Opgavesæt 6

Temaet i denne uge er primært laplacetranformationen til at løse koblede ordinære differentialligninger og basale partielle differentialligninger. Der vil derudover være nogle opgaver i legendre-polynomier, som primært er kortere forståelsesopgaver.

Opgave 1:
Løs først opgaverne i noten om laplacetransformationen. Dvs. de koblede differentialligninger og diffusionsligningen.

Opgave 2:
Fra eksamenssættet 2014 (svar til sættet findes på hjemmesiden)

Benyt Fourier-transformationen mht. variablen x og Laplace-transformationen mht. variablen t til at finde løsningen til den partielle differentialligning

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 1,$$

hvis $u(0,x) = 0$. Antag at Fourier-transformationen af $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ er $ik\tilde{u}(t,k)$ hvor $\tilde{u}(t,k)$ er Fourier-transformationen af $u(x,t)$ - med andre ord, der kan ses bort fra værdien af $u(t,x)$ for $|x| \to \infty$.

Hint: Beregningerne bliver en smule lettere, hvis man, efter at have anvendt begger transformationer, anvender den inverse Fourier-transformation før den inverse Laplace-transformation.

Opgave 3:
Fra eksamenssættet 2015 (svar til sættet findes på hjemmesiden)

Benyt Fourier-transformationen mht. variablen x og Laplace-transformationen mht. variablen t til at at løse den partielle differentialligning

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0,$$

med grænsebetingelserne:

$$u(0,x) = g(x) \quad \text{og} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

Det antages at $u(t,x)$ og de afledte med hensyn til x går hurtigt mod 0 for $|x| \to \infty$. Løsningen skulle blive:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(g(x+t) + g(x-t)\Big).$$

Opgave 4:

$$f(\theta) = \sin^2\theta$$

ved hjælp af Legendre-polynomierne på formen $P_\ell(\cos\theta)$. Dvs. find koefficienterne a_ℓ i ekspansionen

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos\theta)$$

Opgave 5:
Hvis man skulle ekspandere x^{17} ved hjælp af Legendre-polynomierne, hvilke koefficienter a_ℓ ville så indgå? (Der skal ikke regnes i denne opgave).

Opgave 6:
Herunder følger nogle ekstra øveeksempler på integration med flertydige funktioner.

Vis at

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx = \frac{\pi}{2}$$

Det næste integrale kan være lidt drilsk. Det løses lettest ved at holde integrationsvejen i den øvre halvplan, dvs. ved at introducere en opskæringslinie i den nedre halvplan.

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx = 0$$

Betragt derfor integralerne $\int_{-\infty}^0$, $\int_0^\infty$ og $\int_\Gamma$, hvor Γ betegner en halvcirkel med uendelig radius i den øvre halvplan. Integralet $\int_{-\infty}^0$ regnes i den komplekse plan ved at sende x over i $x \exp i\pi$ og derfor $\ln x$ over i $\ln|x| + i\pi$.

Regn nu integralet, hvor man flytter polerne lidt

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+4}dx = \frac{\pi \ln 2}{4}$$

Opgave 7: Inspirationsopgave (Udfordrende)
Opgaven er en opfølgning på den termiske diffusion vi kiggede på til forelæsningerne og er mere teknisk end en typisk eksamensopgave (så er du advaret ;).

Løs følgende ligning (kun ved hjælp af Laplace-transformationen mht. tiden) for temperaturen i en uendelig lang metalstang som initielt har temperaturen $T = 0$

og efterfølgende bringes i kontakt med et uendeligt reservoir med temperaturen T_{res},

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

Metalstangen ligger på den positive reelle-akse ($x > 0$) og har rand-betingelserne

$$\begin{cases} T(x,0) &= 0 \\ T(0,t) &= T_{res} \\ T(x \to \infty, t) &= 0 \end{cases}$$