invariant; den vil gælde i ethvert inertialsystem. Den første af vore forudsætninger er dermed opfyldt.

Ved anvendelse af komponentformen (6.3) for  $\mathbf{P}$  kan den grundlæggende bevarelsesætning (6.5) udtrykkes som to separate sætninger, nemlig bevarelsen af den relativistisk impuls,

$$\sum_{i=1, N^{\text{før}}} \vec{p}_i = \sum_{j=1, N^{\text{efter}}} \vec{p}_j, \quad (6.6)$$

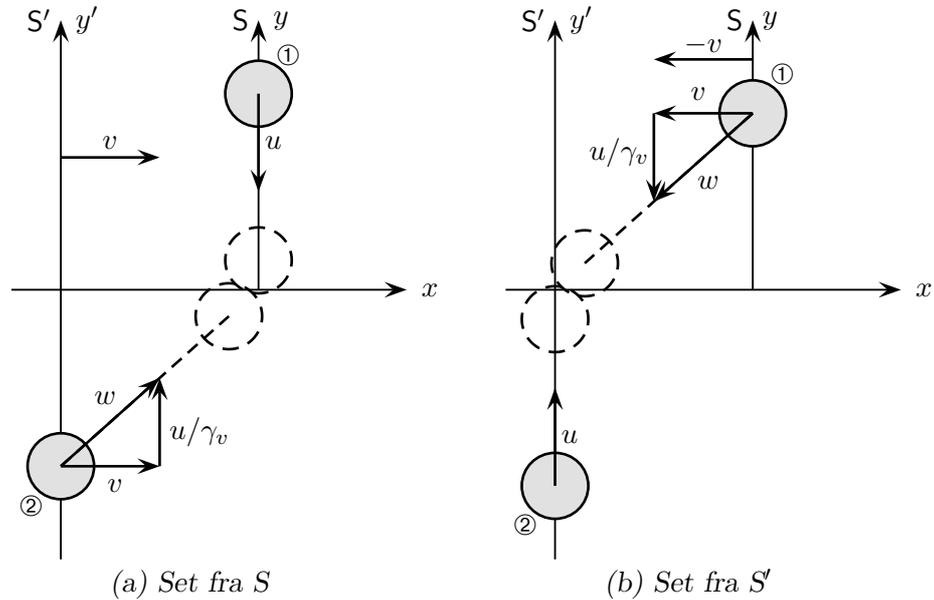
og bevarelsen af størrelsen  $\gamma_u m$ ,

$$\sum_{i=1, N^{\text{før}}} \gamma_{u_i} m_i = \sum_{j=1, N^{\text{efter}}} \gamma_{u_j} m_j. \quad (6.7)$$

I den ikke-relativistiske grænse ( $u/c \ll 1$ ) hvor  $\gamma \simeq 1$ , tilsvarende (6.6) og (6.7) åbenbart den klassiske mekaniks sætninger om henholdsvis impuls- og masse-bevarelse. Hermed tilfredsstiller vores relativistiske lov forudsætningerne, nemlig at den er Lorentz-invariant og konform med den Newtonske mekanik. Også i den formelle grænse  $c \rightarrow \infty$  går vore nye love over i de klassiske bevarelsesætninger.

### 6.2.3 Eksempel: Impulsbevarelse i stød mellem to partikler

Lad os nu ved et konkret eksempel se, hvorledes definitionen (6.4) af den relativistiske impuls leder til impulsbevarelse i partikelsammenstød. Til dette brug betragter vi et sammenstød mellem to identiske partikler, som bevæger sig med samme hastighed  $u$ , men i modsat retning, langs de respektive  $y$ -akser i de to sædvanlige inertialsystemer  $S$  og  $S'$ . Hver af dem vil da ifølge (3.10) have en hastighed set fra det andet system, hvis  $y$ -komponent har størrelsen  $u/\gamma_v$ . Lad os antage, at partiklerne kolliderer og smelter sammen til én partikel i det øjeblik  $S$  og  $S'$  er sammenfaldende (Figur 6.1). Af symmetri-



**Figur 6.1:** To partikler bevæger sig med samme hastighed  $u$  men i modsat retning langs de respektive  $y$ -akser i de to inertialsystemer  $S$  og  $S'$  og smelter sammen ved sammenstødet. Af symmetriårsager må systemets impuls langs  $y$ -aksen være nul efter stødet. Ifølge antagelsen om impulsbevarelse må det samme da være tilfældet før stødet. Det følger heraf, at den relativistiske impuls må være givet ved udtrykket (6.4).

årsager kan den sammensmeltede partikel ikke have nogen hastighed i  $y$ -retningen i nogen af systemerne. Impulsbevarelse i  $S$  betyder da, at de to partikler før stødet må have lige store  $y$ -impulser. For en partikel må altså  $y$ -impulsen være uafhængig af dens hastighed efter  $x$ -aksen. Men da dens  $y$ -hastighed,  $u/\gamma_v$ , jo samtidigt netop via  $\gamma$ -faktoren afhænger af dens hastighed efter  $x$ -aksen, følger den umiddelbare konklusion, at det klassiske udtryk,  $\vec{p} = m\vec{u}$ , ikke kan være generelt gyldigt.

Benytter vi derimod udtrykket (6.4) for den relativistiske impuls, finder vi

$$\gamma_u mu = \frac{\gamma_w mu}{\gamma_v}.$$

hvor venstresiden er (størrelsen af)  $y$ -impulsen af partiklen, der bevæger sig langs  $y$ -aksen, og højresiden er (størrelsen af)  $y$ -impulsen af partiklen, der bevæger sig langs  $y'$ -aksen og har farten  $w$  i forhold til  $S$ . Ved at forkorte igennem med  $mu$  finder vi da relationen

$$\gamma_u = \frac{\gamma_w}{\gamma_v}.$$

Vi kunne nu vise, at denne relation er opfyldt ved at anvende transformationsegenskaberne (3.18) for  $\gamma$ -funktionen. Imidlertid vælger vi at benytte os af et trick. Hertil

lader vi  $u \rightarrow 0$  (vi betragter altså en sekvens af eksperimenter med stadigt lavere værdi af  $u$ ), hvorved følgelig  $w \rightarrow v$ . Ligningen ovenfor er dermed opfyldt, hvorved vi har verificeret, at impulsen er bevaret i det betragtede stød. Vi konkluderer således, at vi med (6.4) har et tilfredsstillende udtryk for den relativistiske impuls.

**Indskud 6.1** Udtrykket (6.4) for den relativistiske impuls skrives til tider på formen

$$\vec{p} = m(u)\vec{u},$$

hvor man altså har opgivet forestillingen om, at en partikels masse er en Lorentz-invariant, og i stedet opfatter massen som en funktion af hastigheden

$$m(u) \equiv \gamma_u m.$$

Her angiver  $m$  partiklens masse i klassisk forstand, altså den inertielle masse for små hastigheder,  $u/c \ll 1$ . Denne kaldes nu partiklens hvilemasse for at skelne den fra den relativistiske masse  $m(u)$ .

Lad os understrege, at vi i denne fremstilling **ikke** benytter os af denne sprogbug. Vi fortsætter således med at opfatte massen som en invariant og lader den relativistiske impuls være defineret ved (6.4).

## 6.3 Relativistisk energi

Lad os nu kigge nærmere på ligning (6.7), som i den ikke-relativistiske grænse tilsvarende den klassiske mekaniks massebevarelse. I det almene tilfælde, er det åbenbart ikke massen, der er bevaret, men en størrelse  $\sum \gamma_u m$ , som afhænger af partiklernes hastighed. I den klassiske mekanik kender vi kun én sådan bevaret størrelse, nemlig den kinetiske energi af partikler i elastiske sammenstød. Her må bevarelsen imidlertid gælde i alle sammenstød, både elastiske og uelastiske, så  $\sum \gamma_u m$  kan ikke repræsentere den kinetiske energi. Imidlertid er jo den totale energi bevaret i ethvert sammenstød. Kunne det da være, at  $\sum \gamma_u m$  repræsenterede partikelsystemets *totale energi*, og at totalenergien af den enkelte partikel dermed repræsenteredes ved størrelsen  $\gamma_u m$ . Svaret på dette spørgsmål viser sig at være "ja".

Til belysning af dette forhold foretager vi rækkeudviklingen

$$\gamma_u m = m \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2} = m + \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{2} m u^2 \right) + \dots \quad (6.8)$$

Her identificerer vi det andet led som det klassiske udtryk for den kinetiske energi divideret med kvadratet på lyshastigheden. På grund af den enorme størrelse af  $c^2$  vil dette led for ikke-relativistiske hastigheder være forsvindende sammenlignet med massen. Det har derfor ikke kunnet observeres under klassiske forhold, og dette har ledt til den klassiske mekaniks princip om massebevarelse.

Vi kan nu indse, at på samme måde som den kinetiske energi bidrager til  $\gamma m$ , må enhver anden energiform gøre det. En af de ting, der jo netop kendetegner energi, er, at den kan omdannes fra én form til en anden. Tænk vi os f.eks., at to ens kugler med modsat rettede hastigheder kolliderer og smelter sammen til et legeme i hvile, er  $\sum \gamma m$  ifølge forudsætningen konstant under hele processen. Men ved sammenstødet omdannes kuglernes kinetiske energi jo til varmeenergi, og varmeenergien må derfor nu give et bidrag af samme størrelse til  $\sum \gamma m$ , som den kinetiske energi gav tidligere. Derefter kunne vi igen tænke os at omforme varmeenergien til en tredje energiform etc. Uanset hvilken form energien er på, vil energimængden være den samme, og da også  $\sum \gamma m$  er bevaret, må konklusionen da blive, at *enhver* energiform bidrager på samme måde til  $\gamma m$ .

Hvis vi således betragter et fysisk system i hvile, så vil i det mindste en del af dets masse måtte tilskrives de forskellige indre energiformer, som er tilstede i systemet. Fra det makroskopiske, via det atomare og helt ned til det subnukleare niveau ved vi, at der er frihedsgrader med tilhørende energier. Logisk set kunne man tænke sig, at det kun var en del af et fysisk systems masse, der således kunne tilskrives indre energiformer. Einstein tog imidlertid det for hans tid modige skridt at ækvivalere hele massen med energi ifølge den berømte relation

$$E_0 \equiv mc^2. \quad (6.9)$$

Her kaldes energien  $E_0$  for systemets *hvileenergi*, idet den jo netop angiver energien af et system i hvile. I dag ved vi fra f.eks. annihilationen af elektroner og positroner, at elementarpartiklers masse lader sig omdanne fuldstændig til strålingsenergi. Einsteins berømte ligning er derfor eksperimentelt meget velfunderet.

Vender vi nu tilbage til en partikel i fri bevægelse, vil dennes *totale energi* ifølge ovenstående argumentation være

$$E = \gamma_u mc^2. \quad (6.10)$$

Den *kinetiske energi*,  $K$ , defineres da som forskellen mellem partiklens totale energi og dens hvileenergi

$$K = E - E_0, \quad (6.11)$$

således at

$$K = (\gamma_u - 1)mc^2. \quad (6.12)$$

Ved rækkeudvikling af  $K$  genfinder vi selvfølgelig, som i (6.8), det klassiske udtryk  $\frac{1}{2}mu^2$  som det ledende led. De øvrige led udgør den relativistiske "korrektion". Bemærk, at i et *elastisk* stød, hvor enhver partikels masse er uændret, leder (6.7) til bevarelsen af den kinetiske energi.

Med udtrykket (6.10) for den totale energi tager 4-impulsen (6.3) den vigtige form

$$\mathbf{P} = (E/c, \vec{p}). \quad (6.13)$$

Lad os slutte dette afsnit af med at anføre den ofte benyttede sammenhæng mellem en partikels hastighed, impuls og energi

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{u} \quad (6.14)$$

som følger af direkte anvendelse af definitionerne (6.4) og (6.10).

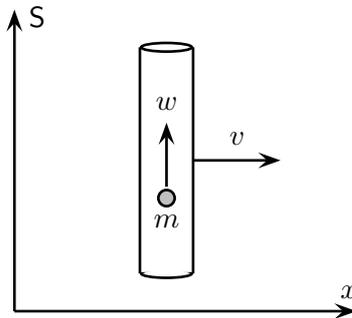
### Indskud 6.2 Transformation af energi og impuls

Af formen (6.13) for 4-impulsen og af Lorentz-transformationen (5.11) for en 4-vektor, fås i særdeleshed de meget anvendte transformationsregler for energi og impuls

$$\begin{cases} E'/c = \gamma_v (E/c - \beta p_x), \\ p'_x = \gamma_v (p_x - \beta E/c), \\ p'_y = p_y, \\ p'_z = p_z. \end{cases} \quad (6.15)$$

#### 6.3.1 Eksempel: Ækvivalensen mellem indre energi og masse

Til demonstration af ækvivalensen mellem et systems indre energi og dets masse betragter vi et rør, hvori en kugle kan bevæge sig uden gnidning. Udefra kan kuglen ikke ses, og dens bevægelse kan derfor regnes som en indre frihedsgrad.



**Figur 6.2:** Den kinetiske energi,  $K$ , af kuglen, der bevæger sig i røret, bidrager med størrelsen  $K/c^2$  til systemets inertielle masse.

Vi lader i udgangspunktet røret med massen  $M$ , ligge i hvile vinkelret på  $x$ -aksen i et inertialsystem  $S$ . Kuglen med massen  $m$  bevæger sig med den konstante hastighed  $w$ . Idet alene kuglen bevæger sig, er systemets kinetiske energi da

$$K = \{\gamma_w - 1\}mc^2,$$

Vi tænker os nu røret udsat for en forbigående kraftpåvirkning, hvorefter det bevæger sig med den konstante hastighed  $v$  i  $x$ -aksens retning, men stadig vinkelret på denne. Vi vil nu beregne systemets kinetiske energi, når denne tilstand er nået.

Da røret i S bevæger sig med hastigheden  $v$ , er dets kinetiske energi bestemt ved

$$K_1 = \{\gamma_v - 1\}Mc^2.$$

For at kunne udtrykke kuglens kinetiske energi, må vi kende dens nye hastighed  $\vec{u}$  i systemet S. Denne kan lettest findes, idet vi forestiller os et nyt inertialsystem  $S'$ , der følger røret og dermed bevæger sig med hastigheden  $v$  i forhold til S. I dette system må kuglens hastighed  $\vec{w}$  have komponenterne  $\vec{w} = (0, w, 0)$ , idet en kraftpåvirkning som den antagne ikke kan ændre impulsen i  $y$ -aksens retning. Idet de to hastigheder  $\vec{v}$  og  $\vec{w}$  altså er ortogonale finder vi af transformationsformlen (3.18) for  $\gamma$ -faktoren, at  $\gamma_u = \gamma_v\gamma_w$ . Kuglens kinetiske energi er dermed

$$K_2 = \{\gamma_v\gamma_w - 1\}mc^2.$$

Systemets samlede energiforøgelse som følge af kraftpåvirkningen bliver da

$$\Delta K = K_1 + K_2 - K,$$

der ved hjælp af de fundne udtryk giver

$$\Delta K = \{\gamma_v - 1\}Mc^2 + \{\gamma_v\gamma_w - 1\}mc^2 - \{\gamma_w - 1\}mc^2.$$

Dette kan omskrives til

$$\Delta K = \{\gamma_v - 1\}[M + m + \{\gamma_w - 1\}m]c^2.$$

Ved at betragte sidste led ser vi, at dette udtryk kan fortolkes som den kinetiske energi af et system, der bevæger sig med hastigheden  $v$  i S, således som røret og kuglen under ét gør efter kraftpåvirkningen. Systemets masse må da være givet ved faktoren i den skarpe parentes. Vi ser da, at systemets masse er summen  $M + m$  af rørets og kuglens masser plus det forventede tillægsled

$$\Delta m = \{\gamma_w - 1\}m = K/c^2.$$

### 6.3.2 Eksempel: $E_0 = mc^2$ og makroskopiske legemer

For et makroskopisk legeme er hvileenergien  $mc^2$  enorm. Hvert gram indeholder en energimængde på  $9 \times 10^{13}$  J, som nogenlunde tilsvare Hiroshima-bomben. En meget lille del af denne energi hidrører fra den termiske bevægelse af molekylerne, der udgør legemet, og kan afgives som varmeenergi. En del hidrører fra de intermolekylære og interatomare bindingsenergi og kan i visse tilfælde delvist afgives ved forbrænding eller ved andre kemiske processer. En meget større del hidrører fra kernebindingerne og kan også tiltider frisættes, som f.eks. i kernekraftværker og kernevåben. Den største del af energien (omkring 99%) hidrører fra hvileenergien af nukleonerne (protoner og neutroner) og elektronerne, der udgør atomerne. Kun gennem annihilation mellem stof og antistof kan denne sidste del af energien frigøres.

### 6.3.3 Eksempel: Solens udstråling

Ved solkonstanten forstås den energimængde, der i form af solstråling falder på en fladeenhed, anbragt vinkelret på strålingens retning. Den er ved jordoverfladen  $1368 \text{ W/m}^2$ . Den totale effekt af solens elektromagnetiske stråling – kaldet Solens luminositet – er derfor

$$L_{\odot} = 4\pi R^2 \cdot 1368 \text{ W/m}^2 = 3.85 \times 10^{26} \text{ W},$$

hvor  $R = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$  er afstanden mellem Jorden og Solen. Solens totale energitab er lidt større, idet den elektromagnetiske stråling ledsages af udstråling af elementarpartikler kaldet neutrinoer, som kun vekselvirker yderst svagt med stof, og derfor ikke regnes med i solkonstanten.

Vi må nu forvente, at Solens energitab ifølge ækvivalensen mellem masse og energi er ledsaget af et massetab bestemt ved

$$-\frac{\Delta m}{\Delta t} > \frac{3.85 \times 10^{26} \text{ W}}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 4.3 \times 10^9 \text{ kg/s}.$$

## 6.4 De relativistiske bevarelseslove

Lad os for en kort bemærkning vende tilbage til udgangspunktet for vores opbygning af den relativistiske mekanik, nemlig antagelsen om at 4-impulsen er bevaret i ethvert partikelsammenstød. Denne antagelse fik udtryk gennem ligningerne (6.6) og (6.7), som vi nu forstår udtrykker henholdsvis bevarelsen af partikelsystemets relativistiske impuls og totale energi. Bemærk, at relationerne (6.6) og (6.7) er henholdsvis rumlige og tidslige komponenter af 4-vektoren-relationen (6.5). Men idet enhver 4-vektor transformerer ved Lorentz-transformationen (5.11), som jo sammenblander de tidslige og rumlige komponenter, indser man let, at hvis to givne 4-vektorer har identiske tidslige komponenter i ethvert inertialsystem, så må også deres rumlige komponenter være identiske, og omvendt<sup>1</sup>. Det følger logisk heraf, at enhver af bevarelsesætningerne (6.6) og (6.7) hver for sig medfører den fulde lov (6.5). Udtrykt anderledes, følger impulsbevarelsen som en konsekvens af energibevarelsen, og omvendt.

## 6.5 Sammenhængen mellem energi og impuls

Mellem energien,  $E$ , og den relativistiske impuls,  $\vec{p}$ , kan vi udlede en betydningsfuld relation ved at betragte kvadratet på 4-impulsens. For denne får vi ved at benytte (6.13)

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = E^2/c^2 - p^2. \quad (6.16)$$

I partiklens hvilesystem, hvor  $p = 0$  og  $E = mc^2$ , reducerer udtrykket til

$$\mathbf{P}^2 = m^2 c^2. \quad (6.17)$$

<sup>1</sup> Situationen er parallel til det sædvanlige 3-dimensionale tilfælde: Hvis to givne vektorer har identiske  $x$ -komponenter for enhver orientering af koordinatsystemet, så må de to vektorer være identiske.

Da  $\mathbf{P}^2$  imidlertid er invariant, er de to udtryk ækvivalente, således at

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.} \quad (6.18)$$

Da  $E$  er en positiv størrelse, har vi

$$E = K + mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (6.19)$$

For meget store hastigheder, således at  $pc \gg mc^2$ , fås

$$E \simeq pc.$$

Denne approksimation benyttes ofte i højenergifysikken.

For små hastigheder, således at  $pc \ll mc^2$ , finder vi af (6.19)

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4}} = mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 c^2} + \dots \right) \\ &\simeq mc^2 + \frac{p^2}{2m}, \end{aligned}$$

hvorfor (6.19), som allerede tidligere har anført, går over i det klassiske udtryk med  $K = p^2/2m = \frac{1}{2}mv^2$ .

Den hyperbolske sammenhæng mellem energi og impuls, som udtrykkes af (6.18) findes afbildet på Figur 6.3. Bemærk hvordan energien vokser fra værdien  $mc^2$  ved hvile og for store værdier af impulsen,  $pc \gg mc^2$  nærmer sig asymptoten  $E = pc$ .

## 6.6 Masseløse partikler

I den relativistiske mekanik kan vi inkludere endog masseløse partikler såsom fotoner. Ved at sætte  $m = 0$  i (6.18) finder vi  $E^2 = p^2 c^2$ , og dermed

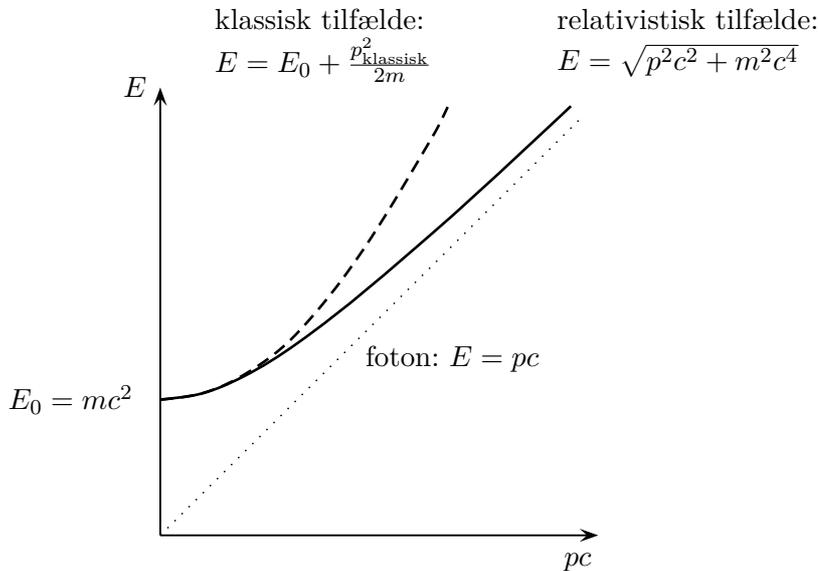
$$p = E/c. \quad (6.20)$$

En masseløs partikel vil dermed ifølge (6.13) have 4-impulsen

$$\mathbf{P} = E/c(1, \vec{n}), \quad (6.21)$$

hvor  $\vec{n}$  er enhedsvektoren, der beskriver partiklens bevægelsesretning i rummet. Idet 4-impulsen altså er lysagtig (og dermed ifølge (6.1) og (5.20) enhver forskydningsvektor på partiklens bane har samme egenskab) følger det, at enhver masseløse partikel bevæger sig med lyshastigheden. Dette kan også indses ved anvendelse af (6.14).

Resultatet (6.20) kunne for en overfladisk betragtning synes at være i modstrid med definitionen (6.4) af den relativistiske impuls,  $\vec{p} \equiv \gamma_u m \vec{u}$ , da man ved at sætte  $m = 0$  i dette udtryk, synes at opnå, at masseløse partikler vil have impulsen nul. Dette er imidlertid en fejlslutning, idet jo  $\gamma_u$  netop giver en uendelig værdi for  $u = c$ . Det kan tværtimod vises, at resultatet (6.20) er konsistent med impulsdefinitionen (6.4).



**Figur 6.3:** Totalenergien som funktion af impulsen i det klassiske tilfælde, i det relativistiske tilfælde og for en (masseløs) foton.

**Øvelse 6.1** Betragt en partikel med den konstante energi  $E$  og massen  $m$ . Benyt udtrykket (6.10) for partiklens energi til med udgangspunkt i impulsdefinitionen (6.4) at opskrive et udtryk for impulsens størrelse, som alene afhænger af  $E$  og  $m$  og naturkonstanten  $c$ . Foretag nu grænseovergangen  $m \rightarrow 0$  og kontroller at resultatet er i overensstemmelse med (6.20).

**Løsning:** Af (6.10) fås  $\gamma_u = E/mc^2$  og derfor ved anvendelse af definitionen (2.12) af  $\gamma$ -funktionen  $u = c\sqrt{1 - \gamma_u^{-2}} = c\sqrt{1 - (mc^2/E)^2}$ . Ved indsættelse i (6.4) fås da  $p = \gamma_u m u = (E/c)\sqrt{1 - (mc^2/E)^2}$ . Dermed er det åbenlyst, at  $p \rightarrow E/c$  for  $m \rightarrow 0$ .

### 6.6.1 Doppler-effekten fra transformationen af fotonens 4-impuls

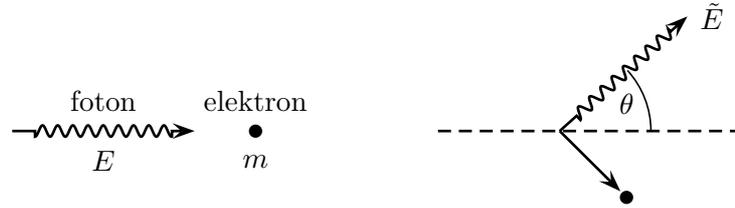
Vi kan nu demonstrere, hvorledes udtrykket (4.4) for den relativistiske Doppler-effekt følger direkte af transformationsegenskaberne for fotonens 4-impuls. Til dette brug har vi brug for et resultat fra kvantemekanikken, som siger, at en fotonens energi er proportional med dens frekvens,

$$E = h\nu, \quad (6.22)$$

hvor proportionalitetskonstanten  $h$  er *Plancks konstant*.

Lad os betragte en foton, der bevæger sig langs  $x$ -aksen i systemet  $S$  med energien  $E$ . Den har da 4-impulsen

$$\mathbf{P} = E/c(1, 1, 0, 0).$$



**Figur 6.4:** Kinematisk situation for Comptonspredning

Fotonens 4-impuls i  $S'$  kan nu bestemmes ved hjælp af Lorentz-transformationen (5.11). Her er vi imidlertid kun interesserede i energien, hvorfor vi nøjes med at beregne nulte-komponenten, altså

$$E' = \gamma_v(E - \beta E) = E \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

Idet vi benytter proportionaliteten (6.22) af  $E$  og  $\nu$ , fås da umiddelbart relationen

$$\frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}},$$

i overensstemmelse med (4.4).

På tilsvarende vis kan også transformationsegenskaberne for retningen af en fotonens bevægelse og dermed udtrykket (4.18) for lysets aberration bestemmes.

### 6.6.2 Eksempel: Compton-spredning

Som et eksempel på anvendelsen af den relativistiske spredningsmekanik på masseløse partikler betragter vi Compton-spredningen, hvorved fotoner spredes på elektroner. Vi betragter, som skitseret på Figur 6.4, en foton med energien  $E$  som støder sammen med en hvilende elektron med massen  $m$ , og derved spredes med vinklen  $\theta$ . Efter spredningsprocessen har fotonen energien  $\tilde{E}$ , som vi ønsker at beregne.

Vi skriver 4-impulsbevarelsen på formen

$$\mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_e = \tilde{\mathbf{P}}_\gamma + \tilde{\mathbf{P}}_e,$$

hvor symboler med tilder refererer til slutttilstanden. I dette udtryk har vi information om de to partikler i begyndelsestilstanden (repræsenteret ved  $\mathbf{P}_\gamma$  og  $\mathbf{P}_e$ ), og vi søger information om fotonen i slutttilstanden (repræsenteret ved  $\tilde{\mathbf{P}}_\gamma$ ). Derimod er vi ikke interesserede i elektronen i slutttilstanden (repræsenteret ved  $\tilde{\mathbf{P}}_e$ ). På elegant vis dropper denne elektrons kinematik ud af ligningen, ved at isolere dens impuls på den ene side,

$$\tilde{\mathbf{P}}_e = \mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_e - \tilde{\mathbf{P}}_\gamma,$$

og derefter kvadrere,

$$\tilde{\mathbf{P}}_e^2 = \mathbf{P}_\gamma^2 + \mathbf{P}_e^2 + \tilde{\mathbf{P}}_\gamma^2 + 2\mathbf{P}_\gamma \cdot \mathbf{P}_e - 2\mathbf{P}_\gamma \cdot \tilde{\mathbf{P}}_\gamma - 2\mathbf{P}_e \cdot \tilde{\mathbf{P}}_\gamma.$$

For de invariante kvadrater på 4-impulserne har vi ifølge (6.2),  $\mathbf{P}_\gamma^2 = \tilde{\mathbf{P}}_\gamma^2 = 0$  og  $\mathbf{P}_e^2 = \tilde{\mathbf{P}}_e^2 = m^2c^2$ , hvorefter altså

$$\mathbf{P}_\gamma \cdot \tilde{\mathbf{P}}_\gamma = \mathbf{P}_\gamma \cdot \mathbf{P}_e - \mathbf{P}_e \cdot \tilde{\mathbf{P}}_\gamma.$$

Ved spredningsprocessen ændres fotonens bevægelsesretning fra at være bestemt ved enhedsvektoren  $\vec{n}$  til at være bestemt ved enhedsvektoren  $\tilde{\vec{n}}$ , hvor ifølge forudsætningerne  $\vec{n} \cdot \tilde{\vec{n}} = \cos \theta$ . Fotonens 4-impuls før og efter vekselvirkningen er derfor henholdsvis

$$\mathbf{P}_\gamma = E/c(1, \vec{n}), \quad \text{og} \quad \tilde{\mathbf{P}}_\gamma = \tilde{E}/c(1, \tilde{\vec{n}}).$$

Elektronen er i hvile før vekselvirkningen, hvorfor dens 4-impuls er

$$\mathbf{P}_e = mc(1, \mathbf{0}).$$

Indsætter vi nu de tre 4-impulser i udtrykket ovenfor, finder vi

$$\frac{E\tilde{E}}{c^2}(1 - \cos \theta) = Em - \tilde{E}m,$$

som efter omskrivning giver det eftersøgte resultat for fotonenergien

$$\tilde{E} = \frac{E}{\frac{E}{mc^2}(1 - \cos \theta) + 1}.$$

## 6.7 Massecenter-systemet og den invariante masse

For mange anvendelser er det nyttigt at betragte problemet fra et inertialsystem, hvori den totale impuls er nul. Et sådan system eksisterer for stort set ethvert partikelsystem, som vist nedenfor. I analogi med den klassiske mekanik kaldes dette system ofte *tyngdepunktssystemet*, selvom dette egentlig er en lidt misvisende betegnelse: begrebet har jo intet med tyngde at gøre. En bedre betegnelse ville være *nul-impuls-systemet* eller det fra engelsk direkte oversatte *massecenter-systemet* ("center-of-mass system").

Lad os betragte et vilkårligt inertialsystem S og i dette et system af partikler, der lejlighedsvist vekselvirker via sammenstød, men ellers er frie. Partiklerne bevæger sig da jævnt mellem sammenstødene. Vi definerer nu systemets totale energi, totale impuls og totale 4-impuls som den *øjeblikkelige* sum over de tilsvarende størrelser for hver af partiklerne, altså

$$E = \sum_i E_i, \quad \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i, \quad \mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P}_i = \sum_i (E_i/c, \vec{p}_i) = (E/c, \vec{p}). \quad (6.23)$$

På grund af bevarelseslovene er enhver af disse størrelser konstant i tiden.

Idet  $\mathbf{P}$  er en sum af 4-vektorer, synes det åbenbart af den selv må være en 4-vektor. Helt så simpelt er det imidlertid ikke. Havde enhver iagttagere været enig om hvilke  $\mathbf{P}_i$ 'er, der indgik i summen  $\sum \mathbf{P}_i$ , så ville  $\mathbf{P}$  klart være en 4-vektor. Men summen udregnes jo til

et bestemt tidspunkt i hvert system, og det kan dermed være forskellige  $\mathbf{P}_i$ 'er der udgør summen i de forskellige systemer. Imidlertid gælder der jo 4-impulsbevarelse ved hvert eneste sammenstød mellem to partikler, og i hvert system kunne man således udregne sin sum over præcis de samme  $\mathbf{P}_i$ 'er som i  $S$ , og få det samme resultat som for den øjeblikkelige sum. Så  $\mathbf{P}$  er altså virkelig en 4-vektor.

I almindelighed indeholder partikelsystemet både masseløse partikler og partikler med endelig masse. Tilsvarende indeholder summen  $\sum \mathbf{P}_i$  både lysagtige ( $m = 0$ ) og tidsagtige ( $m > 0$ ) 4-vektorer, som alle peger mod fremtiden. Man indser da let (f.eks. ved geometriske argumenter), at  $\mathbf{P}$  vil være tidsagtig og pege mod fremtiden. Eneste undtagelse herfra er tilfældet, hvor systemet består af udelukkende masseløse partikler, der alle bevæger sig parallelt. I alle andre tilfælde findes der da et system, hvori de rumlige komponenter af  $\mathbf{P}$  er nul, altså  $\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \mathbf{0}$ . Dette system er massecenter-systemet, og heri er systemets 4-impuls

$$\mathbf{P}_{\text{CM}} = (Mc, \mathbf{0}), \quad (6.24)$$

hvor  $M$  kaldes systemets *invariante masse* og er givet ved

$$Mc = \sqrt{\mathbf{P}^2} = \sqrt{E^2/c^2 - p^2}, \quad (6.25)$$

invariant masse

med  $E$  og  $p$  defineret ved (6.23). Vi ser altså, at den invariante masse er for partikelsystemet, hvad massen er for en enkelt partikel. Det er præcis den masse man ville måle, hvis man ikke var opmærksom på systemets sammensatte natur (som for et makroskopisk legeme, som er sammensat af molekyler i indbyrdes bevægelse).

Lad os slå fast, at den invariante masse er defineret ved kvadratet på 4-impulsen, og at den derfor har samme værdi i ethvert inertialsystem. Det er jo netop derfor den bærer betegnelsen *invariant*. Selvom den invariante masse ovenfor indførtes i massecenter-systemet, så har den en betydning, der langt overstiger denne snævre anvendelse. Da den jo netop er invariant, er man fri til at beregne den i det system, hvori udregningerne falder mest naturlige. Ofte vælges laboratoriesystemet, hvor man typisk foretager energi- og impuls-målinger.

Den invariante masse er bevaret i et isoleret system.

Lad os slutte af med den vigtige iagttagelse, at bevarelse af 4-impulsen leder til bevarelse af den invariant masse. Den invariante masse er altså bevaret for et ethvert isoleret system. Et vigtigt eksempel er henfaldet af en ustabil partikel: Her er den invariante masse den samme før og efter henfaldet. Og idet den invariante masse før henfaldet jo netop er den ustabile partikels masse, så kan denne altså estimeres ved at bestemme den invariante masse af systemet bestående af henfaldsprodukterne. Dette giver en metode til bestemmelse af massen af meget kortvarige partikler.

### 6.7.1 Eksempel: Elektron-positron-sammenstød

Vi betragter en proces, hvor en elektron ( $e^-$ ) og en positron ( $e^+$ ) bringes til sammenstød. Idet positronen er elektronens anti-partikel, kan de to partikler herved annihilere, og den frigivne energi omdannes til andre partikler ifølge Einsteins formel  $E_0 = mc^2$ . I det

givne tilfælde, hvor elektronen og positronen tænkes at være modsatrettede, og hvor begge har impulsen  $p = 1.55 \text{ GeV}/c$ , skabes en ny partikel kaldet en  $J/\psi$  ved reaktionen  $e^+ + e^- \rightarrow J/\psi$ . Vi ønsker nu at bestemme massen af den skabte partikel. (Vedrørende de her anvendte enheder, se det følgende indskud.)

Da 4-impulsen er bevaret ved processen, ønsker vi altså at beregne den invariante masse af elektron-positron-systemet før stødet. Vi starter med at konstatere, at elektronen og positronen har identiske masser, idet de er hinandens anti-partikler. Dernæst ser vi, at for begge partikler er hvileenergien  $mc^2 = 0.511 \text{ MeV}$  forsvindende i forhold til  $pc = 1.55 \text{ GeV}$ , hvorfor vi kan benytte approksimationen  $E = pc$ . De to partiklers 4-impuls er da

$$\mathbf{P}_{e^-} = (p, \vec{p}) \quad \text{og} \quad \mathbf{P}_{e^+} = (p, -\vec{p}).$$

Systemets samlede 4-impuls,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{e^-} + \mathbf{P}_{e^+} = (2p, 0),$$

har da det invariante kvadrat  $\mathbf{P}^2 = 4p^2$ , og den invariante masse er

$$M = \frac{1}{c} \sqrt{\mathbf{P}^2} = 2p/c.$$

Ved indsættelse af talværdier finder vi nu massen af  $J/\psi$  partiklen

$$M = 2 \cdot 1.55 \text{ GeV}/c^2 = 3.1 \text{ GeV}/c^2.$$

### Indskud 6.3 Energienheden elektronvolt

I den moderne fysik, navnlig i højenergifysikken, har der udviklet sig en specialiseret sprogbrug, hvor energier regnes i enheder af elektronvolt (eV). Her er 1 eV det arbejde, som det elektriske felt udfører på en elektron, når denne gennemløber et spændingsfald på 1 Volt. Elektronvolt er da en meget lille enhed, idet feltets arbejde jo er

$$W = (-1.6022 \times 10^{-19} \text{ C})(-1 \text{ V}) = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ J},$$

således at

$$\boxed{1 \text{ eV} = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ J}} \quad (6.26)$$

I praktiske anvendelser benytter man ofte enhederne keV, MeV, GeV og TeV, som er henholdsvis  $10^3 \text{ eV}$ ,  $10^6 \text{ eV}$ ,  $10^9 \text{ eV}$  og  $10^{12} \text{ eV}$ .

Som et eksempel udregner vi elektronens hvileenergi i elektronvolt, og finder

$$E_0 = m_e c^2 = (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3.0 \times 10^8 \text{ m/s})^2 \frac{1 \text{ eV}}{1.6022 \times 10^{-19} \text{ J}} = 0.511 \text{ MeV}.$$

En partikels masse angives nu ved den tilsvarende hvileenergi målt i elektronvolt, således at f.eks. elektronmassen er

$$m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2.$$

Tilsvarende har også størrelsen  $pc$  enheden energi. Impuls udtrykkes derfor i enheder af  $eV/c$ .

I moderne accelerators kan elementarpartikler tildeles energier, der ligger mange størrelsesordner over deres hvileenergier. Ved LHC-acceleratoren, ved CERN i Geneve, accelereres protoner med massen  $938 \text{ MeV}/c^2$  op til energier på  $E \simeq 7 \text{ TeV}$ . Ifølge (6.19) er da  $E \simeq pc$ , og protonernes impuls er således  $7 \text{ TeV}/c$ .

### 6.7.2 Eksempel: Observation af Higgs-bosonen ved LHC

I partikelfysikkens såkaldte standardmodel, spiller *Higgs-mekanismen* en afgørende rolle, idet det er via denne elementarpartiklerne får masse. Verifikation af Higgs-mekanismen har således været efterstræbt siden 1970'erne. Higgs-mekanismen forudsiger eksistensen af den såkaldte *Higgs-boson* (eller Higgs-partikel), hvorfor en opdagelse af denne tolkes som et afgørende bevis på standardmodellens rigtighed. Netop eftersøgningen af Higgs-bosonen har siden starten været et af hovedargumenterne bag LHC-programmet ved CERN i Geneve. I LHC-acceleratoren stødes protoner mod protoner ved meget høje energier, hvorved nye partikler kan dannes. I juli 2012 offentliggjorde LHC-eksperimenterne resultater, som viser at et ny partikel, konsistent med en Higgs-boson, var fundet. Et af de vigtigste signaler var fra henfaldet af Higgs-bosonen til et foton-par,  $H \rightarrow \gamma\gamma$ . Data fra ATLAS-eksperimentet er vist i Fig. 6.5, hvor en top ses ved en masse omkring  $126 \text{ GeV}/c^2$ . Vi vil her undersøge, hvordan denne masse er rekonstrueret.

I eksperimentet observeres som sagt to fotoner. Apparatet fastlægger de to fotoners energier,  $E_1$  og  $E_2$ , og deres bevægelsesretninger repræsenteret ved enhedsvektorene,  $\vec{n}_1$  og  $\vec{n}_2$ . Idet fotonerne er masseløse tager deres 4-impulser da i medfør af (6.21) formen

$$\mathbf{P}_1 = E_1/c(1, \vec{n}_1), \quad \text{og} \quad \mathbf{P}_2 = E_2/c(1, \vec{n}_2).$$

Den invariante masse af foton-parret fås ved at kvadrere den samlede 4-impuls, altså

$$m_{\gamma\gamma}^2 c^2 = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 = \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + 2\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = 2\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2,$$

hvor sidste skridt følger af, at fotonerne er masseløse, hvorfor  $\mathbf{P}_1^2 = \mathbf{P}_2^2 = 0$ . Videre fås ved indsættelse af 4-vektorene

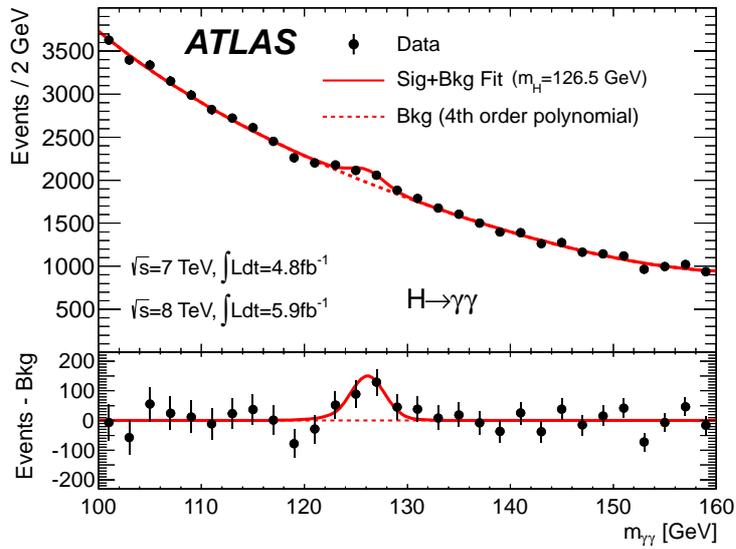
$$m_{\gamma\gamma}^2 = \frac{E_1 E_2}{c^4} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{n}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{n}_2 \end{bmatrix} = \frac{E_1 E_2}{c^4} (1 - \cos \theta),$$

hvor  $\theta$  er åbningsvinklen mellem de to foton-retninger, og dermed  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \cos \theta$ . Vi har dermed det søgte udtryk

$$m_{\gamma\gamma} = \frac{\sqrt{2E_1 E_2 (1 - \cos \theta)}}{c^2}. \quad (6.27)$$

### 6.7.3 Tærskelenergien

Et vigtigt anvendelsesområde for den relativistiske mekanik er såkaldte tærskelproblemer. Som et eksempel betragter vi produktion af anti-protoner ved sammenstødet mellem to protoner.



**Figur 6.5:** Fordelingen af invariant masse af foton-par i ATLAS-eksperimentet ved LHC observeret op til juli 2012. Den observerede top ved  $m_{\gamma\gamma} = 126$  GeV tolkes som opdagelsen af Higgs-partiklen. Den øvre del af figuren viser antal foton-par som funktion af den målte invariante masse. I den nedre del har man subtraheret den såkaldte baggrund (Bkg) fra det observerede signal.

I ethvert sammenstød mellem elementarpartikler, hvor der er tilstrækkelig energi til rådighed, kan der produceres nye partikler, som enten kan være af samme type som de kolliderende partikler eller af en anden type. I enhver partikelproduktion må ikke alene 4-impulsen være bevaret, men også den totale elektriske ladning samt en del andre såkaldte kvantetal, som kendes fra partikelfysikken.

Vi betragter nu produktion af et proton-antiproton-par gennem reaktionen

$$p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p}), \quad (6.28)$$

hvor  $\bar{p}$  angiver antiprotonen. Vi antager, at den ene proton i begyndelsestilstanden er i hvile i laboratoriet, og ønsker at vide, hvor stor en energi den anden proton mindst skal have for at processen kan foregå. Denne energi benævnes *tærskelenergien* for processen.

Ifølge 4-impulsbevarelsen gælder der

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_f \quad (6.29)$$

hvor  $\mathbf{P}_1$  og  $\mathbf{P}_2$  er 4-impulserne af henholdsvis den hvilende og den indkommende proton i begyndelsestilstanden, mens  $\mathbf{P}_f$  er den *totale* impuls af slutttilstanden. Ved at kvadrere finder vi

$$(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) \cdot (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = \mathbf{P}_f \cdot \mathbf{P}_f.$$

Her er højresiden  $\mathbf{P}_f \cdot \mathbf{P}_f = \mathbf{P}_f^2$  forbundet med sluttilstandens invariante masse gennem relationen  $\mathbf{P}_f^2 = M_f^2 c^2$ . Ved tærskelenergien – altså den mindste energi hvorved processen kan foregå – vil alle partikler i sluttilstanden have den kinetiske energi nul i tyngdepunktssystemet. De fire partikler vil altså ligge i hvile i forhold til hinanden. Systemets invariante masse vil da være  $4M$ , hvor  $M$  er protonmassen. Vi udregner nu venstresiden og finder

$$\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + 2\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = 16M^2 c^2. \quad (6.30)$$

De invariante normer  $P_1^2$  og  $P_2^2$  for de to protoner er

$$\mathbf{P}_1^2 = \mathbf{P}_2^2 = M^2 c^2,$$

som vi indsætter i (6.30), hvorefter vi finder

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = 7M^2 c^2. \quad (6.31)$$

Vi definerer nu 4-impulserne til de to protoner i begyndelsestilstanden, idet vi antager at den indkommende proton (2) har 3-impulsen  $\vec{p}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= (Mc, \vec{0}), \\ \mathbf{P}_2 &= (E/c, \vec{p}). \end{aligned}$$

Vi finder således

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = EM \quad (6.32)$$

hvoraf vi ved sammenligning med (6.31) endelig finder det søgte resultat

$$E = 7Mc^2 \quad (6.33)$$

Den totale relativistiske energi  $E$  af den indkommende proton må altså mindst være  $7Mc^2$  for at processen (6.28) kan foregå. Trækker vi protonens hvileenergi fra, fås, at den kinetiske energi af den indkommende proton mindst må være  $K = 6Mc^2 = 5.6 \text{ GeV}$ .

Det kan bemærkes, at for at producere en "ekstra hvileenergi" på  $2Mc^2$  skal man altså bruge en kinetisk energi på  $6Mc^2$  i laboratoriesystemet. Årsagen er den åbenbare, at for at tilfredsstille impulsbevarelsen, må partiklerne i sluttilstanden tildeles en kinetisk energi. Og denne energi må således også være tilstede i begyndelsestilstanden. Havde vi i stedet arrangeret det således, at to protoner mødte hinanden med lige store og modsatrettede impulser, ser vi umiddelbart at reaktionen (6.28) ville kunne foregå, hvis hver af protonerne havde den kinetiske energi  $K = Mc^2$ .

## 6.8 Bindingsenergien

I dette og det følgende afsnit betragter vi to vigtige begreber fra anvendelsen af ækvi-valensen mellem masse og energi, nemlig *bindingsenergien* og *reaktionsenergien*.

Vi betragter et isoleret system bestående af to partikler, som påvirker hinanden med konservative kræfter. Systemet iagttages fra tyngdepunktssystemet, og vi antager at

partiklernes hastigheder her er så små, at vi kan anvende den klassiske mekaniks love. Da kraftfeltet er konservativt, eksisterer der en potentialfunktion

$$U = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$

hvor  $\vec{r}_1$  og  $\vec{r}_2$  er partiklernes stedvektorer. Potentialfunktionen antages at have værdien nul, når partiklerne fjernes uendelig langt fra hinanden. Ifølge princippet om energibevarelse, er summen af systemets potentielle og totale kinetiske energi konstant, altså

$$K + U = \text{konst.}$$

I det tilfælde hvor den gensidige kraft er tiltrækkende, kan  $K + U$  være negativ, og de to partikler vil da være bundne til hinanden.

Vi tænker os nu, at vi ønsker at fjerne de to partikler uendelig langt fra hinanden på en sådan måde, at de er i hvile i sluttilstanden. Vi siger da, at partiklerne er asymptotisk frie. For at adskille de to partikler må vi udføre et arbejde for at modvirke partiklernes gensidige tiltrækningskraft. Herved tilføjer vi systemet den positive energimængde  $-(K + U)$ . Dette tilsvarende en massetilvækst, og det bundne systems masse må således være mindre end summen af de to frie partiklers masser. Vi definerer nu systemets *bindingsenergi* som forskellen i hvileenergien mellem de adskilte bestanddele og det sammensatte system:

$$E_B = [M(\text{frie}) - M(\text{bundne})] c^2. \quad (6.34)$$

### 6.8.1 Eksempel: Brintatomets bindingsenergi

Som et eksempel betragter vi brintatomet, som består af en elektron og en proton, der er bundet til hinanden af den elektromagnetiske kraft. Den potentielle energi er givet ved

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

som går asymptotisk mod nul når separationen  $r$  vokser. Bindingsenergien for et brintatom i grundtilstanden, som tilsvarende ionisationsenergien, er 13.6 eV. Brintatomets masse er altså  $13.6 \text{ eV}/c^2$  mindre end summen af masserne af en proton og en elektron.

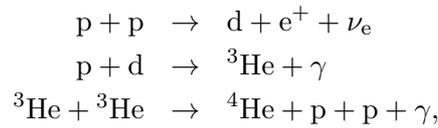
### 6.8.2 Eksempel: Deuteronens bindingsenergi

I kernefysikken møder man bindingsenergi, der er omtrent en million gange større end hvad der er tilfældet i atomfysikken. Som et eksempel betragter vi deuteronen, som er en bunden tilstand af en neutron og en proton. Bindingsenergien er her givet ved

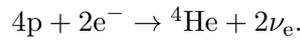
$$\begin{aligned} E_B &= [M(\text{n}) + M(\text{p}) - M(\text{d})] c^2 \\ &= [939.57 \text{ MeV}/c^2 + 938.27 \text{ MeV}/c^2 - 1875.61 \text{ MeV}/c^2] c^2 \\ &= 2.23 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

### 6.8.3 Eksempel: Solens og stjerners energiproduktion

Den vigtigste energikilde i Solen og de fleste andre stjerner er kerneprocesser, hvorved brint omdannes til helium. Omdannelsen forløber via den følgende sekvens af kernereaktioner



hvor de to første trin forløber to gange, hver gang det sidste trin forløber en gang. De to positroner som produceres i første trin, annihilere umiddelbart med to elektroner, og den totale reaktion bliver dermed



Den frigivne energi pr. dannet heliumkerne beregnes nu fra masseregnskabet

$$\left[4M(p) + 2M(e^-) - M({}^4\text{He})\right] c^2 = (4 \times 938.27 + 2 \times 0.51 - 3727.22) \text{ MeV} = 25.9 \text{ MeV}.$$

Bemærk, at der skabes to neutrinoer,  $\nu_e$ , for hver dannet heliumkerne. Neutrinoer vekselvirker kun meget svagt med stof, og næsten alle neutrinoer, der produceres i Solens centrum, undslipper Solen og stråles ud i det tomme rum. Solen er således en vigtig neutrino kilde. Omtrent 2% af Solens energiproduktion udstråles som neutrinoer. Fra Solens udstråling kan man beregne den forventede neutrino flux ved Jorden til at være  $6.6 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

## 6.9 Reaktionsenergien

Nært beslægtet med bindingsenergien er begrebet reaktionsenergi. Ikke alle sammensatte systemer har en masse, som er mindre end summen af bestanddelenes masser, og nogle fundamentale partikler henfalder således spontant til andre partikler, hvis kombinerede masse er mindre end moder-partiklens. I disse tilfælde giver forskellen i masse anledning til frigivelse af energi ved henfaldet eller reaktionen. Vi definerer *reaktionsenergien* som

$$Q = [M(\text{partikler før}) - M(\text{partikler efter})] c^2 \quad (6.35)$$

Reaktionsenergien er altså lig med bindingsenergien med modsat fortegn. Hvis  $Q$  er positiv, siger vi at reaktionen er *exoterm*; dvs. den frigiver energi. Hvis  $Q$  er negativ, er reaktionen *endoterm*; der kræves tilførsel af energi, for at den foregår.

### 6.9.1 Eksempel: Neutron-henfald

Vi betragter det spontane henfald af en fri neutron ved processen  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ . For at finde den frigivne energi ved dette henfald må vi beregne forskellen i masserne før og

efter henfaldet. Neutrinoen  $\nu_e$  vides at have en meget lille masse (længe har man endog ment, den var masseløs), som vi kan ignorere i dette regnskab. Vi finder derfor

$$\begin{aligned} Q &= [M(n) - M(p) - M(e^-)] c^2 \\ &= [939.57 \text{ MeV}/c^2 - 938.28 \text{ MeV}/c^2 - 0.511 \text{ MeV}/c^2] c^2 \\ &= 0.78 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Reaktionsenergien ved dette henfald er meget lille, og da processen går via den såkaldte svage kraft, er neutronens levetid ret stor; omtrent et kvarter. Man kunne spørge, hvorfor der overhovedet findes neutroner, da Universets alder jo er betydeligt længere end et kvarter. Det skyldes, at ovennævnte beregning kun er gyldig for frie neutroner. For neutroner, som er bundne i en atom-kerne er reaktionsenergien faktisk negativ. Altså er det energetisk fordelagtigt, at neutronerne forbliver neutroner. At dette er tilfældet, kan man kvalitativt forstå derved, at en proton i modsætning til neutronen ville blive Coulomb-frastødt af de andre protoner i kernen. Hvis protonens potentielle energi i det elektriske felt fra de andre protoner ville overskride den ovennævnte reaktionsenergi, vil processen ikke foregå.

## 6.10 Fire-kraften og tre-kraften

Den eneste påvirkning af en partikels bevægelse vi hidtil har betragtet var fra sammenstød, og vi er kommet ganske langt uden af ty til kraftbegrebet. Dette spiller imidlertid også en vigtig rolle i den relativistiske mekanik, som f.eks. ved beskrivelsen af ladede partiklers bevægelse i et elektromagnetisk felt.

Vi starter med at definere 4-kraften på en partikel med massen  $m$

$$\boxed{\Phi \equiv \frac{d}{d\tau} \mathbf{P} = \frac{d}{d\tau} (m\mathbf{U}) = m\mathbf{A},} \quad (6.36)$$

hvor vi har antaget, som vi vil gøre i det følgende, at partiklens hvileenergi og dermed dens masse ikke påvirkes af kraften gennem f.eks. deformation eller eksitation, og at derfor  $dm/d\tau = 0$ . Vi bemærker, at i fraværet af en kraft forbliver  $\mathbf{P}$  konstant. Fra komponent-formen (6.13) af  $\mathbf{P}$  finder vi nu

$$\Phi = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \gamma_u \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \gamma_u \left( \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \vec{F} \right), \quad (6.37)$$

hvor vi har indført den *relativistiske 3-kraft* defineret ved

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \gamma_u m \vec{u} \}.} \quad (6.38)$$

I den ikke-relativistiske grænse reducerer  $\vec{F}$  til den velkendte Newtonske kraft,  $\vec{F} = m d\vec{u}/dt = m\vec{a}$ . Bemærk hvordan *effekten*  $dE/dt$ , altså raten med hvilken kraften udfører

arbejde på partiklen og derved overfører energi til denne, danner partner med 3-kraften i 4-vektoren  $\Phi$ , på samme måde som energien danner partner med 3-impulsen i 4-vektoren  $\mathbf{P}$ .

Af (6.36) følger, idet  $\mathbf{U}$  og  $\mathbf{A}$  ifølge (5.29) er ortogonale, at

$$\Phi \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (6.39)$$

Tilsvarende finder vi ved anvendelse af komponent-formerne (5.22) og (6.37)

$$\Phi \cdot \mathbf{U} = \gamma_u^2 \left( \frac{dE}{dt} - \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{u}} \right). \quad (6.40)$$

Ved sammenligning af de to udtryk får vi således umiddelbart sammenhængen

$$\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \frac{dE}{dt}, \quad (6.41)$$

hvorved  $\Phi$  tager den alternative komponentform

$$\boxed{\Phi = \gamma_u \left( \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{u}}}{c}, \vec{\mathbf{F}} \right)}. \quad (6.42)$$

Af (6.41) ser vi, at der også i det relativistiske tilfælde gælder sammenhængen

$$\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = dE, \quad (6.43)$$

som siger, at kraftens arbejde er lig med tilvæksten i partiklens energi.

### 6.10.1 Transformationsregler for kraften

Med udgangspunkt i udtrykket for 4-kraften (6.42) og transformationsreglerne (5.11) for 4-vektorer kan vi finde transformationsreglerne for 3-kraften. Vi vil imidlertid her nøjes med at betragte det tilfælde, hvor vi kender kraften i partiklens øjeblikkelige hvilesystem og ønsker at finde den transformerede kraft i et andet system.

Vi lader systemet  $S'$  være partiklens øjeblikkelige hvilesystem, som antages at bevæge sig på sædvanlig måde i forhold til systemet  $S$ . Idet partiklen i  $S'$  har den øjeblikkelige hastighed  $\vec{\mathbf{u}}' = \mathbf{0}$ , er 4-kraften i dette system ifølge (6.42) givet ved

$$\Phi' = (0, F'_x, F'_y, F'_z). \quad (6.44)$$

Af Lorentz-transformationen (5.11) finder vi heraf 4-kraftens rumlige komponenter i  $S$

$$\Phi_1 = \gamma_v F'_x, \quad \Phi_2 = F'_y, \quad \Phi_3 = F'_z. \quad (6.45)$$

Imidlertid kan vi finde de samme komponenter ved at benytte definitionen (6.42), idet partiklen jo i  $S$  har hastigheden  $v$ ,

$$\Phi_1 = \gamma_v F_x, \quad \Phi_2 = \gamma_v F_y, \quad \Phi_3 = \gamma_v F_z. \quad (6.46)$$

Ved at sammenholde (6.45) og (6.46) fås nu

$$F_x = F'_x, \quad F_y = F'_y/\gamma_v, \quad F_z = F'_z/\gamma_v, \quad (6.47)$$

hvorved vi har bestemt de ønskede transformationsegenskaber. Specielt ser vi altså, at kraftkomponenten i bevægelsesretningen,  $F_x$ , er den samme i laboratoriesystemet som i partiklens øjeblikkelige hvilesystem.

## 6.11 Den relativistiske bevægelsesligning

Vi vil nu betragte det tilfælde, hvor en forskrift foreligger for, hvordan den relativistiske 3-kraft på en partikel afhænger af omgivelsernes fysiske tilstand. Ligningen (6.38) får hermed et fysisk indhold og udgør da den *relativistiske bevægelsesligning*.

Af (6.38) finder vi ved at gennemføre differentiationen

$$\vec{F} = \gamma_u m \frac{d\vec{u}}{dt} + m\vec{u} \frac{d\gamma_u}{dt} = \gamma_u m \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c^2} \vec{u}, \quad (6.48)$$

hvor vi i sidste lighed har benyttet (6.41) med  $E = \gamma_u mc^2$ . Vi ser heraf, at accelerationen  $\vec{a} = d\vec{u}/dt$  vil ligge i planet udspændt af  $\vec{F}$  og  $\vec{u}$ , men at den i almindelighed ikke vil være ensrettet med  $\vec{F}$ . Hvis vi undtager det tilfælde hvor  $\vec{u} = 0$ , vil  $\vec{F}$  og  $\vec{a}$  kun være ensrettede, når det sidste led i (6.48) er proportional med  $\vec{F}$ , og dette sker kun når  $\vec{F}$  og  $\vec{u}$  er enten ortogonale eller parallelle. Vi vil nu betragte eksempler på disse to tilfælde.

### 6.11.1 Cyklotronbevægelsen

Som et eksempel, der har særlig interesse i relativistiske problemer, kan vi betragte elektromagnetiske kræfter. Kraften på en partikel med ladning  $q$ , der bevæger sig i et elektrisk felt  $\vec{E}$  og et magnetfelt  $\vec{B}$  – den såkaldte Lorentz-kraft – er givet ved det velkendte udtryk

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}), \quad (6.49)$$

som har vist sig også at have gyldighed i den relativistiske beskrivelse.

For en ladet partikel i et konstant magnetfelt,  $\vec{B}$ , reducerer Lorentz-kraften til

$$\vec{F} = q(\vec{u} \times \vec{B}) \quad (6.50)$$

Kraften er da stedse vinkelret på hastigheden, hvorfor sidste led i (6.48) forsvinder, og bevægelsesligningen reducerer til

$$\gamma_u m \frac{d\vec{u}}{dt} = q(\vec{u} \times \vec{B}). \quad (6.51)$$

Accelerationen er altså vinkelret på hastigheden, hvorfor partiklen i det konstante magnetfelt vil foretage en jævn cirkelbevægelse i planet vinkelret på feltet. Man viser let, at radius i cirkelbevægelsen, den såkaldte *cyklotronradius*, vil være

$$r_c = \frac{\gamma_u m u}{qB} = \frac{p}{qB}, \quad (6.52)$$

hvor  $u = |\vec{u}|$  og  $B = |\vec{B}|$ . Cyklotronradius er altså proportional med impulsen, og måling af en ladet partikels afbøjning i et kendt magnetfelt kan således benyttes til at bestemme partiklens impuls.

### Eksempel 6.1 Cyklotronen

I en cyklotron accelereres ladede partikler op til relativistiske hastigheder i et cirkulært strålerør. Bevægelsen har altså fast radius. Man må således ifølge (6.52) forøge magnetfeltet i takt med impulsen for at holde partiklerne på deres bane.

### 6.11.2 Hyperbolsk bevægelse

For en ladet partikel i et konstant elektrisk felt reducerer Lorentz-kraften til

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (6.53)$$

Lad os betragte det tilfælde, hvor partiklen starter sin bevægelse fra hvile. Den vil da være påvirket af en kraft, der til stadighed er ensrettet med hastigheden, og kraften vil dermed ifølge (6.47) have samme styrke,  $F$ , også i partiklens øjeblikkelige hvilesystem. Partiklen vil altså have den konstante egen-acceleration  $g = F/m$ .

Lad os arrangere inertialsystemet  $S$  således, at partiklen heri starter sin bevægelse i  $x = 0$  til tiden  $t = 0$ , og at kraften er rettet efter  $x$ -aksen. Vi søger nu partiklens relativistiske bevægelsesligning, som erstatning for det klassiske, paraboliske udtryk  $x = \frac{1}{2}gt^2$ .

Vi har allerede i Afsnit 2.11.2 set hvordan en konstant egen-acceleration er sammenknyttet med en hyperbolsk bevægelse, og med resultatet fra Opgave 2.6 kunne vi via diverse omskrivninger komme frem til en løsning på det aktuelle problem. Her vil vi imidlertid gennemføre udregningerne direkte.

Sammenhængen mellem partiklens konstante egen-acceleration,  $g$ , og accelerationen,  $du/dt$ , i  $S$  er ifølge (5.32) givet ved

$$g = \gamma_u^3 \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}[u\gamma_u], \quad (6.54)$$

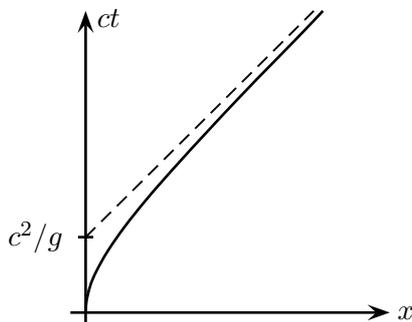
hvor vi for sidste ligning har benyttet identiteten  $d(\gamma_u u) = \gamma_u^3 du$ , som let eftervises. Ved integration med hensyn til  $t$  fås heraf

$$gt = u\gamma_u = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (6.55)$$

hvor vi har benyttet, at  $u = 0$  til tiden  $t = 0$ . Ved isolering af  $u$  fås da

$$u = \frac{gt}{\sqrt{1 + (gt/c)^2}}. \quad (6.56)$$

Vi ser, at for små tider,  $t \ll c/g$ , er  $u \simeq gt$ , som forventet i det ikke-relativistiske tilfælde. Videre ser vi, som ventet, at  $u \rightarrow c$  for store tider,  $t \gg c/g$ .



**Figur 6.6:** En partikel, der udsættes for en konstant kraft, har konstant egenacceleration og udfører en hyperbolsk bevægelse.

Ved at integrere endnu engang med hensyn til  $t$  finder vi dernæst den tilbagelagte vejlængden

$$x = \frac{c^2}{g} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2} - 1 \right], \quad (6.57)$$

hvor vi har benyttet grænsebetingelsen  $x = 0$  for  $t = 0$ . Korrektheden af dette udtryk eftervises enklest ved differentiation. For små tider,  $t \ll c/g$ , genfinder vi ved rækkeudvikling det klassiske udtryk  $x = \frac{1}{2}gt^2$ . Udtrykket (6.57) kan skrives på formen

$$\left(\frac{xg}{c^2} + 1\right)^2 - \left(\frac{gt}{c}\right)^2 = 1, \quad (6.58)$$

eller tilsvarende

$$(x + c^2/g)^2 - (ct)^2 = (c^2/g)^2, \quad (6.59)$$

og bevægelsen ses således at danne en hyperbel i rumtidsdiagrammet med en asymptote, givet ved lyskeglen  $x = ct - c^2/g$ , som skitseret på Figur 6.6. Bemærk, at et lyssignal, der udsendes til tiden  $t = c/g$  fra  $x = 0$  vil følge asymptoten og dermed aldrig nå partiklen. Asymptoten kaldes det accelererede systems *begivenheds-horisont*, idet en iagttager i det accelererede system ikke vil kunne modtage information om begivenheder, der sker i  $x = 0$  til tider  $t \geq c/g$ .

Vi kan finde et udtryk for  $\gamma$ -funktionen ved at dividere (6.55) med (6.56), altså

$$\gamma_u = \sqrt{1 + (gt/c)^2} = 1 + gx/c^2, \quad (6.60)$$

hvor den sidste omskrivning følger af (6.57). Partiklens energi

$$E = \gamma_u mc^2 = mc^2 + mgx \quad (6.61)$$

vokser dermed lineært med den tilbagelagte vejlængde akkurat som i det klassiske tilfælde. Dette er selvfølgelig konsistent med (6.43).

Vi kan nu benytte (3.4) til at finde egentiden i det bevægede system, altså tiden man ville aflæse på et *ideelt* ur, der følger med partiklen. Vi finder

$$\tau = \int_0^t \frac{d\theta}{\gamma_u} = \int_0^t \frac{d\theta}{\sqrt{1 + (g\theta/c)^2}},$$

som kan vises at medføre, at

$$\tau = \frac{c}{g} \ln \left[ \frac{gt}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2} \right]. \quad (6.62)$$

Egentiden vokser altså logaritmisk for  $t \rightarrow \infty$ .

### 6.11.3 Eksempel: Muon-acceleratoren

Det har været foreslået at konstruere en accelerator, hvor en stråle af positive muoner ( $\mu^+$ ) bringes til at kolliderer med en stråle af negative muoner ( $\mu^-$ ), på tilsvarende vis som i Afsnit 6.7.1, hvor vi betragtede sammenstød mellem elektroner og positroner. Man støder imidlertid her ind i det problem, at muoner har en levetid på kun  $\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6}$  s. Lad os antage, at man ønsker at accelerere muonerne op til en energi på 200 GeV. Idet muon-massen er  $m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$ , vil de her have en  $\gamma$ -faktor på  $\sim 1900$ , og muonernes laboratorie-levetid er da  $4.2 \times 10^{-3}$  s, hvilket anses som tilstrækkelig til at bringe dem til kollision. Imidlertid kan man frygte, at man ikke kan accelerere muonerne op tilstrækkelig hurtigt, således at en stor del af dem vil henfalde, før de når den tiltænkte energi. Vi vil nu betragte accelerationsprocessen, som foregår ved hjælp af en kraftig elektromagnetisk bølge. Bølgen arrangeres således at muonerne til stadighed befinder sig på bølgefronten, hvor de vil opleve et tilnærmelsesvis homogent elektrisk felt.

Lad os betragte en muon i et homogent elektrisk felt med styrken  $E = 20 \text{ MV/m}$ . Muonen antages at starte fra hvile, og da den skal opnå en energi på 200 GeV, må accelerationen foregå over en strækning med længden  $x = 10 \text{ km}$ . Muonens egen-acceleration er

$$g = \frac{Eq}{m_\mu} = \frac{(20 \text{ MV/m})(1e)}{106 \text{ MeV}/c^2} = \frac{20 \text{ MeV/m}}{106 \text{ MeV}} (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 1.7 \times 10^{16} \text{ m/s}^2.$$

Vi har her benyttet definitionen på energienheden elektronvolt, og i denne forbindelse, at muonen har samme ladning  $e$  som elektronen. Af (6.58) kan vi nu ved indsættelse bestemme værdien af den dimensionsløse størrelse,

$$\frac{gt}{c} = 187.$$

Heraf følger umiddelbart, at tiden for accelerationsprocessen i laboratoriesystemet er

$$t = (c/g) 187 = 3.3 \times 10^{-6} \text{ s}.$$

Ved anvendelse af (6.62) finder vi nu egentiden for processen, altså

$$\tau = (c/g) \ln[187 + 187] = 1.0 \times 10^{-7} \text{ s.}$$

Vi ser, at egentiden tilsvare 4.6% af muonens levetid, og muonstrålens intensitet vil da aftage med kun 4.5% ved accelerationsprocessen.

## Opsummering af Kapitel 6

- i) Den relativistiske mekaniks love er baseret på følgende forudsætninger: (i) de har samme form i ethvert inertialsystem (*Lorentz-invarians*), og (ii) for ikke-relativistiske hastigheder er de konforme med Newtons love.
- ii) Yderligere er den relativistiske mekanik baseret på antagelse om bevarelse af 4-impulsen i ethvert isoleret system.
- iii) En partikels 4-impuls er givet ved

$$\mathbf{P} = (E/c, \vec{p}), \quad (6.13)$$

hvor  $E$  og  $\vec{p}$  er henholdsvis totalenergien og den relativistiske impuls

$$E = \gamma_u mc^2, \quad \vec{p} = \gamma_u m \vec{u}. \quad (6.10, 6.4)$$

- iv) Antagelse om 4-impuls-bevarelse er således ækvivalent med antagelse om energi- og impulsbevarelse. Denne antagelse er eksperimentelt meget velfunderet.
- v) For en partikel i hvile reducerer udtrykket for totalenergien til Einsteins berømte ligning

$$E_0 \equiv mc^2, \quad (6.9)$$

som udtrykker ækvivalensen mellem energi og masse.

- vi) Der gælder en hyperbolsk sammenhæng mellem en partikels energi, impuls og masse

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (6.18)$$

- vii) Også masseløse partikler finder beskrivelse i den relativistiske mekanik. For disse findes impulsen af den med  $m = 0$  reducerede form af det ovennævnte udtryk

$$p = E/c. \quad (6.20)$$

- viii) For et partikelsystem defineres *de invariante masse*,  $M$ , ved

$$Mc = \sqrt{E^2/c^2 - p^2}, \quad (6.25)$$

hvor, med  $p = |\vec{p}|$ ,  $E = \sum_i E_i$  og  $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$  er henholdsvis den totale energi og den totale impuls af partikelsystemet. Grundet bevarelsen af energi og impuls er også den invariante masse bevaret i ethvert isoleret system.

- ix) Transformationsreglerne for energi og impuls mellem inertialsystemer er givet ved Lorentz-transformationen

$$\begin{aligned} E'/c &= \gamma_v (E/c - \beta p_x), \\ p'_x &= \gamma_v (p_x - \beta E/c), \\ p'_y &= p_y, \\ p'_z &= p_z. \end{aligned} \quad (6.15)$$

## Gennemregnede eksempler til Kapitel 6

6.1 En ladet pion ( $m_\pi = 139.6 \text{ MeV}/c^2$ ), som ligger i hvile, henfalder til en muon ( $m_\mu = 105.7 \text{ MeV}/c^2$ ) og en neutrino ( $m_\nu = 0$ ). Bestem impulsen og den kinetiske energi af muonen og neutrinoen.

Vi betragter processen

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu.$$

Ifølge impulsbevarelse har muonen og neutrinoen modsatrettede impulser med samme størrelse  $p$ . Af energibevarelse følger da, idet neutrinoen regnes masseløs,

$$m_\pi c^2 = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + p^2 c^2} + pc.$$

Heraf fås

$$p = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c. \quad (6.63)$$

Ved indsættelse af talværdier finder vi således impulserne

$$p_\mu = p_\nu = p \simeq 29.8 \text{ MeV}/c.$$

De tilsvarende energier er dermed

$$E_\nu = p_\nu c \simeq 29.8 \text{ MeV} \quad \text{og} \quad E_\mu = m_\pi c^2 - E_\nu \simeq 109.8 \text{ MeV}/c^2.$$

Vi søger de kinetiske energier og fratrækker derfor hvileenergiene (som for den masseløse neutrino er nul) og finder

$$K_\nu = 29.8 \text{ MeV}, \quad \text{og} \quad K_\mu = 4.1 \text{ MeV}.$$

### Alternativ løsning baseret på relativistisk invariante

Der gælder 4-impulsbevarelse, altså

$$\mathbf{P}_\pi = \mathbf{P}_\mu + \mathbf{P}_\nu.$$

Muon-energien fås ved at skrive 4-impulsbevarelsen på formen

$$\mathbf{P}_\nu = \mathbf{P}_\pi - \mathbf{P}_\mu,$$

som ved kvadrering giver

$$0 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu,$$

og dermed

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2. \quad (6.64)$$

På tilsvarende måde fås neutrino-energien ved at skrive 4-impulsbevarelsen på formen

$$\mathbf{P}_\mu = \mathbf{P}_\pi - \mathbf{P}_\nu,$$

som ved kvadrering giver

$$m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi c p_\nu,$$

og dermed

$$E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2. \quad (6.65)$$

**6.2** En partikel med massen  $M$  henfalder til to partikler med masser  $m_1$  og  $m_2$ . Bestem de to partiklers impuls og energi i  $M$ 's hvilesystem.

De to henfaldsprodukter har modsatrettede impulser med samme størrelse,  $p$ , som vi starter ud med at finde.

Vi benytter 4-impulsbevarelse

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2,$$

hvor  $\mathbf{P}_1$  flyttes over på venstresiden før der kvadreres:

$$\mathbf{P}^2 + \mathbf{P}_1^2 - 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2^2.$$

Vi indfører kvadraterne  $\mathbf{P}^2 = M^2 c^2$ ,  $\mathbf{P}_1^2 = m_1^2 c^2$  og  $\mathbf{P}_2^2 = m_2^2 c^2$  og udnytter, at  $M$  er i hvile. Altså er  $\mathbf{P} = (Mc, \mathbf{0})$  og dermed

$$M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - 2ME_1 = m_2^2 c^2,$$

eller tilsvarende

$$E_1 = \frac{c^2}{2M} (M^2 + m_1^2 - m_2^2).$$

Denne kvadreres, og sammenhængen  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$  indføres for  $E_1$ :

$$p^2 = \frac{c^2}{4M^2} (M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 c^2.$$

Hermed har vi sådan set fundet det søgte udtryk. Imidlertid vil vi gerne have udtrykket på en form, som er manifest symmetrisk i  $m_1$  og  $m_2$ , som vi må kræve (hvorfor?). Dette opnås efter en del "gymnastik", hvor vi starter med at kvadrere på højresiden og flytte sidste led ind i parentes

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{c^2}{4M^2} (M^4 + m_1^4 + m_2^4 + 2M^2 m_1^2 - 2M^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2 - 4M^2 m_1^2) \\ &= \frac{c^2}{4M^2} (M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2M^2 m_1^2 - 2M^2 m_2^2 + 2m_1^2 m_2^2 - 4m_1^2 m_2^2) \\ &= \frac{c^2}{4M^2} ((M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2) \end{aligned} \quad (6.66)$$

Vi har hermed fundet der søgte udtryk.

Vi kan nu finde energierne ved endnu engang at benytte sammenhængen  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ . Igen kræver det lidt gymnastik at komme frem til resultaterne

$$E_1 = \frac{c^2}{2M} (M^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad \text{og} \quad E_2 = \frac{c^2}{2M} (M^2 + m_2^2 - m_1^2). \quad (6.67)$$

Det ses, at udtrykket for  $E_2$  fås ved i udtrykket for  $E_1$  at bytte om på partikel 1 og 2.

*Bemærk, at den forrige opgave er et specialtilfælde af denne.*

**6.3** Vi betragter et sammenstød mellem to protoner. Protoner er sammensatte partikler, som består af kvarker og gluoner. Proton-proton-sammenstød er altså i virkeligheden sammenstød mellem de to protoners bestanddele. Vi vil her antage en proces, hvor to gluoner støder sammen og danner en Higgs-boson. Higgs-bosonen spiller en afgørende rolle i den subatomare teori, og havde således været efterstræbt i lang tid, før et signal endelig observeredes i 2012 ved CERNs LHC-accelerator. LHC er en proton-proton-accelerator med en massecenterenergi på op til 14 TeV. Higgs-bosonen produceres fortrinsvist ved den ovennævnte proces. Det observerede signal tilsvarende en masse på  $126 \text{ GeV}/c^2$ , og vi vil derfor antage denne værdi for Higgs-massen,  $M_H$ . Det er en god approksimation, at protonens bestanddele bevæger sig parallelt med protonen. Vi betragter altså et sammenstød mellem to præcist modsatrettede gluoner. Gluoner er masseløse. Antag at den ene gluon har energien 140 GeV. Bestem energien af den anden gluon. Bestem dernæst størrelserne  $\gamma$ ,  $\gamma\beta$  og  $\beta$ , der angiver Higgs-bosonens hastighed.

Idet de to gluoner er masseløse og modsatrettede, kan deres 4-impulser skrives på formen

$$\mathbf{P}_1 = (E_1/c, E_1/c, 0, 0), \quad \text{og} \quad \mathbf{P}_2 = (E_2/c, -E_2/c, 0, 0).$$

Systemets invariante masse – altså Higgs-massen – fås ved at kvadrere den totale 4-impuls, altså

$$M_H^2 c^2 = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 = (E_1/c + E_2/c)^2 - (E_1/c - E_2/c)^2 = 4E_1 E_2 / c^2.$$

Heraf fås umiddelbart resultatet

$$E_2 = M_H^2 c^4 / 4E_1 \simeq 28.4 \text{ GeV}.$$

Higgs-bosonens energi og impuls er dermed

$$E_H = 168 \text{ GeV} \quad \text{og} \quad p_H = 112 \text{ GeV}/c.$$

Ved udnyttelse af definitionerne af impuls,  $p = \gamma mu = \gamma m\beta c$ , og totalenergi,  $E = \gamma mc^2$ , fås

$$\gamma = \frac{E_H}{M_H c^2}, \quad \beta\gamma = \frac{p_H}{M_H c}, \quad \text{og} \quad \beta = \frac{p_H c}{E_H},$$

som ved indsættelse giver

$$\gamma = 1.336, \quad \gamma\beta = 0.886, \quad \text{og} \quad \beta = 0.663.$$

- 6.4** I forlængelse af forrige opgave tænker vi os, at en Higgs-boson med massen  $M_H = 126 \text{ GeV}/c^2$  bevæger sig i laboratoriet med impulsen  $112 \text{ GeV}/c$ . Higgs-bosonen henfalder til et par af  $b$ -kvarker,

$$H \rightarrow b + \bar{b},$$

hvor  $b$  er en kvark, og  $\bar{b}$  en anti-kvark. De to  $b$ -kvarker har identiske masser,  $M_b = 4.2 \text{ GeV}/c^2$ . Antag, at  $b$ -kvarken udsendes i en retning, der i Higgs-bosonens hvilesystem danner vinklen  $\theta' = 75^\circ$  med Higgs-bosonens bevægelsesretning. Bestem energi og impuls (størrelse og retning) af  $b$ -kvarken i laboratoriesystemet.

Med en passende orientering af koordinataksene er  $b$ -kvarkens 4-impuls i Higgs-systemet

$$\mathbf{P}'_b = \begin{bmatrix} E'_b/c \\ p'_{b,x} \\ p'_{b,y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E'_b/c \\ p'_b \cos \theta' \\ p'_b \sin \theta' \\ 0 \end{bmatrix},$$

hvor  $E'_b = \frac{1}{2}M_H c^2 = 63 \text{ GeV}$ , og  $p'_b = [E'^2_b/c^2 - M_b^2 c^2]^{1/2} = 62.9 \text{ GeV}/c$ . Den tilsvarende 4-impuls i laboratoriesystemet fås ved anvendelse af den inverse af Lorentz-transformationen (5.11), altså

$$\mathbf{P}_b \equiv \begin{bmatrix} E_b/c \\ p_{b,x} \\ p_{b,y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(E'_b/c + \beta p'_{b,x}) \\ \gamma(p'_{b,x} + \beta E'_b/c) \\ p'_{b,y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma E'_b/c + \gamma\beta p'_b \cos \theta' \\ \gamma p'_b \cos \theta' + \gamma\beta E'_b/c \\ p'_b \sin \theta' \\ 0 \end{bmatrix},$$

Ved indsættelse for energi og impuls og for størrelserne  $\gamma$  og  $\gamma\beta$  fra forrige opgave fås

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} 84.1 + 55.7 \cdot \cos \theta' \\ 84.0 + 65.8 \cdot \cos \theta' \\ 62.9 \cdot \sin \theta' \\ 0 \end{bmatrix} \text{ GeV}/c = \begin{bmatrix} 98.6 \\ 77.6 \\ 60.7 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ GeV}/c,$$

hvor vi yderligere for sidste lighed har indsat for  $\theta'$ . Dermed er  $b$ -kvarkens energi og impuls

$$E_b = 98.6 \text{ GeV}, \quad \text{og} \quad p_b = \sqrt{p_{b,x}^2 + p_{b,y}^2} = 98.5 \text{ GeV}/c.$$

Retningen af  $b$ -kvarken i forhold til Higgs-retningen er givet ved

$$\tan \theta = \frac{p_{b,y}}{p_{b,x}} = 0.782, \quad \text{og dermed} \quad \theta = 38.0^\circ.$$

## Opgaver til Kapitel 6

- 6.1** Hvor hurtigt skal en partikel bevæge sig, for at dens kinetiske energi er lig dens hvileenergi?
- 6.2** Hvor hurtigt skal en 1 kg tung kanonkugle bevæge sig, for at have samme kinetiske energi som en proton ( $m_p = 1.673 \times 10^{-27}$  kg = 938 MeV/ $c^2$ ) fra den kosmiske stråling, som bevæger sig med en  $\gamma$ -faktor på  $10^{11}$ .
- 6.3** Et legeme med massen 3 kg og bevæger sig 8 m langs  $x$ -aksen i den tid, det tager lyset at bevæge sig 10 m. Beregn legemets energi, impuls, og kinetiske energi. Udtryk gerne resultaterne i kg, idet vi f.eks. siger at hvileenergien er  $E_0/c^2 = 3$  kg. Hvilken kinetisk energi ville Newton have forudsagt for dette legeme?
- 6.4** I hvert af de følgende tilfælde, opskriv 4-impulsen  $\mathbf{P} = (E/c, p_x, p_y, p_z)$  i det givne koordinatsystem. Alle partikler har massen  $m$ .
- En partikel bevæger sig i laboratoriet i den positive  $x$ -aksens retning med en kinetisk energi, der er lig med tre gange dens hvileenergi.
  - Den samme partikel observeres fra en raket, fra hvilken dens kinetiske energi er lig dens hvileenergi. Raketten bevæger sig langs den positive  $x$ -akse langsommere end partiklen.
  - En anden partikel bevæger sig i  $y$ -aksens retning i laboratoriet med en impuls, der er to gange dens hvileenergi divideret med  $c$ .
  - En tredje partikel bevæger sig i den negative  $x$ -retning i laboratoriet med totalenergi lig med fire gange dens hvileenergi.
  - En sidste partikel bevæger sig med lige store impulskomponenter i  $x$ -,  $y$ - og  $z$ -retningen i laboratoriet og med en kinetisk energi, der er lig med fire gange hvileenergien.
- 6.5** Et atom, som i grundtilstanden har massen  $m$ , er anslået til et energiniveau, der ligger  $\Delta E$  over grundtilstanden. Det anslåede atom, som er i hvile i laboratoriet, henfalder til grundtilstanden under udsendelse af en foton. Find fotonens energi, idet atomets rekyl tages med i betragtning.
- Bemærk: I atomfysikken er eksitationsenergi af størrelsesordenen eV og dermed langt mindre end hvileenergi af de involverede atomer, som regnes i GeV. I opgaven er altså  $\Delta E \ll mc^2$ .
- 6.6** En partikel med massen  $m$ , som bevæger sig med hastigheden  $v/c = 4/5$ , støder uelastisk sammen med en tilsvarende partikel i hvile. Bestem hastigheden og massen af den sammensatte partikel.
- 6.7** En proton ( $m_p = 938$  MeV/ $c^2$ ) accelereres fra hvile over et spændingsfald på  $U = 500$  MV (1 MV =  $10^6$  V).

- a) Hvad er protonens energi efterfølgende? Hvad er dens hastighed?
- b) En elektron ( $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ ) vil accelereres i modsat retning over det samme spændingsfald (hvorfor?). Hvad er elektronens energi? Hvad er dens hastighed?

**6.8** Kulstofkernen  $^{12}\text{C}$  består af 6 protoner (p) og 6 neutroner (n), der holdes sammen af den stærke kernekraft. Masserne er

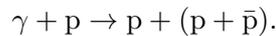
$^{12}\text{C}$	12.000000 amu
p	1.007825 amu
n	1.008665 amu

Hvor megen energi (kaldet *kernens bindingsenergi*) kræves for at separere  $^{12}\text{C}$  i dens bestanddele af protoner og neutroner. (De opgivne masser er i virkeligheden masserne af de neutrale atomer, men elektronerne har en meget lille bindingsenergi, og der er lige mange af dem før og efter. Fejlen, vi begår ved at regne med atommasser i stedet for kernemasser, er derfor negligibel.)

$$1 \text{ amu} = 931.5 \text{ MeV}/c^2.$$

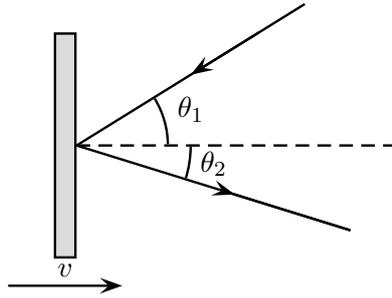
- 6.9** Vor galaksen, Mælkevejen, er  $10^5$  lysår bred. De mest energirige partikler, vi har registreret i den kosmiske stråling, har en energi på  $10^{20}$  eV. Hvor lang tid tager det for en proton ( $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ ) med denne energi at rejse tværs gennem Mælkevejen *i*) set fra galaksens hvilesystem og *ii*) set fra protonens hvilesystem?
- 6.10** En  $\pi^0$ -meson med massen  $m = 135 \text{ MeV}/c^2$  bevæger sig langs laboratoriesystemets  $x$ -akse og har en kinetisk energi på 1000 MeV.  $\pi^0$ -mesonen er ustabil og henfalder til to  $\gamma$ -kvanter (fotoner). Henfaldet foregår således, at den ene foton bevæger sig langs den positive  $y'$ -aksen i  $\pi^0$ -mesonens hvilesystem.
- a) Find størrelsen af  $\pi^0$ -mesonens hastighed og impuls i laboratoriesystemet.
- b) Find den anden fotonens retning i  $\pi^0$ -systemet.
- c) Find vinklen mellem de to  $\gamma$ -kvanter bevægelsesretninger i laboratoriesystemet.

**6.11** Et proton-antiproton-par kan produceres ved sammenstød mellem en foton og en hvilende proton



Bestem fotonens minimum-energi udtrykt ved protonens hvileenergi,  $mc^2$ , for at processen kan foregå. Sammenlign resultatet med tærskelenergien i proton-proton-sammenstød.

**6.12** Et spejl bevæger sig i laboratoriesystemet med hastigheden  $v$  rettet efter spejlets normal. I spejlets hvilesystem gælder den sædvanlige spejlningslov (indfaldsvinkel er lig udfaldsvinkel).



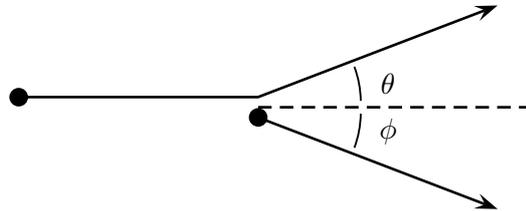
Spejlet rammes af en lysstråle, der i laboratoriesystemet danner vinklen  $\theta_1$  med normalen. Bestem vinklen  $\theta_2$  mellem den reflekterede lysstråle og normalen.

- 6.13** En strøm af protoner, der hver har den kinetiske energi 900 MeV, falder vinkelret ind på en blok, hvori protonerne bremser helt. Blokken rammes hvert sekund af  $5 \times 10^{13}$  protoner. Beregn kraften hvormed protonstrømmen påvirker blokken.

Dernæst erstattet blokken med et så tyndt folie, at det gennemsnitlige tab i protonernes kinetiske energi er 10 MeV. Beregn kraften hvormed protonstrømmen påvirker foliet.

**6.14 Proton/proton spredning (eller “relativistisk billard”)**

En proton med kinetisk energi  $K$  støder elastisk med en hvilende proton. Efter stødet er laboratoriespredningsvinklen,  $\theta$ , numerisk lig med den rekylende protons spredningsvinkel,  $\phi$ .



- a) Bestem åbningsvinklen mellem de to protoner, altså summen af  $\phi$  og  $\theta$ . Eksempel:  $K = 1$  GeV; protonmassen er  $m = 938$  MeV/ $c^2$ .
- b) Undersøg den ikke-relativistiske grænse,  $K \ll mc^2$ , og vis, at åbningsvinklen bliver  $90^\circ$  i overensstemmelse med det kendte(?) klassiske resultat.
- 6.15** Vis, at en foton ikke spontant kan henfalde til et elektron-positron-par. [Hint: benyt 4-impuls-bevarelse eller den deraf følgende bevarelse af invariant masse.]
- I det elektriske felt fra en kerne kan processen imidlertid forløbe. Beregn tærskelenergien for denne proces,  $\gamma + N \rightarrow e^+ + e^- + N$ , i kernens hvilesystem. Kernens masse betegnes  $M$ , mens elektronens (og positronens) masse betegnes  $m$ .
- 6.16** En masseløs partikel med energien  $E$  rammer en hvilende partikel med massen  $M$ . Efter stødet består systemet af to partikler med masser  $M$  og  $m$ . Vis, at tærskelenergien for processen er  $E_{\min} = mc^2(1 + m/2M)$ .

### 6.17 Ultra High Energy Cosmic Rays

Jordens atmosfære bombarderes af kosmisk stråling, som hovedsagelig består af protoner. Disse protoner dækker et bredt energispektrum, som fra målinger synes at strække sig op over  $10^{20}$  eV. Disse såkaldte UHECR (*ultra high energy cosmic rays*) udgør et teoretisk problem, idet man ikke kan forklare, hvordan de kan udbrede sig over lange afstande gennem rummet. Problemet er, at protonerne forventes at vekselvirke med den såkaldte kosmiske baggrundsstråling, som består af mikrobølger med en temperatur på 2.7 K.

Beregn protonens tærskelenergi for reaktionen  $p+\gamma \rightarrow p+\pi^0$ , idet  $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}/c^2$  og baggrundsstrålingens temperatur tilsvarende en fotonenergi på  $E_\gamma = 233 \text{ } \mu\text{eV}$ .

### 6.18 Colliding Beam Experiments

En del accelerators, som anvendes i partikelfysikken, er indrettet således, at partiklerne bevæger sig i modsat retning i cirkulære baner og bringes til at kollider centralt i fastlagte punkter i acceleratoren. I acceleratoren har alle partikler den samme totalenergi,  $E$ , som typisk er langt større end de accelererede partiklers hvileenergi, altså  $E \gg mc^2$ . Betragt kollisionen som et totalt uelastisk stød, hvor den frigivne energi bruges til at skabe nye partikler.

- Vis, at den totale energi, som er til rådighed for dette, er  $W = 2E$ .
- Hvor stor er  $W$ , hvis kollisionen finder sted mellem to protoner med  $E = 1 \text{ TeV}$ ?
- Hvilken energi skal protonerne have, hvis vi ønsker  $W = 14 \text{ TeV}$ ?

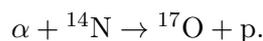
Sammenlign resultaterne med det du finder i næste opgave, hvor en mindre energi-effektiv eksperimentel situation er beskrevet.

### 6.19 Fixed Target Experiments

En proton accelereres til totalenergien  $E$  og bringes til at kollider med en anden proton i hvile. Det antages, at protonens totalenergi langt overstiger dens hvileenergi, altså  $E \gg mc^2 = 938 \text{ MeV}$ . Betragt kollisionen som et totalt uelastisk stød, hvor den frigivne energi bruges til at skabe nye partikler.

- Vis, at den totale energi, som er til rådighed for dette, er  $W = \sqrt{2mE}$ .
- Hvor stor er  $W$ , hvis protonen har energien  $E = 1 \text{ TeV}$ ?
- Hvilken energi skal protonen have, hvis vi ønsker  $W = 14 \text{ TeV}$ ?

**6.20** En  $\alpha$ -partikel med kinetisk energi 7.20 MeV rammer en hvilende  $^{14}\text{N}$ -kerne, hvorved der dannes en  $^{17}\text{O}$ -kerne og en proton



Protonen, som har en kinetisk energi på 5.3 MeV, udsendes i en vinkel på  $90^\circ$  i forhold til den indkommende  $\alpha$ -partikel. Masserne af de involverede partikler

er:  $\alpha$ -partiklen,  $3730.4 \text{ MeV}/c^2$ ;  $^{14}\text{N}$ ,  $13051 \text{ MeV}/c^2$ ; proton,  $938.3 \text{ MeV}/c^2$ ;  $^{17}\text{O}$ ,  $15843 \text{ MeV}/c^2$ .

- Find  $^{17}\text{O}$ -kernens kinetiske energi;
- Hvilken retning har  $^{17}\text{O}$ -kernen i forhold til den indkommende  $\alpha$ -partikel;

### 6.21 Foton-raketten

En foton-raket benytter elektromagnetisk stråling som drivkraft. Raketten er i hvile i begyndelsestilstanden, hvor den har massen  $M_I$ . Den udsender nu fotoner i én retning, hvorved den selv opnår hastigheden  $U$  i den modsatte retning. Dens masse er da  $M_F$ . Opskriv 4-impulsen af raketten og de udsendte fotoner i begyndelses- og slut-tilstanden, og udled sammenhængen

$$\frac{M_F}{M_I} = \sqrt{\frac{c - U}{c + U}}.$$

### 6.22 Den relativistiske raket

En raket accelererer fra hvile langs en ret linje og opnår derved hastigheden  $u$ . Accelerationen foregår ved, at en gas udsendes med den konstante hastighed  $V_G$  i forhold til raketten. Det antages, at der ingen ydre kræfter virker på raketten.

- Vis, ved at benytte impulsbevarelse, energibevarelse og udtrykket for sammensætning af parallelle hastigheder, at sammenhængen mellem raketens øjeblikkelige masse,  $m$ , og hastighed,  $u$ , er bestemt ved differentiaalligningen

$$m \frac{du}{dm} + V_G \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = 0.$$

- Vis, at forholdet mellem raketens masse i sluttilstanden,  $M_F$ , og i begyndelsestilstanden,  $M_I$ , er givet ved sammenhængen

$$\frac{M_F}{M_I} = \left( \frac{c - U}{c + U} \right)^{c/2V_G},$$

hvor  $U$  er raketens hastighed i sluttilstanden. Bemærk, at dette reducerer til udtrykket for foton-raketten (forrige opgave), når vi sætter  $V_G = c$ .

- Vis, at for  $c \rightarrow \infty$  går dette udtryk over i det klassiske resultat

$$\frac{M_F}{M_I} = e^{-U/V_G}.$$

**6.23** Et rumskib rejser til Mælkevejens centrum, som befinder sig i afstanden 25000 lysår fra Jorden. Rumskibet rejser retlinjet med en konstant egenacceleration på  $1 g$  ( $9.81 \text{ m/s}^2$ ).

- Hvor lang tid tager rejsen set fra Jorden?

- b) Hvor lang tid tager rejsen set fra rumskibet.
- c) Efter hvor lang tid vil det være for sent at sende et lyssignal fra Jorden til rumskibet for at afblæse rejsen.

# Appendiks



## A Invariant? Bevaret? Konstant?

Er lyshastigheden en konstant? Er den en invariant? Er massen bevaret i sammenstød? Er den en invariant? Eller en konstant? Eller måske begge dele? Mange begreber fra hverdags sproget er overtaget af videnskaben og anvendes i sammenhænge, der går langt ud over hverdagen. De tre adjektiver *invariant*, *bevaret* og *konstant* har præcise meninger i relativitetsteorien.

**Invariant:** I relativitetsteorien er en størrelse invariant, hvis den har den samme værdi, når den måles i forskellige inertialsystemer. Den første blandt de relativistiske invariante er lyshastigheden: Den har samme værdi i ethvert inertialsystem. En anden vigtig invariant er kvadratet på forskydningen mellem to begivenheder i rumtiden: Iagttagere i ethvert inertialsystem er enige om dette kvadrat, og dermed om egentiden eller egen-afstanden mellem begivenhederne. En tredje vigtig invariant er massen af en partikel. Der findes mange andre invariante, hver med sin anvendelighed.

En del vigtige størrelser kvalificerer sig ikke som invariante. Tiden mellem to begivenheder er ikke en invariant. Den er forskellig for to iagttagere i indbyrdes bevægelse. Heller ikke afstanden mellem to begivenheder er en invariant. Også den er forskellig fra det ene inertialsystem til det andet. Ligeledes er en partikels energi og impuls ikke invariante.

**Bevaret:** En størrelse er bevaret, hvis den har samme værdi før og efter en eller anden hændelse, eller hvis den er uforandret under en vekselvirkning. Den totale 4-impuls af et isoleret system af partikler er bevaret ved en indbyrdes vekselvirkning mellem partiklerne. I et givet inertialsystem betyder dette, at den totale energi er bevaret. Det samme gælder for hver komponent af den totale impuls. Kvadratet på systemets 4-impuls, og dermed systemets masse, er også bevaret ved en sådan vekselvirkning. Derimod er summen af de særskilte masser af systemets partikler i almindelighed ikke bevaret ved en vekselvirkning.

**Konstant:** En størrelse, der er konstant, ændrer sig ikke med tiden. Hastigheden af Rundetårn målt af en iagttagere på Niels Bohr Institutet er konstant, nemlig nul. Rundetårns hastighed målt på denne måde er således konstant, men ikke invariant: målt fra en passerende raket bevæger Rundetårn sig med en svimlende hastighed! Er Rundetårns hastighed bevaret? Bevaret i forhold til hvilken hændelse? Der gives intet *før* eller *efter* til hvilket udtrykket "bevaret" her kan referere. Udtrykket "bevaret" kan simpelthen ikke anvendes om Rundetårns hastighed.

Det er sandt at lyshastigheden i vakuum er konstant; den forandrer sig ikke med tiden. Det er også sandt, men en hel igennem anden udtalelse, at lyshastigheden er invariant; altså at den har samme værdi for forskellige iagttagere i indbyrdes jævn, retlinjet bevægelse. Det er sandt at den totale 4-impuls for et isoleret system er konstant; den forandrer sig ikke med tiden. Det er ligeledes sandt, men en hel igennem anden udtalelse, at den totale 4-impuls af et isoleret system er bevaret ved en stødproces eller ved en vekselvirkning mellem systemets partikler.

Når man hører ordene *invariant*, *bevaret* eller *konstant* gør man klog i at lytte godt efter det tilhørende *med hensyn til*, som altid skulle udtrykkes eller være indforstået. *Konstant* betyder sædvanligvis (men ikke altid) *med hensyn til* tiden. *Bevaret* betyder sædvanligvis (men ikke altid) *med hensyn til* en stødproces eller en vekselvirkning. *Invariant* kan have mindst lige så mange betydninger, som der findes geometrier til beskrivelse af Naturen: I den Euklidiske geometri er afstanden mellem to punkter invariant *med hensyn til* koordinatsystemer, som er roterede i forhold til hinanden. I 4-rummet er egentiden og massen invariante *med hensyn til* inertialsystemer i indbyrdes bevægelse. Den fulde betydning af ordene *invariant*, *bevaret* og *konstant* afhænger således i almindelighed af omstændighederne under hvilken begreberne anvendes.

## B Rækkeudvikling i relativitetsteorien

I relativitetsteorien har man igen og igen behov for at estimere værdien af  $\gamma$ -funktionen

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (\text{B.1})$$

i den ikke-relativistiske grænse, hvor  $v \ll c$ . Dette gøres ved rækkeudvikling.

Det første vi bemærker er, at  $\gamma_v$  er en funktion af  $v^2/c^2$  og derfor er af formen

$$f(\epsilon) = (1 - \epsilon)^a, \quad (\text{B.2})$$

hvor  $a = -\frac{1}{2}$ . For små værdier af  $\epsilon$  vælger vi at rækkeudvikle til første orden omkring  $\epsilon = 0$ , således at

$$f(\epsilon) \simeq f(0) + \epsilon \left. \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \quad (\text{B.3})$$

Ved at følge normale differentiationsregler får vi

$$\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} = -a(1 - \epsilon)^{a-1}, \quad (\text{B.4})$$

hvoraf

$$\left. \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = -a. \quad (\text{B.5})$$

Vi indsætter nu i (B.3) og har dermed vist sammenhængen

$$(1 - \epsilon)^a \simeq 1 - a\epsilon. \quad (\text{B.6})$$

Anvender vi nu dette på  $\gamma$ -funktionen, finder vi

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}. \quad (\text{B.7})$$



## C Løsninger til opgaver

### Opgaver til Kapitel 1

- 1.1 2 km/t  
1.2  $900 \text{ km/t}^2 = 0.069 \text{ m/s}^2$   
1.3 29.4 m/s  
1.4 18.6 m/s, 334 m/s  
1.5 21.6 knob,  $56.3^\circ$   
1.6 a) 60 s; b) 67.5 s; c) 63.6 s.  
1.8 a)  $-1.0 \text{ m/s}$ , 9.0 J.

### Opgaver til Kapitel 2

- 2.4  $-c/2$ ,  $\sqrt{3}L/c$   
2.5  $1.25 \times 10^{-7} \text{ s}$ ,  $2.25 \times 10^{-7} \text{ s}$   
2.7 Indsæt  $t' = \text{konst}$  (f.eks.  $t' = 0$ ) i Lorentz-transformationen og find dernæst  $x$  som funktion af  $t$ .  
2.8 i)  $v/c = 1/2$ ; ii)  $v/c = 4/5$ ; nej

### Opgaver til Kapitel 3

- 3.1  $49.1^\circ$ ,  $49.1^\circ$ ,  $81.8^\circ$   
3.2  $(l/l_0)^2 = (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi/\gamma^2)$   
3.3  $v/c = [1 + c^2\tau^2/l_0^2]^{-1/2}$   
3.4 0.445 ps  
3.5 a)  $0.27 \mu\text{s}$ ; b) 108 m; c) 39 m; d)  $0.45 \mu\text{s}$ .  
3.6  $\gamma = c(t_2 - t_1)/L$ , hvoraf udtrykket for  $v$  kan udledes.  
3.7

$$\Delta t' = \frac{2(a-x)}{c} \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$$

- 3.8  $0.94c$

**3.9**  $v_B = -3/5$  eller  $v_B = -4/5$ .

**3.10**  $l_0/2\gamma u$

**3.11** Stangens hvilelængde er  $L_0 = \gamma(u)L$ . I  $S'$  bevæger den sig ifølge (3.12) med hastigheden  $u' = (u-v)/(1-uv/c^2)$ , og dens længde i dette system er da  $L' = L_0/\gamma(u')$ , og altså dermed

$$L' = \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} L.$$

Heraf kan vi nu direkte beregne resultatet

$$L' = \frac{L}{(1-uv/c^2)\gamma(v)},$$

men det er lettere at anvende transformationsformlen (3.18) for  $\gamma$ -funktionen.

Bemærk, at for  $v = u$  er  $L' = \gamma(u)L = L_0$ . Hvorfor er vi glade for at se det?

**3.12** (a) For Galilei-transformationen:  $u = 2v$  eller tilsvarende  $v = \frac{1}{2}u$ ; (b) For Lorentz-transformationen:  $u = 2v/(1+v^2/c^2)$  eller tilsvarende  $v = (c^2/u)(1-\sqrt{1-u^2/c^2})$ . Det Galileiske resultat følger heraf ved at lade  $c \rightarrow \infty$ .

**3.13** a) i)  $0.859c$ ; ii)  $0.794c$ ,  $72.4^\circ$ ; b)  $0.794c$ ,  $107.6^\circ$

**3.16**  $u/c = 2 - \sqrt{3}$ .

**3.17** a)  $79.3^\circ$ , b)  $131.1^\circ$ , c)  $51.3^\circ$

## Opgaver til Kapitel 4

**4.1** a) 6 min; b) 12 min; c) 6 min

**4.2** a) 662.7 nm; c) 0.0089 nm.

**4.3** Den største bølgelængde iagttages fra planeten. Rumskibets hastighed er  $\beta = v/c = \sqrt{19}/10 \simeq 0.436$ .

**4.4** a)  $\lambda = 554$  nm; b)  $v = 0.143c$ ; c) 416 nm; d) 70 min; e) 69 min 17 sek.

**4.5** a)  $\lambda_A = 238$  nm; b)  $\lambda_B = 342$  nm; c)  $\lambda_P = 99.8$  nm.

## Opgaver til Kapitel 5

**5.1**  $\mathcal{P}_1$  kan være årsag til  $\mathcal{P}_2$ ;  $\mathcal{P}_1$  og  $\mathcal{P}_3$  kan ikke have årsagssammenhæng;  $\mathcal{P}_3$  kan være årsag til  $\mathcal{P}_2$ , men kun gennem et lyssignal.

**5.2** a)  $\beta = 1/2$ ; b)  $\beta = 4/5$ .

**5.3** a)  $A^2 = B^2 = C^2 = 0$ ,  $D^2 = 12$ ,  $E^2 = -12$ ; b) rotation omkring  $z$ -aksen; c) Lorentz-transformation.

**5.6** Lad os løse opgaven under den forudsætning, at begge de to 4-vektorer  $\mathbf{A} = (A_0, \vec{a})$  og  $\mathbf{B} = (B_0, \vec{b})$  peger mod fremtiden, altså  $A_0 \geq 0$  og  $B_0 \geq 0$ . Den generelle løsning involverer mere omhu m.h.t. fortegn, uden megen yderligere indsigt opnås.

a)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_0 B_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} = A_0 B_0 - ab \cos \theta$ , hvor  $a = |\vec{a}|$ ,  $b = |\vec{b}|$  og  $\theta$  er vinklen mellem  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ . Hvis begge vektorer er tidsagtige, er  $A_0 > a$  og  $B_0 > b$ . Men da kan vi ikke have  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ , hvorfor begge vektorer ikke kan være tidsagtige.

b)  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

c)  $B_0 = 0$ ;  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

d)  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

**5.8**  $14.8 \text{ m/s}^2$ ,  $59.0^\circ$ .

**5.9**  $1.29 \times 10^{16} \text{ m/s}^2$ ,  $1.10 \times 10^{19} \text{ m/s}^2$ , 440 omgange.

## Opgaver til Kapitel 6

**6.1**  $v/c = \sqrt{3}/2 \simeq 0.866$

**6.2**  $5.5 \text{ m/s}$

**6.3**  $E/c^2 = 5 \text{ kg}$ ;  $p/c = 4 \text{ kg}$ ;  $K/c^2 = 2 \text{ kg}$ ; Newton:  $K/c^2 = 0.96 \text{ kg}$

**6.5** Det eksiterede atom har massen  $m^* = m + \Delta E/c^2$ . Vi betragter henfaldet af en massiv partikel ( $m^*$ ) til en lettere partikel ( $m$ ) og en masseløs partikel (foton):  $m^* \rightarrow m + \gamma$ . Opgaven er dermed ækvivalent med Eksempel 6.1. Ved at gå frem på tilsvarende vis fås

$$E_\gamma = \frac{m^{*2} - m^2}{2m^*} c^2 = \left(1 - \frac{\Delta E}{2m^* c^2}\right) \Delta E \simeq \left(1 - \frac{\Delta E}{2mc^2}\right) \Delta E.$$

**6.6**  $V/c = 1/2$ ,  $M/m = 4/\sqrt{3} \simeq 2.31$

**6.7** a)  $E = E_0 + K = (938 + 500) \text{ MeV} = 1438 \text{ MeV}$ ;  $\gamma = E/E_0 \simeq 1.533$ , hvorfor  $\beta \simeq 0.758$ ;

b)  $E = E_0 + K = (0.5 + 500) \text{ MeV} = 500.5 \text{ MeV}$ ;  $\gamma = E/E_0 \simeq 979$ , hvorfor  $\beta \simeq 1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} \simeq 1 - 5 \times 10^{-7}$

**6.8**  $92.16 \text{ MeV}$

**6.9**  $10^5 \text{ år}$ ;  $29.6 \text{ s}$

**6.10**  $p = 1127 \text{ MeV}/c$ ,  $\gamma = 8.41$ ,  $\beta = 0.993$ ,  $\sin(\phi/2) = 1/\gamma$ , hvorfor  $\phi = 13.7^\circ$ .

**6.11**  $E_\gamma^{\min} = 4mc^2$ .

**6.12** Skriv den indkommende foton's 4-impuls som

$$\mathbf{P}_1 = (E_\gamma/c)(1, -\cos \theta_1, \sin \theta_1, 0).$$

Lorentztransformér denne til spejlsystemet, spejl fotonen (impulsen i  $x$ -retningen skifter fortegn) og transformér tilbage til laboratoriesystemet. Herved fås

$$E'_\gamma = E_\gamma \gamma^2 (1 + 2\beta \cos \theta_1 + \beta^2),$$

og

$$\cos \theta_2 = \frac{\cos \theta_1 + 2\beta + \beta^2 \cos \theta_1}{1 + 2\beta \cos \theta_1 + \beta^2}.$$

**6.13** Udregn impulstabet af en proton i target i de to tilfælde: *i*) 1581 MeV/ $c$ , *ii*) 11.6 MeV/ $c$ . Kraften er impulsoverførsel per tidsenhed: multiplicér med antal protoner per sekund og omregn til SI enheder: *i*)  $4.22 \times 10^{-5}$  N; *ii*)  $3.11 \times 10^{-7}$  N.

**6.14** Opgaven regnes ved anvendelse af impuls- og energi-bevarelse og gentagne anvendelser af den vigtige sammenhæng  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ . Lad os kalde den indkommende proton 1 og den stationære proton 2. Systemets totale energi er

$$E_{\text{sys}} = E_1 + E_2 = (mc^2 + K) + mc^2 = 2mc^2 + K.$$

Systemets impuls er givet ved den indkommende protons impuls, altså

$$p_{\text{sys}} = p_1 = \sqrt{E_1^2/c^2 - m^2 c^2} = \sqrt{(K + mc^2)^2/c^2 - m^2 c^2} = \sqrt{K^2/c^2 + 2mK}.$$

Idet  $\theta = \phi$ , er der symmetri mellem de to partikler i sluttilstanden. De deler dermed både energi og impuls ligeligt. Efter stødet er 1's impuls i  $x$ -retningen derfor

$$\tilde{p}_{1,x} = \frac{1}{2} p_{\text{sys}} = \frac{1}{2} \sqrt{K^2/c^2 + 2mK},$$

mens dens energi er

$$\tilde{E}_1 = \frac{1}{2} E_{\text{sys}} = mc^2 + \frac{1}{2} K.$$

Hermed kan vi beregne størrelsen af 1's impuls

$$\tilde{p} = \sqrt{\tilde{E}_1^2/c^2 - m^2 c^2} = \sqrt{(mc^2 + \frac{1}{2} K)^2/c^2 - m^2 c^2} = \frac{1}{2} \sqrt{K^2/c^2 + 4mK}.$$

Vinklen  $\theta$  er dermed givet ved

$$\cos \theta = \frac{\tilde{p}_{1,x}}{\tilde{p}} = \sqrt{\frac{K + 2mc^2}{K + 4mc^2}},$$

som ved indsættelse giver  $\theta = 38.9^\circ$ .

**6.15**  $E_\gamma^{\text{thres}} = 2mc^2(M + m)/M$ .

**6.17** Den højeste CM-energi fås, når protonen og fotonen bevæger sig i modsat retning. Ved at opskrive 4-impulsligningen og kvadrere fås  $E_p^{\text{thres}} = m_{\pi^0}(m_{\pi^0} + 2m_p)c^4/4E_\gamma$ , som ved indsættelse af talværdier giver  $2.9 \times 10^{20}$  eV.

**6.20** a) Energibevarelse: 2 MeV; b) Impulsbevarelse:  $23^\circ$

[Bemærk: De involverede energier er her så lave, at man med fordel kan anvende den klassiske sammenhæng,  $K = p^2/2m$ , mellem den kinetiske energi og impulsen.]

**6.23** a) 25001 år; b) 10.56 år; c) 0.973 år.

# Indeks

- $\gamma$ -funktionen, 29
  - transformation af, 57
- 3-vektor, 84–87
- 4-acceleration, 92–93
- 4-hastighed, 90–92
- 4-impuls, 98–99, 102
  - bevarelse af, 99, 105
- 4-kraft, 117–119
- 4-skalar, 88
- 4-vektor, 87–89
- aberration, 71–74
  - klassisk, 73
  - relativistisk, 74
- acceleration, 4, 92–93
  - transformation af, 93
- accelerator, 112, 122, 127, 130
- accelereret ur, 51
- antiproton, 112
- begivenhed, 3, 81
- bevægelsesligning, 119
- bindingsenergi, 114
- brintatom, 115
- Compton-spredning, 108
- cyklotron, 119
- deuteron, 115
- Doppler-effekt, 65–71, 107
  - fra transformation af 4-impuls, 107
  - klassisk, 65
  - relativistisk, 67
  - transversal, 69
- egen-acceleration, 40, 44, 92, 93, 120
- egentid, 24, 52, 84, 89, 122
- elektrisk felt, 119
- elektromagnetisk kraft, 119
- elektromagnetisme, 6
- elektron, 110, 115, 116, 131
  - positron-sammenstød, 110
  - Compton-spredning, 108
- elektronvolt, 111
- emissionsteorien, 6
- energi
  - bevarelse af, 101, 105
  - hvile-, 102
  - kinetisk, 102
  - sammenhæng med impuls, 105
  - total-, 102
- Feynman-ur, 50
- fortid, kausal, 84
- foton, 82, 83, 106, 107, 129–131
  - Compton-spredning, 108
  - raket, 133
- fremtid, kausal, 84
- Galilei-transformation, 3–4
- gluon, 127
- hastighed
  - Galilei-transformation, 4
  - Lorentz-transformation, 55–58
  - sammensætning af, 55
- henfaldslov, 52
- Higgs-boson, 112, 127
- hvileenergi, 102
- hvilelængde, 22, 47
- hvilemasse, 101

- hvilesystem, 22, 48, 53
  - øjeblikkelig, 90, 92
- hyperbolsk bevægelse, 40, 120–123
  
- iagttager, 25
- ideelt ur, 51, 96
- impuls
  - bevarelse af, 99
  - relativistisk, 99
  - sammenhæng med energi, 105
- inertialsystem, 1–3
- interferometer, 8–9
- interval, 33, 82
- invariant masse, 109
  
- kausalitet, 34, 84
- kernereaktion, 116
- koordinat-gitter, 24
- kosmisk stråling, 53, 130, 132
- kraft, 5, 117–120
  - transformationsregler for, 118
  
- længde, 22
- længdeforkortning, 47, 51
- Lorentz-faktor, 29
- Lorentz-invariant, 88
- Lorentz-kraft, 119
- Lorentz-transformation, 29
  - differensform, 31
  - differentialform, 31
  - grafisk repræsentation af, 36–41
  - udledning af, 26–29
- lysår, 54
- lysets hastighed, 6, 12–24
- lyskegle, 36, 82
  
- magnetfelt, 119
- masse, 2, 5, 98, 103
  - bevarelse af, 99, 101
- massecenter-system, 109
- masseløse partikler, 106
- mekanik
  - klassisk, 1–5
  - relativistisk, 97–123
  
- meter, 24
- Michelson-Morley-forsøget, 8–12
- muon, 53, 59, 96, 122
  
- neutrino, 105, 116
  - i neutronhenfald, 116
- neutron, 115, 116
  - henfald af, 116
- Newtons love, 1–3
  
- overlyshastighed, 34–35
  
- partikelhenfald, 52
- partikelsammenstød, 99–101, 110, 112
- pion, 52
- proton, 115, 116, 127, 129, 130, 132
  - produktion af, 112
  
- reaktionsenergi, 116
- referencesystem, 2
- relativistisk hastighedsgrænse, 33
- relativitetsprincip
  - klassisk, 5
  - speciel, 12–13
- retning af bevægelse, 57
- rumtid, 35–41, 81–89
- rumtidsdiagram, 35–41, 82–84, 108
  
- samtidighed, 20, 30
- sekund, 24
- signal, 33
- solens energiproduktion, 116
- standardkonfiguration, 3
- stive legemer, 35
- stjerners energiproduktion, 116
  
- tærskelenergi, 112
- tidsforlængelse, 48–53
- tvillingeparadoks, 54–55
- tyngdekraft, 98
- tyngdepunktssystem, 109
  
- vandrelængde, 47
- varighed, 24
- verdenslinje, 36, 82

verdenspunkt, 36

æter, 6–12