Anvendt Statistik

Eksamen i anvendt statistik

Følgende opgaver er take-home eksamen for kurset anvendt statistik. De vil blive udlevet torsdag d. 29. oktober 2009, og en skriftlig besvarelse skal være undertegnede i hænde senest fredag d. 30. oktober 2009 klokken 12:00. Det er **ikke** tilladt at arbejde sammen om opgaven.

Der ikke blot tillades men anbefales kraftigt at bruge computere og de programmer I har arbejdet med samt modifikationer deraf, og i visse opgaver vil brugen af computere være nødvendig.

God arbejdslyst, Troels

I – Fordelinger og sandsynlighed:

1.1 Lille Per har droppet spil og sat sig ud på Blegdamsvej for at tælle røde biler. Han har fået at vide, at 3.1% af de passerende biler er røde, men observerer 11 røde biler ud af 100. Hvad er sandsynligheden for det eller noget mere ekstremt, givet oplysningen om den forventede rate, og skal Lille Per tro på det?

1.2 Medlemmerne af en større kollaboration, der kører det gigantiske neutrinoobservatorium Kamiokande i Japan, observerede mandag d. 23. februar 1987 11 neutrinoer i deres apparatur, som faldt sammen med observationen af Supernova 1987A.

- Hvad er sandsynligheden for at observere 11 eller flere neutrinoer på en dag, hvis man forventer at se 2.1 neutrinoer om dagen i gennemsnit?
- Faktisk kom de 11 neutrinoer indenfor en periode på 13 sekunder. Hvad er sandsynligheden for at gøre en sådan observation, igen givet den forventede rate?

II – Fejlberegning:

2.1 Fem grupper studerende har udfra fem forskellige dataset beregnet Universets alder og fået følgende resultater (i 10^9 år):

13.2 ± 0.4	15.6 ± 0.7	12.5 ± 0.6	14.2 ± 0.5	13.5 ± 0.9

- Hvad er middelværdien og usikkerheden på middelværdien?
- Er der en af målingerne, som synes usandsynlig? Argumenter, og udeluk målingen, hvis det er tilfældet. Stemmer de øvrige målinger nu overens?
- Stjernen HE 1523-0901 er målt til at være $(13.2 \pm 0.1) \times 10^9$ år gammel med ESOs Very Large Telescope. Hvor stor sandsynlighed er der for, at de studerendes kombinerede måling ligger under denne stjernes alder?

2.2 Et penduls periode T er givet ved $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, hvor l er pendulets længde og g tyngdeaccelerationen. I et eksperiment måles perioden til $T = (2.03 \pm 0.05)$s og pendulets længde til $l = (0.998 \pm 0.003)$m.

- Forudsat at der ingen korrelation er mellem målingerne af T og l, hvad er så resultatet og usikkerheden på målingen af g?
- Hvad er resultatet, hvis T og l er 30% linært korrelerede?

III – Monte Carlo: (Til denne del anbefales brug af computere. Plots kan vedlægges opgavebesvarelsen).

3.1 Lad en Monte Carlo algoritme generere 1000 kasser med sidelængderne $a = 2.0 \pm 0.2$, $b = 3.0 \pm 0.15$ og $c = 4.0 \pm 0.1$, hvor usikkerhederne er Gaussiske og a, b og c er ukorrelerede.

- Plot fordelingen af kassernes volumener, og bestem middelværdi og spredning.
- Sammenlign spredningen med den man får fra analytisk propagering af fejl.

3.2 Lad $f(x) = \frac{1}{\pi}(1 + \sin(x))$ være sandsynlighedsfordeling for $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

- Hvilken metode bør benyttes til at generere denne fordeling? Forklar.
- Lav en algoritme, der udfra en jævn fordeling i intervallet $[0, 1]$ genererer 1000 tal efter sandsynlighedsfordelingen $f(x)$. Udregn gennemsnittet af disse tal samt usikkerheden på dette gennemsnittet. Sammenlign med den analytiske værdi for gennemsnittet.

IV – Statistiske tests:

4.1 Ladede partikler, der går gennem en gas, producerer ionisation, mængden af hvilken afhænger af partiklens type. Antag at en statistik, t, baseret på signalet i en detektor er konstrueret således, at den er Gaussisk fordelt omkring 2 for elektroner og 0 for pioner, begge fordelinger med en spredning på 1. En test bliver konstrueret til at udvælge elektroner ved at kræve at $t > 1.2$.

- Hvad er sandsynligheden for at testen accepterer en elektron og fravælger en pion?
- Antag at andelen af pioner udgør 99 % og den resterende 1 % udgøres af elektroner. Hvilken renhed (dvs. brøkdel af de partikler der udvælges, som rent faktisk er elektroner) har den mængde elektroner der udvælges af kriteriet $t < 1.2$?
- Hvis man kræver en mængde elektroner med renhed 95 %, hvilket kriterium for t skal man så kræve? Og hvad er sandsynligheden for at acceptere en elektron ved denne værdi af t?

V – Fitting data:

5.1 I et eksperiment med en radioaktiv isotop måles antallet af henfald i intervaller af 1 sekund, idet man ønsker at bestemme levetiden. Resultatet er givet nedenfor:

Time (s)	0.50	1.50	2.50	3.50	4.50	5.50	6.50	7.50	8.50	9.50
Counts	805	491	325	235	152	83	83	68	46	33

- Fit datasættet med en eksponentialfunktion. Hvilke fejl tilskriver du hver måling? Hvad er sandsynligheden for χ^2? Giver dette et godt fit?
- Det viser sig, at der er en konstant baggrund. Inkluder denne i dit fit, og gentag fittet. Giver dette en signifikant forbedring?
- En efterfølgende måling viser, at baggrunden er 29.2. Givet denne viden, kan du forbedre din måling af levetiden?

Coincidences, in general, are great stumblingblocks in the way of that class of thinkers who have been educated to know nothing of the theory of probabilities – that theory to which the most glorious objects of human research are endebted for the most glorious of illustration.

[Edgar Allan Poe (1809-1849), The murders in the Rue Morgue]