Rigtig, rigtig, rigtig god opgave 1.2b

Jonas S. Juul

December 2, 2017

1 Hvad finder jeg i dette dokument

I Lineær Algebra indgår en række afleveringsopgaver. I disse stilles en række opgaver, som naturligvis skal regnes korrekt, men hvor det tilmed er vigtigt at kunne beskrive sin tankegang og sit ræsonnement. Det er vigtigt at henvise til de sætninger og definitioner man bruger, og denne ændring i den skriftlige præsentation kan være svær at foretage. I dette dokument besvarer jeg den første ugeopgave på en måde som er i overensstemmelse med forventningerne til afleveringsopgaver i Lineær Algebra. Jeg henviser til definitioner og sætninger og skriver hvilke observationer jeg gør mig, som retfærdiggør min fremgangsmåde i opgaverne. Mit håb er at dette dokument vil udgøre et forståeligt eksempel på hvordan en skriftlig opgave i Lineær Algebra kan se ud, og som kan bruges til inspiration til fremtidige afleveringsopgaver for studerende.

Jeg vil gerne understrege, at ligesom man ikke nødvendigvis får fuld point for at regne alting rigtigt, behøver man heller ikke lave en fuldstændig perfekt besvarelse for at få fuld point. Jeg vil kun gennemgå *Opgave 1.2b* da dette er opgaven som blev udtrukket til bedømmelse, og dermed opgaven, som studerende har fået feed back på.

2 Opgave 1.2b

Delopgave a) Bestem partiklernes masser
I denne opgave betragter vi kollisionen af tre partikler med masserne m_1, m_2 og m_3. Inden kollisionen har partiklerne hastighederne $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ og $\mathbf{v_3}$. Efter kollisionen har de hastighederne $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$ og $\mathbf{w_3}$. Vi ved at masserne ikke ændres under kollisionen.

Vi antager at impulsen er bevaret under kollisionen. I så fald gælder ligheden

$$m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2} + m_3\mathbf{v_3} = m_1\mathbf{w_1} + m_2\mathbf{w_2} + m_3\mathbf{w_3}. \tag{1}$$

Vi trækker højresiden fra på begge sider og indsætter de opgivne vektorer. Vi bemærker at masserne har enheder *kg* og at hastighederne har enheder *m/s*, og udelader at skrive disse eksplicit i det følgende regnestykke

$$\begin{aligned}
&m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2} + m_3\mathbf{v_3} = m_1\mathbf{w_1} + m_2\mathbf{w_2} + m_3\mathbf{w_3} && (2)\\
\Rightarrow &m_1(\mathbf{v_1} - \mathbf{w_1}) + m_2(\mathbf{v_2} - \mathbf{w_2}) + m_3(\mathbf{v_3} - \mathbf{w_3}) = \mathbf{0} && (3)\\
&= m_1\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right) + m_2\left(\begin{pmatrix}6\\12\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\3\\1\end{pmatrix}\right) + m_2\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}\right) && (4)\\
&= m_1\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} + m_2\begin{pmatrix}-1\\9\\-3\end{pmatrix} + m_3\begin{pmatrix}2\\6\\-2\end{pmatrix}. && (5)
\end{aligned}$$

Produktet af en skalar og søjlevektor udføres ved at gange skalaren på hver af indgangene i vektoren. Dette ses af *Definition 2.1.4*, hvor skalaren er en 1×1 matrix og søjlevektoren i dette tilfælde er en 3×1 matrix. Gøres dette får vi nu en tre ligninger med tre ubekendte: én ligning for hver koordinat

$$\begin{aligned}
-m_2 + 2m_3 &= 0, && (6)\\
-3m_1 + 9m_2 + 6m_3 &= 0, && (7)\\
m_1 - 3m_2 - 2m_3 &= 0. && (8)
\end{aligned}$$

De tre ubekendte er masserne m_1, m_2 og m_3, og vi genkender (6)-(8) som et lineært ligningssystem, som vi nu kan løse vha. Gauss-elimination (*sætning 1.2.18*). Først opstiller vi ligningssystemets totalmatrix $(A|\mathbf{b})$ bestående af ligningssystemets koefficienter og indgangene i vores lignings venstreside (i bogen noteret som vektoren $\mathbf{b}$),

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0\\ -3 & 9 & 6 & 0\\ 1 & -3 & -2 & 0\end{array}\right). \tag{9}$$

Vi omdanner denne til en matrix på reduceret Echelon form $(A'|\mathbf{b}')$ ved en følge af rækkeoperationer (det ved vi at vi kan fra *sætning 1.2.13*). Vi ved desuden, at ligningssystemerne tilhørende de to matricer vil have samme løsningsmængde (*sætning 1.2.5*). I det følgende bruger vi notationen

$M_i(c)$ Vi multiplicerer række i med konstanten $c \in R$

$S_{ij}(c)$ Vi adderer c gange række j til række i

T_{ij} Vi bytter række i og række j om

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 9 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{S_{23}(3)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{S_{31}(-3)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right)$$
$$\overset{M_1(-1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right) \overset{T_{12}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right) \overset{T_{13}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Den endelige matrix er på reduceret Echelon form (*Definition 1.2.7*), den har to ikke-nul rækker og dermed rang 2 (*Definition 1.2.10*). *Definition 1.2.10* fortæller desuden at matricen har to ledende indgange, og fra *sætning 1.2.18* ved vi så at vi kan udtrykke variablene m_1 og m_2, svarende til de ledende indgange, ved den tilbageværende variabel m_3. Vi parametriserer altså løsningen ved $m_3 = t > 0$. Vi løser den ligningen svarende til den endelige totalmatrix

$$m_1 - 8m_3 = 0 \tag{10}$$
$$m_2 - 2m_3 = 0 \tag{11}$$

Og får altså

$$\underline{\underline{m_1 = 8t \text{ kg}, \qquad m_2 = 2t \text{ kg}, \qquad m_3 = t \text{ kg}}} \tag{12}$$

Vi tjekker om løsningen er korrekt ved at indsætte i det oprindelige ligningssystem (6)-(8) og får

$$0 = -2t + 2t, \tag{13}$$
$$0 = -24t + 18t + 6t, \tag{14}$$
$$0 = 8t - 6t - 2t, \tag{15}$$

hvilket stemmer. Vi bemærker også at løsningen giver fysisk mening. Fysikken bag kollisioner er klassisk mekanik, som både gælder for legemer af størrelsesordenerne glaskugler himmellegemer. Altså ville det være underligt løsningen ikke skulle parametriseres.

Delopgave b) Er der tale om et uelastisk stød? Som det skrives i opgaven, er et stød elastisk hvis summen af partiklernes kinetiske energi er bevaret. Vi beregner altså $E_{kin} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_i v_i^2$ og ser om denne sum er lig $E_{kin} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_i w_i^2$. Her betegner kvadratet på vektorene vektorens længde i anden – en størrelse, som vi ved er lig det indre produkt mellem vektoren og sig selv. Vi beregner først den kvadrerede længde på alle hastighedsvektorer

$$v_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 6\frac{m^2}{s^2}, \qquad v_2^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} = 184\frac{m^2}{s^2}, \qquad v_3^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 14\frac{m^2}{s^2}, \tag{16}$$

$$w_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 18\frac{m^2}{s^2}, \qquad w_2^2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 59\frac{m^2}{s^2}, \qquad w_3^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 26\frac{m^2}{s^2}. \tag{17}$$

Vi bruger nu disse værdier til at beregne summen af partiklernes kinetiske energi før kollisionen,

$$E_{\text{kin,før}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 \tag{18}$$
$$= \frac{1}{2}8t \cdot 6\frac{kg \cdot m^2}{s^2} + \frac{1}{2}2t \cdot 184\frac{kg \cdot m^2}{s^2} + \frac{1}{2}t \cdot 14\frac{kg \cdot m^2}{s^2} \tag{19}$$
$$= 215tJ. \tag{20}$$

Hvor vi ved andet lighedstegn har indsat vor parametriserede løsning (12) på massernes pladser. Vi gør tilsvarende for at beregne summen af partiklernes kinetiske energy efter kollisionen.

$$E_{\text{kin,efter}} = \frac{1}{2}m_1 w_1^2 + \frac{1}{2}m_2 w_2^2 + \frac{1}{2}m_3 w_3^2 \tag{21}$$

$$= \frac{1}{2}8t \cdot 18\frac{kg \cdot m^2}{s^2} + \frac{1}{2}2t \cdot 59\frac{kg \cdot m^2}{s^2} + \frac{1}{2}t \cdot 26\frac{kg \cdot m^2}{s^2} \tag{22}$$

$$= 144tJ. \tag{23}$$

Vi ser at $E_{\text{kin,før}} \neq E_{\text{kin,efter}}$ og konkluderer dermed at stødet er uelastisk.