Opgave 4:
Udtryk funktionen

$$f(\theta) = \sin^2\theta$$

ved hjælp af Legendre-polynomierne på formen $P_\ell(\cos\theta)$. Dvs. find koefficienterne a_ℓ i ekspansionen

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos\theta)$$

Svar: Bemærk, at funktionen er lige og derfor findes kun koefficienter for ℓ lige. Man finder ved direkte beregning eller ved inspektion, at $a_0 = 2/3$ og $a_2 = -2/3$.

Opgave 5:
Hvis man skulle ekspandere x^{17} ved hjælp af Legendre-polynomierne, hvilke koefficienter a_ℓ ville så indgå? (Der skal ikke regnes i denne opgave).
Svar: Funktionen er ulige, så derfor vil kun de ulige led indgå. Samtidig vides at $P_\ell(x)$ har den største potens x^ℓ. Man skal derfor bruge alle de ulige led $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{17}$. Man bruger rekursivt $P_1(x)$ til at fjerne x leddet i $P_3(x)$ og danner derved en funktion $H_3(x) = x^3 = (2/5)P_3(x) + (7/5)P_1(x)$. Man bruger nu H_3 til at fjerne x^3 leddet fra $P_5(x)$ og danne $H_5(x) = x^5$. Fortsættes denne procedure opnår man til sidst $H_{17}(x) = x^{17}$.

Opgave 6:
For det første integrale, er der et forgreningspunkt i origo og en simpel pol i $x = -4$. Vi vælger derfor en opskæringslinie langs den reelle akse og får derved

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx + \int_\infty^0 \frac{1}{\sqrt{e^{2\pi i}x}(e^{2\pi i}x+4)}dx = 2\pi i \mathrm{Res}(\mathrm{x} = -4)$$

Residuet i $x = -4$ er lig $1/(2i)$ og derved får vi, at

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx - \int_0^\infty \frac{1}{-\sqrt{x}(x+4)}dx = \pi$$

hvilket igen giver, at

$$2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx = \pi$$

som endelig giver,

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx = \frac{\pi}{2}$$

Integralet herunder udregnes på lignende vis, men istedet for at udføre integralet rundt langs en cirkel, udføres integralet langs en halvcirkel i den øvre plan

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx + \int_{-\infty}^0 \frac{\ln|x| + i\pi}{x^2+1}dx = Res(x=i)$$

Ved at substituere $x \to -x$ og ved at vende integrationsgrænserne i det andet integrale fås

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx + \int_0^\infty \frac{i\pi}{x^2+1}dx = Res(x=i)$$

Det andet integrale kan skrives som

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{i\pi}{x^2+1}dx = Res(x=i)$$

Vi får derved (ved at udføre pol-integration på det andet integrale)

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx + \frac{i\pi^2}{2} = \frac{i\pi^2}{2}$$

Hvilket giver

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx = 0$$

Det samme kan nu gøres for integralet med poler i $x = \pm 2i$.

Opgave 7: Inspirationsopgave

Temperaturen i en uendelig lang metalbar bestemmes fra diffusionsligningen

$$\partial_t T(x,t) = \partial_x^2 T(x,t). \tag{1}$$

Temperaturen afhænger kun af x-koordinaten for $x \geq 0$ og har følgende rand-betingelser

$$\text{rand-betingelser} \begin{cases} T(0,t) & = & T_0 \\ T(x,0) & = & 0, \quad \text{for } x > 0 \\ T(x,t) & \overset{x\to\infty}{\to} & 0 \end{cases} \tag{2}$$

Hvis vi anvender Laplace-transformationen mht. tiden får vi

$$s\hat{T}(x,s) - T(x,0) - \partial_x^2 \hat{T}(x,s) = 0. \tag{3}$$

Vi bruger nu betingelsen, $T(x,0) = 0$ og får differentialligningen

$$0 = \left(s - \partial_x^2\right)\hat{T}(x,s) = \left(\sqrt{s} + \partial_x\right)\left(\sqrt{s} - \partial_x\right)\hat{T}(x,s), \tag{4}$$

som har den generelle løsning

$$\hat{T}(x,s) = A(s)e^{-\sqrt{s}x} + B(s)e^{\sqrt{s}x}, \tag{5}$$

hvor $A(s)$ og $B(s)$ er funktioner afhængig af s. Vi ser, at det andet led ikke er kompatibelt med randbetingelsen $T \to 0$ for $x \to \infty$ og derfor sætter vi $B(s) = 0$.

Vi finder funktionen $A(s)$ fra randbetingelsen $T(0,t) = T_{res}$ ved at benytte ligning (5)

$$\hat{T}(0,s) = A(s), \tag{6}$$

som igen giver

$$\hat{T}(0,s) = \int_0^\infty T_{res}e^{-st}dt = \frac{T_{res}}{s}. \tag{7}$$

Den komplette løsning i Laplace-rummet er derfor

$$\hat{v}_x(0,s) = \frac{T_{res}}{s}e^{-\sqrt{s}x}. \tag{8}$$

For at få løsningen i tid skal vi benytte den inverse Laplace-transformation. Vi kan gøre dette direkte eller ved at benytte foldnings-egenskaben og skrive ligning (8) som et produkt af to led $\hat{g}_1(s) = \frac{T_{res}}{s}$ og $\hat{g}_2(s) = \exp(-\sqrt{s}x)$, i.e.

$$\hat{T}(x,s) = \hat{g}_1(s)\hat{g}_2(x,s) \tag{9}$$

Fra foldnings-sætningen får vi så

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\hat{g}_1(s)\hat{g}_2(x,s)\right] = \int_0^t g_1(t-\tau)g_2(\tau)d\tau, \tag{10}$$

hvor g_1 og g_2 er den inverst transformerede af $\hat{g}_1$ and $\hat{g}_2$.

Den inverse transformation af $\hat{g}_1$ følger direkte fra ligning (7). Den inverse transformation af $\hat{g}_2$ er noget mere kompliceret at beregne,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\hat{g}_2(x,s)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{-\sqrt{s}x}e^{st}ds = \frac{1}{2\pi i x^2}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{-\sqrt{s}}e^{\frac{st}{x^2}}ds. \tag{11}$$

Ved det andet lighedstegn herover har vi redefineret integrationvariablen s til sx^2 og benyttet at x er positiv. Problemet med den inverse transformation er, at funktionen har et branch-point pga. kvadratroden, så vi bliver nødt til at introducere en opskæringslinie. Samtidig skal vi være påpasselig i forhold til at vælge en passende kontour at integrere langs. Vi vælger her at bruge den

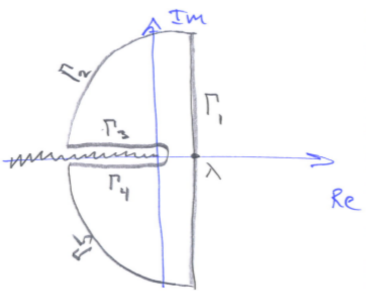

Figure 1: Integration path

negative reelle akse som opskæringslinie og lader argumentet for de komplekse tal løbe mellem $-\pi$ og π. Vi vælgere en intgrationsvej som vist i Fig. 1. Bemærk, at eftersom $t > 0$, så vil integrationsvejen langs elementerne Γ_2 og Γ_5 være lig 0, og vi har derfor, at

$$0 = \frac{1}{2\pi i x^2} \int_{\Gamma_1+\Gamma_3+\Gamma_4} e^{-\sqrt{s}} e^{\frac{st}{x^2}} ds. \tag{12}$$

Det samlede integrale er lig nul eftersom der ikke er nogen poler inden for integrationsvejen, og derfor, hvis $\tilde{t} = t/x^2$, kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} e^{-\sqrt{s}} e^{\tilde{t}s} ds &= -\int_{\Gamma_3} e^{-\sqrt{s}} e^{\tilde{t}s} ds - \int_{\Gamma_4} e^{-\sqrt{s}} e^{\tilde{t}s} ds \\
&= -e^{i\pi} \int_{\infty}^{0} e^{-\sqrt{r\exp(i\pi)}} e^{r\exp(i\pi)\tilde{t}} dr - e^{-i\pi} \int_0^\infty e^{-\sqrt{r\exp(-i\pi)}} e^{r\exp(-i\pi)\tilde{t}} dr \\
&= -\int_0^\infty e^{-i\sqrt{r}} e^{-r\tilde{t}} dr + \int_0^\infty e^{i\sqrt{r}} e^{-r\tilde{t}} dr \\
&= -2\int_0^\infty e^{-iu} e^{-u^2\tilde{t}} u du + 2\int_0^\infty e^{iu} e^{-u^2\tilde{t}} u du \\
&= 2\int_0^\infty \left(e^{iu} - e^{-iu}\right) u e^{-u^2\tilde{t}} du \\
&= \int_{-\infty}^\infty \left(e^{iu} - e^{-iu}\right) u e^{-u^2\tilde{t}} du \\
&= 2i\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^\infty e^{iu} u e^{-u^2\tilde{t}} du\right],
\end{aligned} \tag{13}$$

i denne længere beregning, har vi benyttet substitutionen $r = u^2$ og benyttet symmetrien af integranten til at udvide integrationen til hele den reelle akse. Vi har yderlige taget imaginær funktionen uden for integralet eftersom eksponentialfunktionen som involverer u^2 er reel. Vi kan nu "complete the square", og udføre det Gauss-lignende integrale til at opnå resultatet

$$\frac{1}{2\pi i x^2} \int_{\Gamma_1} e^{-\sqrt{s}} e^{\tilde{t}s} ds = \frac{1}{\pi x^2} \mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^\infty e^{iu} u e^{-u^2\tilde{t}} du\right] = \frac{1}{\sqrt{4\pi} y^2 \tilde{t}^{3/2}} e^{-1/(4\tilde{t})} = \frac{x}{\sqrt{4\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{14}$$

Hopper vi nu tilbage til ligning (10), så får vi den endelige løsning

$$T(x,t) = \frac{T_{res} x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \tau^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} d\tau = T_{res} \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = T_{res}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right], \tag{15}$$

hvor erfc er den konjugerede "error function" erf (slå evt. op på Wikipedia)